Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Об иррациональности значений дзета-функции в нечетных точках, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:35:38

ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ В НЕЧЕТНЫХ ТОЧКАХ

В. В. Зудилин

В настоящее время известно лишь несколько результатов об арифметической природе значений дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в нечетных точках $s > 1$. Первый из них – иррациональность $\zeta(3)$ – получил Р. Апер в 1978 г. [1], а последний принадлежит Т. Ривоалю [2], доказавшему в 2000 г. асимптотическую оценку размерности $\delta(a)$ пространств, натянутых над $\mathbb{Q}$ на числа $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a-2), \zeta(a)$, где a нечетно:

$$\delta(a) \geq \frac{\log a}{1 + \log 2} (1 + o(1)) \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (1)$$

В частности, из (1) следует бесконечность множества иррациональных чисел среди $\zeta(3), \zeta(5), \dots$. Обобщая конструкцию Ривоаля [2], мы доказываем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. В каждом числовом наборе

$$\begin{aligned} &\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \zeta(13), \zeta(15), \zeta(17), \zeta(19), \zeta(21)\}, \\ &\{\zeta(7), \zeta(9), \zeta(11), \dots, \zeta(35), \zeta(37)\}, \\ &\{\zeta(9), \zeta(11), \zeta(13), \dots, \zeta(51), \zeta(53)\} \end{aligned} \quad (2)$$

имеется по крайней мере одно иррациональное число.

ТЕОРЕМА 2. Существует нечетное число $a \leq 145$ такое, что числа $1, \zeta(3), \zeta(a)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Теорема 2 усиливает соответствующий результат работы [3]: $a \leq 145$ вместо $a \leq 169$.

ТЕОРЕМА 3. Для каждого нечетного $a \geq 3$ справедлива абсолютная оценка

$$\delta(a) > 0.395 \log a > \frac{2}{3} \cdot \frac{\log a}{1 + \log 2}.$$

Зафиксируем положительные нечетные параметры a, b, c , причем $a > b(c-1)$ и $c \geq 3$, и для каждого положительного n рассмотрим рациональную функцию

$$\begin{aligned} R(t) = R_n(t) &:= \frac{((t \pm (n+1)) \cdots (t \pm cn))^b}{(t(t \pm 1) \cdots (t \pm n))^a} \cdot (2n)!^{a+b-bc} \\ &= (-1)^n \left(\frac{\Gamma(\pm t + cn + 1)}{\Gamma(\pm t + n + 1)} \right)^b \cdot \left(\frac{\Gamma(t)\Gamma(1-t)}{\Gamma(\pm t + n + 1)} \right)^a \cdot (2n)!^{a+b-bc}, \end{aligned} \quad (3)$$

где знак ‘ $\pm$ ’ означает, что в соответствующем произведении появляются множители, отвечающие как знаку ‘+’, так и ‘−’. Представляя функцию (3) в виде суммы простейших дробей и используя ее нечетность и поведение при $t \rightarrow \infty$, заключаем, что

$$I = I_n := \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{(b-1)!} \frac{d^{b-1} R(t)}{dt^{b-1}} = \sum_{\substack{s \text{ нечетно} \\ b < s < a+b}} A_s \zeta(s) - A_0, \quad (4)$$

где коэффициенты $A_s = A_{s,n}$ линейной формы I – некоторые рациональные числа. (При $b = 1$, $c = 2r + 1$ мы получаем те же линейные формы (4), что и в работе [2].) Обозначим через D_n наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$; при этом, как хорошо известно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_n}{n} = 1.$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

ЛЕММА 1. Для каждого нечетного $c \geq 3$ существует последовательность целых $\Pi_n = \Pi_n^{(c)} \geq 1$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что числа $\Pi_n^{-b} D_{2n}^{a+b-1} A_{s,n}$ являются целыми и справедливо предельное соотношение

$$\varpi_c := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \Pi_n^{(c)}}{n} = - \sum_{l=1}^{(c-1)/2} \left(2\psi\left(\frac{2l}{c-1}\right) + 2\psi\left(\frac{2l}{c}\right) + \frac{2c-1}{l} \right) + 2(c-1)(1-\gamma), \quad (5)$$

где $\gamma \approx 0.57712$ – постоянная Эйлера, а $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции. (При $c \rightarrow \infty$ величина ϖ_c в (5) имеет порядок $2c(1-\gamma) + O(\log c)$.)

Лемма 1 усиливает соответствующие оценки знаменателей линейных форм (4) за счет появления множителя Π_n^{-b} даже в случае $b = 1$, рассмотренном в работе [2]. Это обстоятельство является ключевым при выводе теорем 2, 3.

Доказательство следующего утверждения опирается на представление форм (4) в виде контурных интегралов и применение метода перевала (ср. с [4], [5]). В случае $b > 1$ на параметры a, b, c накладываются дополнительные ограничения, которые оказываются автоматически выполненными в приложении к теореме 1.

ЛЕММА 2. Для линейных форм (4) справедливо предельное соотношение

$$\varkappa := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |I_n|}{n} = \log \frac{2^{2(a+b-bc)} |\tau_0 + c|^{bc} |\tau_0 - c|^{bc}}{|\tau_0 + 1|^{a+b} |\tau_0 - 1|^{a+b}}, \quad (6)$$

где τ_0 – вещественный корень многочлена $(\tau + c)^b (\tau - 1)^{a+b} - (\tau - c)^b (\tau + 1)^{a+b}$ из интервала $(c, +\infty)$ в случае $b = 1$ и один из пары комплексно-сопряженных корней с максимально возможной частью $\operatorname{Re} \tau_0$ в случае $b > 1$. (Для $b = 1$ верхний предел в (6) можно заменить на обычный, при этом величина $\varkappa$ в (6) не превосходит $(2a - c + 3) \log 2 - 2(a - c + 1) \log c$.)

Согласно леммам 1, 2 в случае $-b\varpi_c + 2(a + b - 1) + \varkappa < 0$ среди чисел $\zeta(s)$, где s нечетно и $b < s < a + b$, имеется по крайней мере одно иррациональное. Выбирая $a = 19, b = 3, c = 3$; $a = 33, b = 5, c = 3$ и $a = 47, b = 7, c = 3$ соответственно для каждого из наборов в (2), получаем теорему 1.

ЛЕММА 3. Для ненулевых коэффициентов $A_s = A_{s,n}$ линейных форм (4) справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A_{s,n}|}{n} \leq 2bc \log c + 2(a + b - bc) \log 2.$$

Теоремы 2, 3 выводятся из лемм 1–3 с помощью критерия линейной независимости из [6] так же, как и в [2]. Для доказательства теоремы 2 ($a = 145, b = 1$) мы выбираем $c = 21$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Apéry // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13. [2] T. Rivoal // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. IMath. 2000. V. 331. № 4. P. 267–270. [3] T. Rivoal // Rapport de recherche SDAD № 2000-9. Univ. Caen, 2000. [4] Ю. В. Нестеренко // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 865–880. [5] Т. Г. Хессами Пилеруд. Арифметические свойства значений гипергеометрических функций // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1999. [6] Ю. В. Нестеренко // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1985. № 1. С. 46–54.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Принято редколлегией
28.03.2001