Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Кряжимский, О работах Ю. С. Осипова по математической теории управления, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 5–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm3964>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:06:29

УДК 517.93

**О работах Ю. С. Осипова
по математической теории управления**

А. В. Кряжимский

В статье дается обзор работ Ю. С. Осипова в области математической теории управления, включающих развитие теории позиционных дифференциальных игр для управляемых систем с запаздывающим аргументом; исследование феномена бесконечномерности фазового пространства в контексте позиционного дифференциально-игрового формализма; создание теории динамического обращения (динамической регуляризации) для конечномерных и бесконечномерных управляемых систем; приложения методов теории позиционных дифференциальных игр за ее пределами; работа над новыми дифференциально-игровыми методами и методами управления в условиях неполной информации. Автор обзора – первый по времени ученик и многолетний коллега Ю. С. Осипова.

Библиография: 68 названий.

Юрий Сергеевич Осипов, президент РАН, долгие годы в кризисных обстоятельствах сохранявший, вместе с коллегами-единомышленниками, дух, цели и статус Российской академии наук, вышел из Уральской математической школы. В Уральском государственном университете он начинал свой путь в науку, в ИММ – Институте математики и механики Уральского отделения АН – формировал свои научные интересы, воплощал в жизнь крупные научные проекты, создавал свою научную школу. Его научное творчество протекало, в целом, в русле основной “уральской” тематики – управление динамическими системами. В шестидесятые-семидесятые годы стремительное развитие этой тематики на Урале было обязано, прежде всего, лидеру Уральской школы, Николаю Николаевичу Красовскому, учителю Юрия Сергеевича.

Мне довелось стать первым по времени учеником Юрия Сергеевича: в 1971 г. писал под его руководством дипломную работу, затем – его аспирант, более двадцати лет – сотрудник его отдела в ИММ; продолжаем сотрудничать и теперь. Вместе с другими учениками Юрия Сергеевича я наблюдал, как он работает в науке. Мы, его ученики, вольно или невольно перенимали его научный стиль.

Его первых аспирантов, меня в том числе, многому научила докторская диссертация Юрия Сергеевича – объемная, зачитанная машинописная рукопись в сером переплете, лежавшая на его столе для общего пользования. Диссертация, тогда уже защищенная Юрием Сергеевичем, выстраивала совершенно новую тогда теорию дифференциальных игр для управляемых систем с запаздывающим аргументом. К тому времени за плечами Юрия Сергеевича были

признанные работы в области устойчивости и стабилизации систем с запаздыванием. Дифференциально-игровая тематика, во многом определившая лицо Уральской школы по теории управления, находилась у истоков своего развития. Но уже открывались, несомненно, захватывающие горизонты, и Юрий Сергеевич, в самом конце шестидесятых, переключился на новейшую, перспективную тематику.

Несмотря на ясно ощущаемые перспективы, трудности, стоявшие на выбранном им пути, были велики, более того, принципиальны. Имевшийся теоретический задел, созданный незадолго до того Н. Н. Красовским, позволял планировать общую логику исследования и прогнозировать – в качестве гипотез – некоторые этапные результаты. Но для прорыва в это новое пространство требовался “ключ” – особый методологический элемент, который позволял бы воплотить планируемую логику исследования в пределах нового, более общего, класса динамических систем. Таким “ключом” должен был стать принцип экстремального сдвига для систем с запаздывающим аргументом; Юрию Сергеевичу предстояло его открыть.

Принцип экстремального сдвига – один из центральных элементов созданной на Урале теории позиционных дифференциальных игр. Выдвинутый Н. Н. Красовским в конце шестидесятых, принцип экстремального сдвига составил основу нового, позиционного, дифференциально-игрового формализма, ознаменовавшего собой решающий сдвиг в понимании механизмов управления с обратной связью. Ко времени начала работы Юрия Сергеевича над докторской диссертацией позиционный дифференциально-игровой формализм – формализм Красовского – был, в главных своих элементах, реализован для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этот прорывной теоретический задел и задавал общую логику исследования, предпринятого Юрием Сергеевичем.

Дифференциальная игра (речь идет о так называемых антагонистических дифференциальных играх) – это математическая модель конфликта двух лиц – игроков, преследующих противоположные цели в процессе совместного управления динамической системой. Такой конфликт часто изображают как стремление одного игрока минимизировать, а другого – максимизировать тот или иной целевой функционал, определенный на движениях системы. Возможны иные варианты конфликта: один игрок может стремиться к наведению системы на выделенное целевое множество, другой – препятствовать этому. В первом случае обычно говорят о дифференциальной игре на минимакс-максимин целевого функционала, во втором – о дифференциальной игре наведения-уклонения. Средствами разрешения конфликта выступают выбираемые игроками способы управления – стратегии.

