Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Разделенные разности для симметрических функций и альтернированные высшие порядки Брюа, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm390>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:47:05

РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И АЛЬТЕРНИРОВАННЫЕ ВЫСШИЕ ПОРЯДКИ БРЮА

Г. Г. Ильяута

Элементы высших порядков Брюа [1] кодируют компоненты связности в пространстве невырожденных конфигураций точек из $\mathbb{R}^2$ [2]. Дискриминантная гиперповерхность определяется с помощью интерполяции Лагранжа. В [3] интерполяционная формула Лагранжа обобщена для симметрических функций. Ниже для симметрических функций приводятся обобщенные формулы для разделенных разностей, подсказывающие определение обобщенных высших порядков Брюа (будем называть их альтернированными по причине их тесной связи с альтернированными ориентированными матроидами), элементы которых кодируют компоненты связности соответствующего пространства конфигураций. Теорию ориентированных матроидов можно рассматривать как комбинаторную теорию детерминантных тождеств, и с этой точки зрения приведенное обобщение описывается формулой для произведения максимальных миноров прямоугольной матрицы [4]. С точки зрения матроидов невырожденные конфигурации из [2] – это регулярные поднятия альтернированного ориентированного матроида [5; с. 62]. Над $\mathbb{C}$ приведенная конструкция приводит к обобщению дискриминантных конфигураций Манина–Шехтмана и к обобщенным группам кос (фундаментальная группа дополнения к дискриминантной конфигурации).

1. Обобщенная формула Лагранжа [3]. Пусть f – симметрический полином от переменных $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$, степень по каждой из которых не превосходит $n - r$. Пространство P_n всех таких полиномов имеет базис, состоящий из мономиальных симметрических полиномов $\varphi_{0, \dots, 0} = 1, \varphi_{1, 0, \dots, 0} = \sum y_i, \dots, \varphi_{n-r, \dots, n-r} = y_1^{n-r} \dots y_r^{n-r}$. Через $C(n, r)$ обозначим множество r -элементных подмножеств в $\overline{n} = \{1, \dots, n\}$, $I = \{i_1, \dots, i_r\} \in C(n, r)$.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{C}, x_i \neq x_j$ для $i \neq j$. Тогда

$$f(y_1, \dots, y_r) = \sum_{I \in C(n, r)} f(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \prod_{y \in Y, j \in \overline{n} \setminus I} (y - x_j) / \prod_{i \in I, j \in \overline{n} \setminus I} (x_i - x_j). \quad (1)$$

2. Формулы для разделенных разностей. Обозначения: $f(Y)$ – аналитическая симметрическая функция, $V_1(X) = \prod_{i > j} (x_i - x_j)$, $F(Y) = -V_1^2(Y)f(Y)$ (для $r = 1, F = f$), $\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, C_i – простой контур на комплексной прямой с координатой y_i , охватывающий X . Сопоставим функции f интерполяционный полином вида (1) и назовем разделенной разностью для f по переменным Y в точках из X (обозначение: $\Delta_X^Y(f)$) коэффициент при $\varphi_{n-r, \dots, n-r}$ в этом полиноме. В формулах (4), (5) ниже предполагается, что $X \subset \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любых различных $x_{i_1}, \dots, x_{i_{r+1}} \in X$

$$\Delta_X^Y(f) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^r \frac{1}{r!} \int_{C_1} \dots \int_{C_r} \frac{F(y_1, \dots, y_r)}{\omega(y_1) \dots \omega(y_r)} dy_1 \dots dy_r \quad (2)$$

$$= \Delta_X^{y_1} \circ \dots \circ \Delta_X^{y_r}(F) = \det \begin{vmatrix} \Delta_{X \setminus x_{i_1}}^Y & x_{i_1}^{r-1} & \dots & x_{i_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{X \setminus x_{i_{r+1}}}^Y & x_{i_{r+1}}^{r-1} & \dots & x_{i_{r+1}} & 1 \end{vmatrix} [V_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_{r+1}})]^{-1} \quad (3)$$

$$= \int_{T_1} \dots \int_{T_r} \frac{\partial^{r(n-1)} F}{\partial y_1^{n-1} \dots \partial y_r^{n-1}} (t_1^1 x_1 + \dots + t_n^1 x_n, \dots, t_1^r x_1 + \dots + t_n^r x_n) dt_2^1 \dots dt_n^r \quad (4)$$

$$= \frac{1}{((n-1)!)^r} \frac{\partial^{r(n-1)} F(y_1, \dots, y_r)}{\partial y_1^{n-1} \dots \partial y_r^{n-1}} \Big|_{y_1 = \xi_1, \dots, y_r = \xi_r}. \quad (5)$$

