Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Горшков, Стабилизация одномерного уравнения теплопроводности на полуограниченном стержне, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 213–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm388>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:41:14

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ СТЕРЖНЕ

А. В. Горшков

В последнее время активно исследовалась задача точной управляемости для широкого класса параболических уравнений и систем Навье–Стокса (см. [1], [2] и приводимый там список литературы). Однако простой анализ показывает невозможность получения такого рода результатов в случае неограниченных областей даже для уравнения теплопроводности. Поэтому в случае неограниченных областей естественным является переход от задачи управляемости на конечном промежутке времени к задаче стабилизации при времени t , стремящемся к бесконечности. Эта задача состоит в следующем.

Рассматривается уравнение теплопроводности без внешних источников тепла на полуограниченном стержне:

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega, \quad (1)$$

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_0(x) \in Y_0^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (2)$$

где $Y_0^\alpha = \{y_0(x) \mid y_0 \in C^2(0, \infty), e^{\alpha x} y_0(x) \in L_1(0, \infty)\}$.

Требуется для каждого натурального k найти такое граничное условие (управление) $u_k(t)$, чтобы для решения $y(t, x)$ задачи (1), (2) с граничным условием

$$y|_{x=0} = u_k(t) \quad (3)$$

при любом фиксированном $x \in (0, \infty)$ выполнялось следующее условие стабилизации:

$$t^k y(t, x) \in L_2(0, \infty). \quad (4)$$

Введем обозначения: $H^{1,2}(\mathbb{R}_+^2)$ – пространство Соболева функций $y(t, x)$ с нормой

$$\|y\|_{H^{1,2}(\mathbb{R}_+^2)}^2 = \|y\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|\partial_t y\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2 + \|\partial_{xx} y\|_{L^2(\mathbb{R}_+^2)}^2,$$

$H^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R}_+)$ – пространство Соболева функций $u(t)$, квадратично суммируемых с дробной производной порядка $\frac{3}{4}$ (см. [3]).

ТЕОРЕМА. Для любых $y_0(x) \in Y_0^\alpha$, $k \in \mathbb{N}$ существует решение $(y_k(t, x), u_k(t)) \in H^{1,2}(\Omega) \times H^{\frac{3}{4}}(0, \infty)$ задачи (1)–(4).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Будем решать недоопределенную задачу (1), (2), и среди всех ее решений выделим те, которые удовлетворяют (4). Ограничение найденных функций при $x = 0$ даст искомое граничное управление.

С помощью преобразования Лапласа $\hat{y}(\tau, x) = \int_0^\infty e^{-\tau t} y(t, x) dt$ сведем нашу задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению с параметром τ :

$$\partial_{xx}^2 \hat{y}(\tau, x) - \tau \hat{y}(\tau, x) = -y_0(x). \quad (5)$$

Если $y(t, x) \in H^{1,2}(\Omega)$, то $\hat{y}(\tau, x)$ является аналитической функцией в комплексной области $D = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \tau > 0\}$. Общее решение уравнения (5) в классе ограниченных функций по x и τ имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{y}(\tau, x) = & \hat{u}(\tau) e^{-\sqrt{\tau} x} - \frac{e^{-\sqrt{\tau} x}}{2\sqrt{\tau}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\tau} z} y_0(z) dz \\ & + \frac{e^{-\sqrt{\tau} x}}{2\sqrt{\tau}} \int_0^x e^{\sqrt{\tau} z} y_0(z) dz + \frac{e^{\sqrt{\tau} x}}{2\sqrt{\tau}} \int_x^\infty e^{-\sqrt{\tau} z} y_0(z) dz. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\widehat{u}(\tau)$ – аналитическое в области $\{\tau \mid \operatorname{Re} \tau > -\varepsilon_0, \varepsilon_0 > 0\}$ преобразование Лапласа произвольной функции из $H^{\frac{3}{4}}(0, \infty)$. Тогда из (6) следует, что общее решение $\widehat{y}(\tau, x)$ допускает аналитическое продолжение в область $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \{\tau \mid \operatorname{Re} \tau \leq -\varepsilon_0\})$.

Применяя к $\widehat{y}(t, x)$ обратное преобразование Лапласа, получим:

$$y(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{k_0}} e^{\tau t} \widehat{y}(\tau, x) d\tau, \quad (7)$$

где интегрирование ведется по произвольной прямой $\gamma_{k_0} = \{\tau \mid \operatorname{Re} \tau = k_0 > 0\}$ в комплексной плоскости.

Интегрирование в (7) по прямой γ_{k_0} , согласно интегральной формуле Коши, сводится к интегрированию по кривой $\gamma_{-k_1, \varepsilon}$, состоящей из пяти элементов: $\gamma_{(-\infty, -\varepsilon)} = \{\tau \mid \operatorname{Re} \tau = -k_1, \operatorname{Im} \tau < -\varepsilon\}$, $\gamma_{-\varepsilon} = \{\tau \mid \operatorname{Re} \tau \in (-k_1, 0), \operatorname{Im} \tau = -\varepsilon\}$, $\gamma_{(-\varepsilon, \varepsilon)} = \{\tau \mid \operatorname{Re} \tau = 0, \operatorname{Im} \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, $\gamma_{\varepsilon} = \{\tau \mid \operatorname{Re} \tau \in (-k_1, 0), \operatorname{Im} \tau = \varepsilon\}$, $\gamma_{(\varepsilon, \infty)} = \{\tau \mid \operatorname{Re} \tau = -k_1, \operatorname{Im} \tau > \varepsilon\}$, где $k_1 < \varepsilon_0$.

Здесь $\varepsilon > 0$ – произвольный параметр интегрирования, контур обходится в направлении “снизу-вверх”. Устремляя ε к нулю и производя элементарные вычисления, получаем следующее выражение для решения уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} y(t, x) = & -\frac{e^{-k_1 t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \widehat{y}(-k_1 + i\xi, x) d\xi \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{k_1}} \sin(\lambda x) \left[\lambda \widehat{u}(-\lambda^2) + \int_0^{\infty} \sin(\lambda z) y_0(z) dz \right] e^{-\lambda^2 t} d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое слагаемое в (8) убывает экспоненциально. Положив $\widehat{u}(\tau) = \frac{P_{k-1}(\tau)}{(\tau + \varepsilon_0)^{4k+4}}$, где $P_{k-1}(\tau)$ – некоторый полином степени $k-1$, получим оценку $\lambda \widehat{u}(-\lambda^2) + \int_0^{\infty} \sin(\lambda z) y_0(z) dz \leq C \lambda^{2k+1}$ при достаточно малых λ . Коэффициенты полинома $P_{k-1}(\tau)$ определяются из условия совпадения первых k членов разложения функций $\lambda \widehat{u}(-\lambda^2)$ и $-\int_0^{\infty} \sin(\lambda z) y_0(z) dz$ по λ . Тогда второе слагаемое в (8) при достаточно больших t оценивается через $\frac{C}{t^{k+1}}$ и представляет главную асимптотику решения $y(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuilov // Acta Appl. Math. 1994. V. 37. № 2. P. 67–76.
- [2] А. В. Фурсиков, О. Ю. Эмануилов // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 9. С. 103–138.
- [3] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. Неоднородные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.02.2001