Стратегия игрока – это правило, руководствуясь которым данный игрок в каждый момент времени выбирает значение своего управляющего параметра; выбранное значение непосредственно влияет на текущую скорость системы. Для классического случая, когда управляемая система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, интуитивно было понятно, что такие правила, в общем, исчерпываются так называемыми обратными связями: текущие значения управляющего параметра достаточно строить в виде функций от текущих позиций системы – ее положений в пространстве-времени. Такое

понимание естественно соотносится с основным свойством динамики: будущее движение динамической системы определяется ее текущим положением. Знаменитая монография Р. Айзекса “Дифференциальные игры” сразу же трактовала дифференциальную игру как столкновение обратных связей. Построение же адекватного строгого формализма управления по принципу обратной связи составляло серьезную проблему.

Ограничение обратных связей функциями, непрерывными по состоянию (по текущим пространственным координатам системы), автоматически снимало вопрос о существовании соответствующих движений системы, но, как показывали примеры, сильно сужало потенциальные возможности управления: класс непрерывных по состоянию обратных связей не являлся исчерпывающим. Допущение же разрывных по состоянию обратных связей наталкивалось, в общем случае, на вопрос фундаментального порядка: как корректно определить порождаемые такими обратными связями движения системы. Естественный способ “замыкания” системы по разрывным обратным связям – их непосредственная подстановка в исходное, “открытое”, уравнение системы – приводил к обыкновенному дифференциальному уравнению с разрывной по фазовой переменной правой частью, которое в общем случае не имеет решений. В то же время, как раз эти решения должны были бы служить движениями системы, генерируемыми рассматриваемыми обратными связями.

В некоторых случаях, предполагающих, в частности, линейность уравнений системы, проблема разрешалась введением многозначных обратных связей, расположенных в определенном смысле “между” функциями, непрерывными и разрывными по состоянию. Эти выпукло- и замкнутозначные полунепрерывные снизу обратные связи (полунепрерывность – своего рода “компромисс” между непрерывностью и разрывностью), будучи подставлены в уравнение системы, “замыкают” его до дифференциального уравнения с многозначной правой частью – дифференциального включения, заведомо имеющего решение; последнее и принимается за порождаемое данными обратными связями движение системы. В общем случае, подразумеваемом, в том числе, нелинейность уравнения системы, подобный прием уже не приводит к успеху.

Для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, окончательное разрешение проблемы доставил формализм Красовского. Этот формализм, допуская произвольные, сколь угодно разрывные обратные связи, предлагает пользоваться ими по принципу ломаных Эйлера: подставляемые в “открытое” уравнение значения управлений корректируются лишь в отдельные моменты времени, следующие друг за другом с некоторым шагом. Тем самым указывается чрезвычайно простой, “инженерный”, и одновременно корректный механизм формирования движений в отсутствие каких бы то ни было ограничений на обратные связи. При устремлении расстояний между моментами корректировки к нулю обратная связь все чаще реагирует на текущую позицию. Соответствующий предел ломаных Эйлера доставляет “идеальное” движение, отвечающее тому представлению, что обратная связь работает в каждый момент времени.

Экстремальный сдвиг – это конкретное правило управления по позиции, позволяющее, прежде всего, установить исчерпывающий характер класса обратных связей в формализме Красовского. Для случая дифференциальной игры

наведения-уклонения соответствующий результат известен как теорема об альтернативе. Эта теорема (в приближенном изложении) гласит, что для произвольной начальной позиции игры верно одно из двух: либо игрок, заинтересованный в наведении системы на целевое множество, имеет обратную связь, гарантирующую ему это наведение (в терминах предельных движений) при любых действиях противника, либо игрок, заинтересованный в уклонении системы от целевого множества, имеет обратную связь, гарантирующую ему это уклонение (в терминах предельных движений) также при произвольных действиях противника. Таким образом, если у наводящего игрока имеется какой-либо мыслимый физически реализуемый способ управления, обеспечивающий ему желаемое наведение, то этим же свойством с необходимостью обладает и некоторая обратная связь; аналогичное заключение справедливо в отношении уклоняющегося игрока. Эти заключения говорят об исчерпывающем характере (неулучшаемости) обратных связей.

Принцип экстремального сдвига – ключевой элемент доказательства теоремы об альтернативе: с его помощью конструируются обозначаемые теоремой обратные связи. Суть экстремального сдвига – в избавлении от “лишнего” знания о противнике. “Лишнее” знание – это информация об управлении противника, которое применяется им в некотором локальном будущем. Такая информация, в самом деле, “лишняя”: предположение о ее доступности не может считаться (за редкими исключениями) реалистичным. С другой стороны, для той искусственной, асимметричной, ситуации, когда игрок, заинтересованный в наведении системы на целевое множество, все же обладает “лишним” знанием о противнике, в то время как другой игрок таким знанием не обладает, факт, аналогичный теореме об альтернативе, был, в принципе, известен. К нему вели конструкции, предложенные Л. С. Понтрягиным и Б. Н. Пшеничным. В основе этого факта лежит возможность игрока, обладающего “лишним” знанием, удерживать систему в так называемом множестве позиционного поглощения – множестве, дополнительном к семейству позиций, из которых разрешима задача противника (при том, конечно, условии, что исходная позиция лежит в множестве позиционного поглощения). В результате такого удерживания система неизбежно наводится на целевое множество.