Здесь $T_i = \{(t_1^i, \dots, t_n^i) : \sum t_j^i = 1, t_j^i \geq 0\}$, $\xi_1, \dots, \xi_r \in [\min x_i, \max x_i]$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Поскольку вычет формы

$$\Omega = \frac{F(y_1, \dots, y_r)}{\omega(y_1) \cdots \omega(y_r)} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_r$$

в точке $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ равен $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) / \prod (x_i - x_j), i \in I, j \in \bar{n} \setminus I$, если x_{i_j} различны, и равен 0, если среди них есть совпадающие, то сумма вычетов формы $\Omega/r!$ во всех решениях системы $\omega(y_1) = \cdots = \omega(y_r) = 0$ равна $\Delta_X^Y(f)$. Поэтому глобальная теорема о вычетах представляет $\Delta_X^Y(f)$ в виде интеграла от образа формы $\Omega/r!$ при изоморфизме Дольбо [6; гл. 5].

2) Формула (2) позволяет определить Δ_X^Y для кратных узлов интерполяции.

3) Формула (3) представляет Δ_X^Y в виде композиции обычных разделенных разностей. Это позволяет обобщить и другие формулы, например, интерполяционную формулу Ньютона и формулы для разделенных разностей произведения и композиции функций [7].

4) В теории многообразий Шуберта и специальных функций большую роль играет оператор симметризации по транспозиции $\pi_2: (y_1, y_2) \mapsto (y_2, y_1)$

$$\partial_{\pi_2} f(y_1, y_2) = \frac{f(y_1, y_2) - f(y_2, y_1)}{y_2 - y_1}.$$

Формула (3) в этом контексте отвечает симметризации по $(r+1)$ -циклу $\pi_{r+1}: (y_1, \dots, y_{r+1}) \mapsto (y_2, \dots, y_{r+1}, y_1)$.

3. Определитель Вандермонда для симметрических функций. Поиск коэффициентов при $\varphi_{m_1, \dots, m_r}$ в интерполяционном полиноме можно рассматривать как решение линейной системы: подставляем все $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ в полином и получаем C_n^r уравнений на коэффициенты. Обозначим через $V_r(x_1, \dots, x_n)$ определитель этой системы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

$$V_r(x_1, \dots, x_n) = (V_1(x_1, \dots, x_n))^{C_{n-2}^{r-1}}. \quad (6)$$

4. Альтернированные высшие порядки Брюа. Отображение $\varepsilon: C(m, n+1) \rightarrow \{-1, 1\}$ назовем r -допустимым, если для любого $p \in C(m, n+2)$ и любых $i_1, \dots, i_{r+2} \in p, i_1 < \dots < i_{r+2}, \{p \setminus i_1, p \setminus i_3, \dots\} \neq \varepsilon^{-1}(1) \cap \{p \setminus i_1, p \setminus i_2, \dots\} \neq \{p \setminus i_2, p \setminus i_4, \dots\}$. Множество r -допустимых отображений назовем альтернированным высшим порядком Брюа $B(m, n, r)$ (частичный порядок вводится аналогично [8]).

5. Пространство конфигураций. Набор $E = \{E_I = (y_{i_1, \dots, i_r}, x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \in \mathbb{R}^{r+1}, I \in C(m, r), y_{i_1, \dots, i_r} \text{ симметричны по индексам}\}$ назовем n -общим, если для любого $d \in C(m, n+1)$ точки $E_I, I \subset d$, не лежат на графике полинома из P_{n+1} степени меньше $(n-r+1)r$, т.е. коэффициент Δ_d^Y при $y_1^{n-r+1} \cdots y_r^{n-r+1}$ в соответствующем интерполяционном полиноме не равен 0. Определим $\varepsilon_E: C(m, n+1) \rightarrow \{-1, 1\}$ по формуле $\varepsilon_E(d) = \text{sign } \Delta_d^Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого n -общего набора E отображение ε_E r -допустимо, т.е. определяет элемент $B(m, n, r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (3) следует, что векторы $(\Delta_{d \setminus i}^Y, x_i^{r-1}, \dots, x_i, 1), i \in d$, определяют альтернированный ориентированный матроид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Manin, V. Schechtman // Adv. Stud. Pure Math. 1985. V. 44. P. 289–308. [2] Г. Г. Ильята // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 91–100. [3] W. Chen, J. Louck // Adv. Math. 1996. V. 117. P. 147–156. [4] B. Sturmfels, A. Zelevinsky // Adv. Math. 1993. V. 98. P. 65–112. [5] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. M. Ziegler. Oriented Matroids. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. [6] Ф. Гриффитс, Д. Харрис. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982. [7] L. Verde-Star // Stud. Appl. Math. 1991. V. 85. P. 215–242. [8] G. Ziegler // Topology. 1993. V. 32. P. 259–279.