Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Плоские пучки метрик и интегрируемые редукции уравнений Ла-ме, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2, 221–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm392>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 10:24:42

**ПЛОСКИЕ ПУЧКИ МЕТРИК И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ
РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ**

О. И. Мохов

В заметке проинтегрированы уравнения, описывающие все неособые плоские пучки метрик. Напомним, что две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *согласованными*, если для любой линейной комбинации этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны тем же самым линейным соотношением: $\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u)$, $R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,kl}^{ij}(u)$ [1], [2]. В этом случае будем говорить также, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют *пучок метрик*. В случае, когда согласованные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ – плоские, т.е. $R_{1,kl}^{ij}(u) = R_{2,kl}^{ij}(u) = 0$, произвольная линейная комбинация метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ тоже является плоской метрикой, и легко видеть, что согласованность плоских метрик эквивалентна известному определению плоского пучка метрик или, другими словами, согласованной пары локальных невырожденных пуассоновых структур гидродинамического типа [3] (см. также [4]–[6], [8]). Две псевдоримановы метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *неособой парой метрик*, если собственные значения этой пары метрик, т.е. корни уравнения $\det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0$, различны. Пучок метрик называется *неособым*, если он образован неособой парой метрик. Произвольная неособая пара метрик является согласованной тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ такие, что $g_2^{ij}(u) = g^i(u) g^{ij}(u)$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i) g^i(u) \delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, – произвольные функции одной переменной (см. [1], [2]). Введем классические обозначения $g^i(u) = 1/(H_i(u))^2$, $ds^2 = \sum_{i=1}^N (H_i(u))^2 (du^i)^2$, $\beta_{ik}(u) = (1/H_i(u)) \partial H_k / \partial u^i$, $i \neq k$, где $H_i(u)$ – коэффициенты Ламе и $\beta_{ik}(u)$ – коэффициенты вращения.

ТЕОРЕМА [1]. *Произвольная неособая пара согласованных плоских метрик описывается следующей интегрируемой системой нелинейных уравнений, которая является редукцией уравнений Ламе:*

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \beta_{si} \beta_{sj} = 0, \quad i \neq j, \quad (2)$$

$$f^i(u^i) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{1}{2} (f^i(u^i))' \beta_{ij} + f^j(u^j) \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \frac{1}{2} (f^j(u^j))' \beta_{ji} + \sum_{s \neq i, s \neq j} f^s(u^s) \beta_{si} \beta_{sj} = 0, \quad i \neq j, \quad (3)$$

где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, – заданные произвольные функции (собственные значения данной пары метрик).

Уравнения (1) и (2) – классические уравнения Ламе, а уравнения (3) определяют нетривиальные нелинейные дифференциальные редукции уравнений Ламе. Напомним метод Захарова интегрирования уравнений Ламе (1) и (2) (вариант метода обратной задачи рассеяния) [7]. Мы должны подобрать матричную функцию $F_{ij}(s, s', u)$ и решить линейное интегральное уравнение

$$K_{ij}(s, s', u) = F_{ij}(s, s', u) + \int_s^\infty \sum_l K_{il}(s, q, u) F_{lj}(q, s', u) dq. \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также РФФИ (грант № 99-01-00010) и INTAS (грант № 99-1782).

Однопараметрическое семейство решений уравнений Ламе задается формулой

$$\beta_{ij}(s, u) = K_{ji}(s, s, u). \quad (5)$$

В частности, если $F_{ij}(s, s', u) = F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, где $F_{ij}(x, y)$ – произвольная матричная функция двух переменных, то формула (5) дает решения уравнений (1). Чтобы удовлетворить уравнения (2), Захаров предложил наложить на функцию $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ дополнительное линейное дифференциальное соотношение

$$\partial F_{ij}(s, s', u)/\partial s' + \partial F_{ji}(s', s, u)/\partial s = 0. \quad (6)$$

Если функция $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ удовлетворяет дифференциальному соотношению Захарова (6), то коэффициенты вращения $\beta_{ij}(s, u)$ (5) дополнительно удовлетворяют уравнениям (2). Чтобы разрешить линейные соотношения (6) для матричной функции $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, можно ввести $N(N - 1)/2$ произвольных функций двух переменных $\Phi_{ij}(x, y)$, $i < j$, и положить для $i < j$

$$F_{ij}(s - u^i, s' - u^j) = \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s}, \quad F_{ji}(s - u^i, s' - u^j) = -\frac{\partial \Phi_{ij}(s' - u^i, s - u^j)}{\partial s}, \quad (7)$$

и, кроме того,

$$F_{ii}(s - u^i, s' - u^i) = \partial \Phi_{ii}(s - u^i, s' - u^i)/\partial s, \quad (8)$$

где $\Phi_{ii}(x, y)$, $i = 1, \dots, N$, – произвольные кососимметрические функции двух переменных: $\Phi_{ii}(x, y) = -\Phi_{ii}(y, x)$ (см. [7]).

ЛЕММА. Если две матричные функции, $F_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ и

$$\tilde{F}_{ij}(s - u^i, s' - u^j) = \left(\sqrt{f^j(u^j - s')} / \sqrt{f^i(u^i - s)} \right) F_{ij}(s - u^i, s' - u^j), \quad (9)$$

обе удовлетворяют дифференциальному соотношению Захарова (6), то соответствующие коэффициенты вращения $\beta_{ij}(s, u)$ (5) удовлетворяют всем уравнениям (1)–(3).

Для $\tilde{F}_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$ соотношение (6) дает $N(N + 1)/2$ линейных уравнений в частных производных второго порядка для $N(N + 1)/2$ функций $\Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)$, $i \leq j$, двух переменных:

$$2 \frac{\partial^2 \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s \partial s'} (f^i(u^i - s) - f^j(u^j - s')) - \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s} \frac{df^j(u^j - s')}{ds'} + \frac{\partial \Phi_{ij}(s - u^i, s' - u^j)}{\partial s'} \frac{df^i(u^i - s)}{ds} = 0, \quad i \leq j. \quad (10)$$

Любые решения линейных уравнений (10) порождают однопараметрические семейства решений системы (1)–(3) по формулам (7), (8), (4) и (5). Таким образом, наша задача линеаризована.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. И. Mokhov // math.DG/0005081. [2] О. И. Мохов // УМН. 2000. Т. 55. № 4. С. 217–218. [3] В. Dubrovin // Lecture Notes in Math. 1996. V. 1620. P. 120–348; hep-th/9407018. [4] В. Dubrovin // Preprint SISSA 25/98/FM; math.DG/9803106. [5] Е. V. Ferapontov // Topics in Topology and Mathematical Physics / ed. S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 33–58. [6] О. И. Мохов // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 284–300. [7] V. E. Zakharov // Duke Math. J. 1998. V. 94. P. 103–139. [8] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.

Центр нелинейных исследований

при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН,
Department of Mathematics, University of Paderborn, Germany

E-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru; mokhov@uni-paderborn.de

Принято редколлегией

01.02.2001