Использование обратной связи по правилу экстремального сдвига сохраняет игроку-“наводчику” возможность удерживать систему в множестве позиционного поглощения при отказе от “лишнего” знания о противнике; при этом аппроксимирующие ломаные Эйлера удерживаются в сколь угодно малой окрестности этого множества. В каждый момент корректировки правило экстремального сдвига предписывает игроку применять управление, с максимальной скоростью сдвигающее систему по направлению к “целевой” точке. Последняя определяется как точка текущего временного сечения множества позиционного поглощения, ближайшая к текущему состоянию системы. Таким образом, вместо тонкого реагирования на “лишнее” знание – информацию об управлении противника в локальном будущем – игроку предлагается произвести простой, грубый сдвиг, универсально парирующий любые управления противника в локальном будущем.

Свойство универсального парирования управлений противника отражается в известной лемме о локальной оценке, играющей важнейшую роль в обоснова-

нии метода. В данной лемме сравниваются два сдвинутых состояния системы – истинное и “целевое”. Сдвинутое истинное состояние – то, в которое система переходит, при малом приращении времени, под действием управления экстремального сдвига игрока-“наводчика” и не известного игроку-“наводчику” истинного управления его противника. Сдвинутое “целевое” состояние – то, в которое исходная “целевая” точка, при том же приращении времени, переходит под действием некоторого управления противника при “правильной” реакции на него игрока-“наводчика”. “Правильная” реакция игрока-“наводчика” восстанавливается по схеме с “лишним” знанием; в результате сдвинутое “целевое” состояние попадает в сдвинутое временное сечение множества позиционного поглощения. Лемма о локальной оценке (в весьма приближенном изложении) утверждает, что расстояние между сдвинутым истинным состоянием и сдвинутым “целевым” состоянием не превосходит (с точностью до некоторых поправок) расстояния между исходным истинным состоянием и исходной “целевой” точкой. Иначе говоря, применение игроком управления экстремального сдвига “почти” (с точностью до определенных поправок) эквивалентно его “правильной” реакции на “лишнее” знание о противнике. Эта “почти эквивалентность” и позволяет игроку-“наводчику” гарантированно удерживать ломаные Эйлера в сколь угодно малой окрестности множества позиционного поглощения – при условии, что моменты корректировки его управления расположены достаточно часто.

Переход от систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, к системам, описываемым дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, имел принципиальный характер. Это был переход от конечномерных систем к бесконечномерным. Данное обстоятельство обусловило принципиальный характер трудностей, возникших на пути предпринятого Юрием Сергеевичем обобщения принципа экстремального сдвига и создания им на этой основе общей теории позиционных дифференциальных игр для систем с запаздыванием.

Для “обыкновенной” системы – системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, фазовое состояние – это конечный набор числовых координат. Все координаты “одинаково управляемы” в том смысле, что уравнение системы трансформирует их в локальном времени одним и тем же способом – путем аддитивного добавления малых приращений, задаваемых координатными функциями правой части уравнения. Это свойство, в частности, важно для доказательства леммы о локальной оценке (доказательство основано на элементарных свойствах евклидова расстояния в конечномерном фазовом пространстве состояний). Фазовое пространство системы с запаздывающим аргументом и локальная трансформация состояния такой системы устроены по-другому.

Состояние всякой управляемой динамической системы традиционно понимается как информация, определяющая (при зафиксированных программах управления) ее дальнейшее движение. В свете такого понимания состояние системы с запаздывающим аргументом уже не есть конечный набор ее текущих координат, как в случае “обыкновенной” системы: будущее движение системы с запаздыванием (при зафиксированных программах управления) определяется отрезком прошлой истории ее движения; именно в этом заключается эф-

фект запаздывания или, по-другому, последействия. Отрезки истории движения суть функции “прошлого” временного аргумента. Таким образом, фазовое пространство системы с запаздыванием есть пространство функций. Как линейное пространство, оно, в отличие от фазового пространства “обыкновенной” системы, бесконечномерно.

Метрическая структура фазового пространства системы с запаздыванием не стандартна, она определяется структурой локальных трансформаций состояний. В шестидесятых годах эта метрическая структура – для неуправляемых систем с запаздыванием – была выявлена С. Н. Шимановым. Оказалось, что фазовое состояние системы с запаздыванием имеет две неравнозначные составляющие. Одна из составляющих “бесконечномерна”; это собственно предыстория движения – точнее, некоторая ее часть, – строго предшествующая настоящему моменту времени. Другая составляющая “конечномерна”; это конечный набор геометрических координат системы в настоящий момент времени (что соответствует состоянию “обыкновенной” системы). Таким образом, фазовое пространство системы с запаздыванием представляет собой произведение бесконечномерного функционального пространства “собственно предысторий” и конечномерного пространства текущих геометрических координат. Соответственно, метрика фазового пространства – это метрика произведения; его конечномерная компонента оснащается стандартной евклидовой метрикой, а бесконечномерная компонента – одной из стандартных функциональных метрик, такой, как метрика пространства непрерывных функций либо пространства функций, суммируемых с квадратом нормы. Данная метрика адекватна структуре локальных трансформаций фазовых состояний в том смысле, что исходная система с запаздыванием, оснащенная так определенным фазовым пространством, может быть представлена как “обыкновенная”, правда бесконечномерная, динамическая система.

