Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Котов, О пуассоновых (ко)гомологиях $\mathbb{CP}^1$, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm39>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 14:28:32

О ПУАССОНОВЫХ (КО)ГОМОЛОГИЯХ $\mathbb{CP}^1$

А. Ю. Котов

1. Пусть M^m – гладкое многообразие с пуассоновой структурой, определенной бивекторным полем π . Оператор пуассонового дифференцирования $\delta: \Upsilon^*(M) \rightarrow \Upsilon^{*+1}(M)$, действует в пространстве поливекторных полей на M следующим образом:

$$\delta f = c(f), \quad \delta X = [[\pi, X]],$$

где $f \in C^\infty(M)$, $c(f) = df \perp \pi$, $X \in \Upsilon^*(M)$, а $[[\cdot, \cdot]]$ скобка Схоутена–Нийенхейса [1], [6].

Тождество Якоби для скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ эквивалентно условию $\delta^2 = 0$, которое выполняется при $[[\pi, \pi]] = 0$. Комплекс $(\Upsilon^*(M), \delta)$ называется пуассоновым комплексом, а его когомологии $H_\delta^*(M)$ – пуассоновыми когомологиями многообразия M^m [6].

Пусть K – компактная вещественная форма полупростой комплексной группы Ли G и $\mathcal{O}$ – орбита коприсоединенного действия в k^* . Рассмотрим $\mathcal{O}$ как пуассоново однородное пространство группы Пуассона–Ли K с пуассоновой структурой *Склянина–Дринфельда*, определенной на K следующим образом:

$$\{f_1, f_2\} = \{f_1, f_2\}_L - \{f_1, f_2\}_R = \langle (\rho_L^{\otimes 2} - \rho_R^{\otimes 2})(r), df_1 \otimes df_2 \rangle,$$

где ρ_R (ρ_L) – представление соответствующей алгебры Ли g в пространстве $C^\infty(M)$ лево- (право-) инвариантными векторными полями.

Собственную структуру на $\mathcal{O}$, полученную при помощи пуассоновой редукции, называют также структурой Склянина–Дринфельда (или Брюа–Пуассона, [7]) и обозначают $\{\cdot, \cdot\}_{SD}$. Скобки Кириллова–Костанта–Сурьо и Склянина–Дринфельда образуют пуассонову пару тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}$ – эрмитово симметрическое пространство [4].

Пуассоновы когомологии являются важным инвариантом пуассоновой структуры, характеризующим многообразие ее формальных деформаций. В частности, $H_\delta^1(M)$ может быть отождествлено с касательным пространством к пространству модулей формальных деформаций пуассоновой структуры. Другое приложение пуассоновых когомологий рассматривалось в контексте геометрического квантования [5], [8].

Ниже описываются пуассоновы когомологии на $\mathbb{CP}^1$.

2. Напомним [4], [5], что структура Склянина–Дринфельда на $\mathbb{CP}^1$ записывается следующим образом: $\pi = -\frac{i}{2}(1 + z\bar{z})z\bar{z}\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, где $z, \bar{z}$ – локальные координаты на старшей клетке Шуберта.

В этих же координатах скобка Кириллова–Костанта–Сурьо имеет вид

$$\pi_{KKS} = -\frac{i}{2}(z\bar{z} + 1)^2 \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Следовательно, их линейная комбинация в координатах $z, \bar{z}$ записывается как

$$(1) \quad \pi_\lambda = -\frac{i}{2}(z\bar{z} + 1)(\lambda + (\lambda + 2)z\bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пуассоновы когомологии пуассоновой структуры (1) для всех параметров $\lambda \in [-2, 0]$ имеют вид

$$(2) \quad H_\delta^0(\mathbb{CP}^1) \cong H_\delta^1(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{C}, \quad H_\delta^2(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{C}^2.$$

Кроме того, одномерный класс когомологий представляется генератором действия максимального тора. Классы когомологий бивекторных полей π_{SD} и π_{KKS} образуют базис $H_\delta^2(\mathbb{CP}^1)$.

Когомологии в случае $\lambda = 0$ совпадают с результатом сформулированным в [2].

3. Теперь обсудим пуассоновы гомологии. Известно, что для каждой пуассоновой структуры определен нильпотентный оператор дифференцирования δ^* степени -1 , действующий на разложимых формах следующим образом [1]:

$$(3) \quad \delta^*(f_0 df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_n) = \sum_{i=1, n} (-1)^{i+1} \{f_0, f_i\} df_1 \wedge \cdots \wedge \hat{df}_i \wedge \cdots \wedge df_n \\ - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f_0 d\{f_i, f_j\} \wedge \cdots \wedge \hat{df}_i \wedge \cdots \wedge \hat{df}_j \wedge \cdots \wedge df_n.$$

Рассмотрим формальный в нуле комплекс, гомологии которого обозначим H^{δ^*} .

Так как $\delta^*(a(z, \bar{z}) dz + b(z, \bar{z}) d\bar{z}) = -\frac{i}{2}(i + z\bar{z})z\bar{z} \left(-\frac{\partial a}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial b}{\partial z}\right)$, то легко проверить, что

$$C[[z, \bar{z}]] = (C[[z]] \oplus C[[\bar{z}]]) \oplus \delta^* \Omega^1.$$

Отсюда $H_0^{\delta^*}(\Omega^*) \cong C[[z]] \oplus C[[\bar{z}]]$.

Аналогично,

$$\delta^*(f(z, \bar{z}) dz \wedge d\bar{z}) = \frac{i}{2}(1 + z\bar{z})z\bar{z} df(z, \bar{z}) + f(z, \bar{z}) d\left(\frac{i}{2}(1 + z\bar{z})z\bar{z}\right) = \frac{i}{2}d(f(z, \bar{z})(1 + z\bar{z})z\bar{z})$$

и

$$H_1^{\delta^*}(\Omega^*) = \frac{dC[[z, \bar{z}]]}{d(z, \bar{z})C[[z, \bar{z}]]} \cong \{f \in C[[z]] \oplus C[[\bar{z}]], f(0) = 0\}.$$

Так же несложно показать, что $Z_2^{\delta^*}(\Omega^*) \cong H_2^{\delta^*}(\Omega^*) = 0$.

Таким образом, в отличие от пуассоновых когомологий, пуассоновы гомологии степени 0 и 1 бесконечномерны. Аналогичный факт был отмечен в [3].

Автор признателен В. Н. Рубцову и Б. Ю. Стернину за полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Brylinski J.-L. // J. Diff. Geom. 1988. V. 28. P. 93–114. [2] Ginzburg V. Momentum mappings and Poisson cohomology. Preprint. Berkeley, 1995. [3] Guichardet A. Sur une algèbre Q -symétrique. Prepubl. CMAT Ecole Polytechnique, 1995. [4] Khoroshkin S., Radul A., Rubtsov V. // CMP. 1993. V. 152. P. 299–315. [5] Kotov A. On geometric quantization of R -matrix type Poisson brackets. Preprint UUITP-09/95, q-alg/9512021, 1995. [6] Lichnerovitch A. // J. Diff. Geom. 1977. V. 12. P. 253–300. [7] Lu J. H., Weinstein A. // J. Diff. Geom. 1990. V. 31. P. 501–526. [8] Vaisman I. // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 12. P. 3339–3345.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Независимый Московский университет,
Институт теоретической и экспериментальной физики
E-mail: kotov@vitep5.iter.ru

Принято редколлегией
10.04.1997