Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Мелихов, Р. В. Михайлов, Зацепления по модулю узлов и Проблема изотопической реализации, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 219–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm391>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 10:16:24

ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПО МОДУЛЮ УЗЛОВ И ПРОБЛЕМА ИЗОТОПИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

С. А. МЕЛИХОВ, Р. В. МИХАЙЛОВ

Пусть f – непрерывное отображение компактного полиэдра X в многообразие Q . Следует ли из *дискретной реализуемости*, т.е. ε -аппроксимируемости вложениями $\forall \varepsilon > 0$, отображения f его *изотопическая реализуемость*, т.е. существование псевдоизотопии $H_t: Q \rightarrow Q$, $t \in I = [0, 1]$ (т.е. гомотопии, при $t < 1$ осуществляющей гомеоморфизм), переводящей на f некоторое вложение $g: X \hookrightarrow Q$ (т.е. $H_0 = \text{id}$ и $H_1 g = f$)? Этот вопрос, восходящий к Проблеме Л. В. Келдыш (1966 г.) о реализации дико вложенных полиэдров псевдоизотопией подполиэдров, был поставлен Е. В. Щепиным в 1993 г. и известен как *Проблема изотопической реализации* [1]–[3]. Изначально основное внимание было приковано к случаю отображений высокой коразмерности [1], и наконец был найден контрпример [2]. В [3] построены дискретно, но не изотопически реализуемые отображения $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 3$, с сингулярным множеством $\{\text{точка}\} \sqcup (p\text{-адический соленоид})$, $p \geq 3$. Отметим, что при $m - n \geq 3$ дискретно реализуемое отображение n -полиэдра в $\text{PL-}m$ -многообразии реализуемо изотопически, если оно является композицией PL -отображения и TOP -вложения [2], а при $m > \frac{3(n+1)}{2}$ – если и только если обнуляется когомологическое препятствие, лежащее, по сути, в “зазоре” между гомологиями Александрова–Чеха и Стинрода–Ситникова [2], [3], в частности, при $m = 2n + 1$, $n > 1$ [2].

Совсем иная ситуация наблюдается в классической размерности. С одной стороны, известно не реализуемое изотопически отображение $w: I \sqcup I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (с образом, состоящим из двух диких дуг Уайльдера, пересекающихся в единственной точке и “локально зацепленных” в ней) [2]; по общему положению оно дискретно реализуемо. Однако неясно, насколько типичным является этот пример, в частности, можно ли в нем заменить дикие дуги на ручные, подставив вместо зацепленных пар трилистников (на дугах Уайльдера) зацепления Уайтхеда или другие зацепления с незаузленными компонентами. Более общо, существует ли локально-плоское топологическое погружение, реализуемое дискретно, но не изотопически [2; Question I]?

Назовем PL -отображение $f: S_1^1 \sqcup S_2^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *k -квазилинком*, $k = 1, 2, \dots, \omega$, если для любого $i = 1, 2$, для любой двойной точки $p \in f(S_i^1)$ найдутся замкнутые PL -3-шары $B_1 \subset \dots \subset B_k \subset \mathbb{R}^3 \setminus f(S_{3-i}^1)$ такие, что каждый B_{j+1} содержит f -образ некоторой дуги окружности S_i^1 , содержащей $f^{-1}(B_j)$, где $B_0 = \{p\}$ (ср. с трюком Пенроуза–Уайтхеда–Зимана–Ирвина [4]). Два зацепления $S^1 \sqcup S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ *k -квазиизотопны*, если они гомотопны в классе k -квазилинков. Очевидно, 0-квазиизотопия совпадает с гомотопией (в смысле Милнора [5]), и можно показать, что ω -квазиизотопия совпадает с (не локально-плоской) PL -изотопией. Можно проверить, что инварианты Васильева (как в обычном смысле, так и в смысле [6]) порядка $\leq k$, инвариантные при PL -изотопии, $\bar{\mu}$ -инварианты Милнора длины $\leq 2k + 3$ и инварианты Кохрана β^i , $i \leq k$, инвариантны при k -квазиизотопии, причем последние два неравенства точны.

Ясно, что при $k < \omega$ любые два зацепления, достаточно близкие к двум TOP -вложениям $S^1 \sqcup S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, гомотопны в классе вложений, k -квазиизотопны. Поэтому как только для некоторого $k < \omega$ построен инвариант $\mathcal{J}$ отношения k -квазиизотопии со значениями в неотрицательных целых числах $\mathbb{Z}^+$ такой, что $\mathcal{J}(l_1 \# l_2 \# \dots \# l_n \# m_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ для некоторых зацеплений $l_1, l_2, \dots$ с незаузленными компонентами и произвольных $m_1, m_2, \dots$, немедленно доказана изотопическая нереализуемость отображения $I \sqcup I \rightarrow \mathbb{R}^3$, составленного из $l_1, l_2, \dots$ и тем самым являющегося локально-плоским TOP -погружением. Возникает следующая

ПРОБЛЕМА. *Существует ли ненулевой инвариант $\mathcal{J}$ отношения k -квазиизотопии, $k < \omega$, со значениями в $\mathbb{Z}^+$, такой, что $\mathcal{J}(l \# m) \geq \mathcal{J}(l) + \mathcal{J}(m)$ для любых l, m ?*

При $k = \omega$ примером такого инварианта является, очевидно, $\alpha(l)$ – количество простых узлов в разложении первой компоненты l , гомотопически не зацепленных со второй (т.е. таких p ,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00009) и Латвийского совета по науке (грант № 01.0282).