Конечномерная и бесконечномерная компоненты состояния системы с запаздыванием не равнозначны: эквивалентная бесконечномерная “обыкновенная” система по-разному трансформирует их в локальном времени. Конечномерная компонента состояния – вектор текущих геометрических координат – трансформируется так же, как в случае “обыкновенной” конечномерной системы – аддитивным добавлением малого приращения, задаваемого правой частью исходного дифференциального уравнения. Трансформация бесконечномерной компоненты состояния – функции, описывающей “собственную предысторию движения”, имеет иной характер – это смещение ее временного аргумента или, в геометрической интерпретации, сдвиг графика функции вдоль оси времени. Соответственно, трансформация конечномерной компоненты (определяемая правой частью исходного уравнения) “управляема” в том смысле, что явно зависит от текущих значений управляющих параметров; трансформация же бесконечномерной компоненты не зависит от уравнения системы и “не управляема”.

Наличие двух – “управляемой” конечномерной и “неуправляемой” бесконечномерной – компонент состояния качественно изменяет характер его локальной трансформации по сравнению со случаем “обыкновенных” конечномерных систем. Это стало серьезнейшим препятствием в исследовании Юрия Сергеевича, поскольку с самого начала исключало поиск прямых – пусть даже бесконеч-

номерных – аналогов правила экстремального сдвига, известного для “обыкновенных” систем. Предложенное Юрием Сергеевичем правило экстремального сдвига в известном смысле парадоксально. Оно “игнорирует” бесконечномерную компоненту состояния. При фиксации “целевого” состояния, это правило предлагает выбирать значение управляющего параметра из условия экстремального сдвига конечномерной компоненты истинного состояния системы на такую же компоненту “целевого” состояния – так, как если бы система была “обыкновенной”. Доказательство ключевой леммы о локальной оценке – о верхней оценке локального приращения расстояния (в фазовом пространстве-произведении) между истинным и “целевым” состояниями системы при применении к истинному состоянию управления экстремального сдвига – много сложнее, чем для случая “обыкновенных” систем; оно требует тонкого учета взаимосвязей между разнотипными локальными трансформациями обеих компонент состояний.

Полученный Юрием Сергеевичем принцип управления с обратной связью послужил для него “ключом” к созданию теории позиционных дифференциальных игр для конфликтно управляемых систем с запаздыванием [1]–[9]. Кроме центральной теоремы об альтернативе – аналога основополагающего результата теории позиционных дифференциальных игр для “обыкновенных” конфликтно управляемых систем (см. выше), созданная теория развивает конструктивные подходы к формированию оптимальных обратных связей для типичных частных ситуаций. Так, метод экстремального прицеливания, обоснованный (подобно случаю “обыкновенных” систем) в предположении так называемого условия регулярности, позволяет игроку-“наводчику” строить позиционную стратегию гарантированного наведения на целевое множество в той ситуации, когда у его противника отсутствует программный способ уклонения от этого множества. В весьма вольной интерпретации стратегия гарантированного наведения игрока-“наводчика” состоит в том, чтобы по ходу движения системы постоянно идентифицировать виртуальное программное управление противника, “наихудшее” в долгосрочной перспективе, и “наилучшим образом” отвечать на него в каждый данный момент времени. Условие регулярности служит для того, чтобы, образно говоря, исключить попадание игрока-“наводчика” в положение буриданова осла, в котором он не мог бы сделать однозначного выбора среди нескольких “наилучших ответов”.

Завершив в 1971 г. работу по созданию основ теории позиционных игр для управляемых систем с запаздывающим аргументом и защитив докторскую диссертацию, Юрий Сергеевич покинул это поле исследований, хотя в пределах этого поля сразу же открылись новые интересные направления. Ряд возникших новых задач он перенаправил своим аспирантам. Мне, к примеру, Юрий Сергеевич предложил заняться дифференциальной игрой наведения-уклонения для случая целевого множества, заданного в бесконечномерном фазовом пространстве системы с запаздыванием (в его собственных работах рассматривался случай целевого множества, заданного в конечномерном пространстве геометрических координат системы) [10].

Оставив работу над управляемыми системами с запаздыванием как конкретным представителем класса бесконечномерных управляемых систем, Юрий Сергеевич сконцентрировался на гораздо более общем объекте исследования –

феномене бесконечномерности фазового пространства динамической системы в контексте теории позиционных дифференциальных игр. Проведенный им анализ систем с запаздыванием показывал, что важнейшим методологическим элементом, во многом определяющим построение содержательной теории игрового управления бесконечномерной динамической системой, является задание метрической структуры фазового пространства системы в ее связи с характером определяемых системой локальных трансформаций. Поиску этого, корневого, методологического элемента и созданию с его помощью основ теории позиционных игр для классов бесконечномерных управляемых систем посвящена серия последующих работ Юрия Сергеевича.

Первое исследование Юрия Сергеевича в данной области относится, однако, не к собственно бесконечномерным системам, а к “обыкновенным” конечномерным системам, управление которыми осложняется неполнотой информации об их состояниях. Феномен неполной информации возникает в тех, весьма часто встречающихся в приложениях ситуациях, когда непосредственному наблюдению доступен лишь ограниченный сигнал о состоянии системы, например, часть ее текущих координат. В таких ситуациях обработка сложившейся к данному моменту времени истории наблюдений позволяет построить так называемое информационное множество – совокупность всех “потенциально истинных” состояний системы, каждое из которых “не противоречит” истории наблюдений. Текущее информационное множество определяет (при зафиксированных программах управления) динамику всех последующих информационных множеств. Возникает новая, “информационная”, динамическая система, состояниями которой служат информационные множества. Задача о наведении на целевое множество состояния исходной системы трансформируется в задачу о погружении в это целевое множество состояния “информационной” системы. Управление с обратной связью, направляемое на обе системы, исходную и “информационную”, строится в виде функции от текущего информационного множества.

“Информационная” динамическая система заведомо бесконечномерна: ее состояния – множества в фазовом пространстве исходной системы – не отождествимы с точками конечномерного пространства. Вставал вопрос о такой метризации фазового пространства “информационной” системы, при которой для этой системы реализуема апробированная ранее позиционная теоретико-игровая концепция. Для общего случая нелинейных конфликтно управляемых систем данный вопрос не прояснен до сих пор. (В одной из работ последнего времени Юрий Сергеевич, вновь обратившись к тематике управления при неполной информации, сделал решающий шаг в этом направлении – об этом речь ниже.) В 1973 г. Юрий Сергеевич, ограничившись линейными управляемыми системами, предложил задавать информационные множества (которые для таких систем, как правило, выпуклы) их опорными функциями и вкладывать последние в подходящее функциональное пространство. Этот подход позволил ему, вместе с Н. Н. Красовским, успешно реализовать схему экстремального сдвига и с ее помощью указать критерий разрешимости задачи о гарантирующем позиционном управлении линейной системой при неполной информации [11]–[13].

Последующие исследования Юрия Сергеевича семидесятых годов показали, что различные собственно бесконечномерные управляемые системы (фазовое пространство которых изначально бесконечномерно) выставляют свои, особые, препятствия на пути выявления структуры оптимальных обратных связей и критериев разрешимости задач игрового управления. Первым классом изученных Юрием Сергеевичем собственно бесконечномерных управляемых систем стали системы, описываемые линейными уравнениями с частными производными параболического типа при распределенных управляющих воздействиях. Главная трудность, связанная с бесконечной размерностью параболической системы, заключалась в том, что в ее традиционном фазовом пространстве, снабженном сильной функциональной метрикой, область достижимости системы теряет свойство компактности. Между тем, для “обыкновенных” систем компактность области достижимости важна на этапе обоснования утверждения об альтернативной разрешимости взаимодополняющих игровых задач управления. Решение Юрия Сергеевича, приведшее исследование к успеху, состояло в “реметризации” фазового пространства – переходе от сильной метрики к слабой.

Работы Юрия Сергеевича этого периода охватывают широкий спектр бесконечномерных конфликтно управляемых систем: системы, описываемые неоднородными граничными задачами для разных типов уравнений математической физики; системы, описываемые дифференциально-функциональными уравнениями; системы, описываемые абстрактными уравнениями с неограниченными операторами; системы с последействием в управляющих параметрах и другие [14]–[24]. Основная направленность этих работ – развитие позиционного подхода в дифференциальных играх, изучение его “пределных” возможностей, характеристика критериев разрешимости задач о гарантирующем управлении, выявление структуры оптимальных обратных связей. Методология исследования, имея оригинальное воплощение в каждой отдельной работе, объединена общей идеей синтеза дисциплин: дифференциальных игр, бесконечномерных дифференциальных уравнений и функционального анализа.

В подтверждение сказанного сделаю небольшое отступление, касающееся моей работы того времени. В семидесятые годы, после защиты кандидатской диссертации я, сотрудник руководимого Юрием Сергеевичем отдела в Институте математики и механики Уральского отделения АН, так же, как и другие молодые сотрудники этого отдела, в значительной мере следовал его исследовательской “траектории”. Тоже оставил область дифференциальных игр систем с запаздыванием (тема моей кандидатской диссертации), тоже переключился на изучение “обыкновенных” систем с неполной информацией и абстрактных бесконечномерных управляемых систем. Вокруг этих тем в отделе Юрия Сергеевича проходили многочисленные семинары и обсуждения “в узком кругу”. Синхронно в институте генерировалось множество других теоретико-игровых задач. Одна из трудных задач, вставшая тогда на повестку дня, состояла в том, чтобы распространить основные положения теории позиционных дифференциальных игр на “обыкновенные” системы, правые части которых не подчиняются условию Липшица по фазовой переменной (на тот момент последнее условие было технически существенным). Прекрасно помню наш разговор с Юрием

Сергеевичем (1978 г.), который натолкнул меня на решение (позже ставшее основой моей докторской диссертации).