что эпиморфизм коммутирования $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus l(S_1^1)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus p(S^1))$ отправляет в 1 класс сопряженности, отвечающий второй компоненте); инвариант α был использован в доказательстве изотопической нереализуемости отображения w [2]. С другой стороны, мы сейчас покажем, что при $k < \omega$ такой инвариант нельзя извлечь из инвариантной при k -квазиизотопии факторгруппы фундаментальной группы $\pi = \pi(l) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus l(S^1 \sqcup S^1))$ зацепления l по подгруппе $\nu_k \pi = \prod_{g \in \pi} [g, [g, \dots [g, \pi] \dots]]$ (здесь $k + 2$ пары скобок), совпадающей [8; лемма 2] с подгруппой $\prod_{g \in \pi} [g, g_{k+1}^\pi]$, где $g_{k+1}^\pi = \langle g^h \mid h \in g_k^\pi \rangle$, и $g_0^\pi = \pi$. Точнее, это будет установлено даже для меньшей подгруппы $\widehat{\nu}_k \pi = (\nu_{k-1} a_1^\pi)(\nu_{k-1} b_1^\pi)$, где a, b – фиксированные меридианы компонент.

ТЕОРЕМА 1. $\forall k < \omega$ для любого l найдется такое l' , что $\pi(l \# l') / \widehat{\nu}_k \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \widehat{\nu}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [8; теорема 1] факторгруппа по ν_k при $k < \omega$ является нильгруппой в смысле Бэра [9], значит, будучи конечнопорожденной, нильпотентна [9]. Для любого l группа $\pi = \pi(l)$ порождается своими подгруппами a_1^π и b_1^π [5; Lemma 4], следовательно, по теореме Хирша–Плоткина факторгруппа $\pi / \widehat{\nu}_k \pi$ нильпотентна. Но так как связанная сумма l с зеркальным зацеплением l' конкордантна тривиальному t , в силу теоремы Столлинга (см. [10]) нильпотентная факторгруппа $\pi(l \# l') / \widehat{\nu}_k$ изоморфна $\pi(t) / \widehat{\nu}_k$.

Проверяется непосредственно, что k -квазиизотопическим инвариантом является в действительности факторгруппа по еще меньшей подгруппе $\mu_k \pi = \langle [a, a^g], [b, b^h] \mid g \in a_k^\pi, h \in b_k^\pi \rangle^\pi$. Хотя различие между ν_k , $\widehat{\nu}_k$ и μ_k весьма тонко (так, $\widehat{\nu}_0 = \mu_0$, причем π / μ_0 – группа Милнора $\mathcal{G}(l)$, инвариантная при гомотопии [5]), для факторгруппы по μ_k , $k > 0$, доказательство теоремы 1 не проходит.

Однако поскольку π / μ_k порождается $(k + 2)$ -энгелевыми элементами, с учетом известных результатов Р. Бэра, К. В. Грюнберга и Б. И. Плотника получается

ТЕОРЕМА 2. Конечный или разрешимый эпиморфный образ всякой группы $\pi(l) / \mu_k$, где $k < \omega$, нильпотентен.

Тем самым из указанного эпиморфного образа требуемый инвариант извлечь тоже нельзя. Используя базис Холла, можно показать, что в случае 2-порожденной π группа π / μ_1 сама нильпотентна. С помощью обобщенного инварианта Сато–Левина [6], [10] отсюда выводится

ТЕОРЕМА 3. Группа π / μ_1 не является полным инвариантом 1-квазиизотопии.

Авторы выражают благодарность П. М. Ахметьеву и А. Ю. Ольшанскому за ценные замечания и А. С. Гертовскому, У. Кошорке, Й. Малешичу, В. М. Нежинскому, Р. Р. Садыкову, Е. Г. Скляренко и А. Б. Скопенкову за стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. М. Ахметьев // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 7. С. 3–34. [2] S. A. Melikhov. On maps with unstable singularities // Topology Appl. (to appear). [3] П. М. Ахметьев, С. А. Мелихов // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2000. Т. 267. С. 53–87. [4] E. C. Zeeman // Topology of 3-Manifolds and Related Topics. Proceedings of the University of Georgia Institute 1961 / ed. M. K. Fort, Jr. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1962. P. 187–194. [5] J. W. Milnor // Ann. of Math. 1954. V. 59. P. 177–195. [6] M. C. Irwin // Ann. Math. 1965. V. 82. P. 1–14. [7] Чан Ван Хао. // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5. № 2. С. 459–464. [8] R. Baer // Math. Z. 1955. V. 62. № 4. P. 402–437. [9] T. D. Cochran // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1985. V. 97. P. 465–472. [10] П. М. Ахметьев, Д. Реповш // Труды МИАН. 1998. Т. 221. С. 69–80.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Институт химической физики Латвийского университета

Принято редколлегией
01.02.2001