Разговор шел вокруг возможности создать некоторую “универсальную” реализацию принципа экстремального сдвига, не связанную с особенностями фазового пространства управляемой системы (подразумевалось, что система бесконечномерна). Мысль, высказанная в какой-то момент Юрием Сергеевичем, была неожиданна, но в обсуждаемом контексте совершенно естественна: если смотреть на управляемую систему как на преобразование “управление-траектория”, то правило экстремального сдвига можно задавать не в пространстве “выходов” – траекторий, а в пространстве “входов” – управлений. Эта идея, в своем чистом виде, осталась тогда не реализованной. Однако именно она высветила путь, вскоре приведший меня к решению задачи о нелипшицевых “обыкновенных” системах: выход в бесконечномерное функциональное пространство управлений, отыскание адекватного критерия отклонения между “истинным” и “целевым” управлениями и реализация экстремального сдвига в терминах этого критерия.

К началу восьмидесятых годов принципиальные вопросы теории позиционных дифференциальных игр, связанные с выявлением общих критериев разрешимости игровых задач и общей структуры решений, были, в целом, завершены; в области бесконечномерных систем этот цикл исследований был успешно завершён благодаря, прежде всего, работам Юрия Сергеевича и его учеников. Сотрудникам Института математики и механики, занимавшимся дифференциально-игровой тематикой, предстояло определить путь дальнейших исследований. Один из путей предполагал развитие теории позиционных дифференциальных игр “вглубь” – разработку новых, аналитических и численных, методов решения дифференциально-игровых задач. Альтернативный путь предполагал поиск новых задач и разработку новых теоретических подходов. Юрий Сергеевич сделал однозначный выбор в пользу поиска новых задач; на этот путь он недвусмысленно настроил и сотрудников своего отдела. На новых задачах сконцентрировались многочисленные семинары и обсуждения в отделе.

Замысел Юрия Сергеевича состоял в поиске задач на стыках дисциплин. Вместе с учениками, он занялся целенаправленным изучением новых проблематик. В то время, наряду с работами в области теории управления и дифференциальных игр, в институте успешно развивались другие научные направления. На освоение именно этих, успешных, ведомых ближайшими коллегами, исследований были направлены усилия группы Юрия Сергеевича в первую очередь. Особое внимание Юрия Сергеевича привлекли работы в области теории некорректно поставленных (некорректных) задач, возглавляемые Валентином Константиновичем Ивановым. Несмотря на формальную удаленность проблематики теории некорректных задач от дифференциальных игр, специалистам “игровикам” была далеко не чужда идея регуляризации, играющая в этой теории стержневую роль. Именно с эффектом регуляризации – избавлением от неустойчивости при малых информационных помехах – связан широко известный метод позиционного управления “с поводырем”, предложенный Н. Н. Красовским в первой половине семидесятых. В этом смысле теория некорректных задач уже имела весомое приложение в области позиционных дифференциальных игр. Юрий Сергеевич формулировал цель по-другому: найти поле

для приложения методов теории позиционных дифференциальных игр в сфере некорректных задач.

Для постановки такой цели имелись, безусловно, объективные предпосылки. С одной стороны, процедура управления “с поводырем” уже обозначила “совместимость” двух теорий, с другой стороны, в теории позиционных дифференциальных игр был накоплен мощный, разнообразный методологический потенциал, который, несомненно, не должен был быть ограничен рамками лишь исходных постановок. Все же, при наличии серьезных предпосылок общего порядка, выделение конкретного поля искомых приложений составляло чрезвычайно трудную задачу. Запланированный Юрием Сергеевичем поворот в тематике, в отличие от его предыдущего поворота такого рода – перехода от управляемых систем с запаздыванием к общим бесконечномерным управляемым системам – не позволял опираться на существующие постановки: требовались задачи принципиально нового класса.

В спектре некорректных задач к объектам, изучаемым в теории управления, наиболее близки так называемые обратные задачи управляемых систем (обратные задачи управления). Типичная обратная задача управления состоит в нахождении управления, реализующего заданную траекторию системы – либо заданный сигнал о траектории. Такие задачи, однако, под углом зрения их некорректности, систематически не изучались. Имевшие к тому времени публикации сосредотачивались, в основном, на теоретическом вопросе о принципиальной разрешимости обратных задач управления, либо на конкретных методах их решения для специальных классов систем в условиях точного задания траекторий. Между тем, внесение малых возмущений в задание траектории сразу делает задачу некорректной: в условиях стандартных априорных предположений на класс действующих на систему управлений возмущенная траектория, вообще говоря, либо не совмещается ни с каким допустимым управлением, либо порождается управлением, весьма далеким от того, которое соответствует невозмущенной траектории. Трактовка обратной задачи управления как некорректной стала первым шагом на пути, намеченном Юрием Сергеевичем.

Введение возмущенных сигналов о траекториях подразумевало и определенное смещение акцента в содержательной интерпретации обратных задач управления. Если раньше такие задачи рассматривались, как правило, в контексте проектирования траекторий с нужными свойствами (что не требовало рассмотрения траекторных возмущений), то при наличии траекторных возмущений они ассоциируются с процессом наблюдения реальной траектории системы, генерируемой неизвестным управлением. Последнее при этом теряет традиционный смысл “управления” – разумного воздействия, направленного на оптимизацию движения: на месте управления появляется ненаблюдаемый и неконтролируемый “вход”, подаваемый на систему “внешней средой”. В соответствии с концепцией теории некорректных задач, ненаблюдаемый вход подлежит восстановлению; точность восстановления должна быть сколь угодно велика при достаточно большой точности наблюдений.

Серия примеров подобных постановок была сразу же обнаружена в сфере приложений. Особое внимание Юрия Сергеевича привлекли примеры, связанные с управлением динамическими системами при воздействии на них некон-

тролируемых динамических возмущений. В этих примерах текущие управляющие воздействия призваны реагировать на текущие значения возмущающих входов в реальном времени (простейший пример – обеспечение заданного режима ускорения для управляемой материальной точки, подверженной, помимо действия управляющей силы, также неконтролируемому внешнему силовому действию). Поскольку прямое наблюдение возмущающих входов в примерах такого рода не представлялось возможным, возникла новая задача о динамическом обращении – об аппроксимации текущих значений ненаблюдаемых входов в реальном времени на основании доступных сигналов о траектории. В более широком контексте задача о динамическом обращении мыслилась как “блок обращения” в следующей общей алгоритмической схеме “обращения-управления”: по ходу движения управляемой системы, подверженной воздействию ненаблюдаемых входов, на основании текущих, вообще говоря, неточных, наблюдений ее состояний, в реальном времени приближенно восстанавливаются текущие значения входов (“блок обращения”); эти значения вместе с результатами прямых наблюдений состояний системы подаются в автоматический регулятор, вырабатывающий текущие значения управляющего параметра (“блок управления”).

Юрием Сергеевичем было решено сосредоточиться на собственно задаче о динамическом обращении – при том упрощающем предположении, что рассматриваемая динамическая система не управляема – подвержена действию лишь ненаблюдаемых переменных входов. В свете сказанного выше, важным отличительным требованием на искомый алгоритм обращения – аппроксимации входов по наблюдениям состояний – стало требование его динамичности – осуществимости в реальном времени. Под углом зрения теории некорректных задач это требование, выступающее как ограничение на класс допустимых регуляризирующих алгоритмов, позволило говорить о задаче динамического обращения как о задаче динамической регуляризации. Данная задача оказалась, с одной стороны, безусловно относящейся к сфере теории некорректных задач, с другой стороны, новой по своей постановке. Она требовала разработки новой техники динамической регуляризации: стандартные регуляризирующие алгоритмы, хотя и рассчитанные на значительно более широкие случаи, для ее решения были неприменимы, поскольку не подчинялись ограничению динамичности.

По ходу генерации новой постановки Юрием Сергеевичем и мной был найден адекватный методологический подход к динамической регуляризации – принцип регуляризованного экстремального сдвига. Его основой служит упомянутая выше процедура управления “с поводырем” Н. Н. Красовского из теории позиционных дифференциальных игр. Суть подхода в следующем. Процесс динамической аппроксимации ненаблюдаемого входа трактуется как процесс управления вспомогательной, “виртуальной”, динамической системой – моделью. Модель, в грубой интерпретации, – это “копия” исходной системы, принципиально разнящаяся от последней тем, что она управляема: в модели место неконтролируемого входа занимает управляющий параметр. Текущие значения управляющего параметра модели формируются в реальном времени по принципу обратной связи – в виде реакции на “реальную” (неточную) информацию о текущем состоянии исходной системы и “виртуальную” (точную) информацию

о текущем состоянии модели. Обратная связь в контуре управления моделью подбирается так, чтобы реализация модельного управления как функция времени достаточно точно отслеживала реализацию входа исходной системы.

На начальном этапе описанная схема “управления как обращения” разрабатывалась Юрием Сергеевичем и мной для “обыкновенных” конечномерных систем, аффинных по входной переменной. Для таких систем не представлял сложности подбор модельной обратной связи, гарантирующей близость траекторий модели и системы: эта близость обеспечивалась стандартным правилом экстремального сдвига (см. выше) текущего состояния модели на текущий сигнал о состоянии системы. Решающим шагом, определившим дальнейшее развитие подхода, стало понимание того, что подходящая регуляризация правила экстремального сдвига обеспечивает требуемое, значительно более сильное свойство – близость модельного управления ко входу системы в сильной среднеквадратичной метрике [25], [26]. Предложенная регуляризация состоит в совмещении основного критерия – критерия собственно экстремального сдвига – с дополнительным критерием – критерием минимизации нормы текущего значения управляющего параметра. В центральной версии метода учет дополнительного критерия выражается в добавлении к основному, линейному, критерию сдвига квадратичной сглаживающей функции, предваренной малым коэффициентом регуляризации. Регуляризованный экстремальный сдвиг – минимизация суммарного критерия по управляющей переменной – в точности соответствует применению метода регуляризации А. Н. Тихонова к правилу экстремального сдвига Н. Н. Красовского.

С точки зрения теории некорректных задач такая регуляризация, проводимая многократно, но локально, в каждом узле коррекции, реализует, в темпе реального времени, метод, весьма близкий к стандартному “апостериорному” методу А. Н. Тихонова. С точки зрения теории управления регуляризованный экстремальный сдвиг дает способ стабилизации – вдоль движения модели – некоторого функционала Ляпунова, который в последний момент времени превращается “почти что” в “апостериорный” функционал А. Н. Тихонова.

Не более чем за год цель, поставленная Юрием Сергеевичем, была достигнута. На стыке теории некорректных задач и теории позиционного управления было найдено новое, мотивированное приложениями, поле для исследований – задачи динамической регуляризации – и указан подход к их решению – метод регуляризованного экстремального сдвига.

Этот принципиальный задел, созданный в 1981–82 гг., повлек за собой большую серию исследований Юрия Сергеевича и его учеников по новой тематике. Работы по динамическому обращению “обыкновенных” конечномерных систем, проведенные, в основном, в восьмидесятых [27]–[37], были суммированы в монографии [38]. Монография представляет читателю разветвленную теорию, покрывающую широкий спектр вопросов – от постановок задач о динамическом обращении, изучения проблемы их разрешимости, сравнения возможностей динамических и апостериорных методов до построения оптимальных алгоритмов и детальной реализации схемы “обращение-управление”, сыгравшей важную мотивирующую роль на начальном этапе исследований (см. выше). Базу теории составляют методы регуляризованного экстремального сдвига, соединяющие, как было отмечено выше, подходы теории позиционных диффе-

ренциальных игр и теории некорректных задач. Отдельные разделы теории апеллируют к методам теории дифференциальных уравнений, теории управления (в частности, аппарату обобщенных управлений), теории оценивания, функционального анализа, выпуклого анализа, теории приближения функций. Явные описания алгоритмов обращения и обращения-управления, готовые для непосредственного применения и сопровождаемые оценками точности, комбинируются с изучением тонких качественных вопросов таких, как регуляризуемость, порядковая оптимальность, асимптотическая оптимальность и др.

В ходе создания теории динамического обращения Юрием Сергеевичем был предложен ряд ее оригинальных методологических приложений, вносящих вклад в другие области – теорию решения операторных уравнений [39], [40], теорию приближения функций [41] и др. Наиболее сильное развитие получили приложения методологии динамического обращения к задачам статической, вообще говоря бесконечномерной, оптимизации. Начало этому, параллельному, исследованию, к которому Юрий Сергеевич обращался до самого последнего времени, было положено во второй половине восьмидесятых в небольшой работе [42]. В этой работе предлагался новый итерационный алгоритм, ориентированный на решение линейно-выпуклой задачи оптимального управления при наличии фазовых ограничений. Алгоритм был построен по принципу регуляризованного экстремального сдвига, примененного к искусственно сконструированной динамической модели с дискретным временем, символизирующим итерации. Состояния модели – это приближения искомого решения в пространстве “квазипроцессов” – функциональных пар, составленных из управлений и прототипов траекторий. Исходная задача об оптимальном управлении трактуется как задача оптимизации в пространстве квазипроцессов при ограничениях типа равенств – они доставляются уравнением системы – и типа включений – они доставляются исходными фазовыми ограничениями и исходными ограничениями на управления. Введение специального функционала Ляпунова, связанного с методом регуляризации А. Н. Тихонова, и его стабилизация по правилу регуляризованного экстремального сдвига приводят к тому, что состояния модели приближаются к искомому решению.

В последующих работах Юрия Сергеевича эта и подобные ей алгоритмические схемы, базирующиеся на идее регуляризованного экстремального сдвига, уточнялись и распространялись на разные классы экстремальных задач. Основная направленность данного цикла работ – продвижение в область методов глобальной невыпуклой оптимизации. В результирующей статье [43], обобщающей ряд предшествующих исследований, предъявлен широкий класс невыпуклых задач оптимизации с ограничениями, для которых принцип регуляризованного экстремального сдвига дает сходящийся итерационный алгоритм решения. Задачи этого класса характеризуются геометрическим условием делимости графика функции “возмущенного оптимального значения”. В дополнение указывается класс нелинейных задач оптимального управления, подчиняющихся условию делимости графика, и, в предельно конструктивной форме, описывается решающий задачу алгоритм последовательных приближений [44].

В описанном цикле работ Юрия Сергеевича задачи оптимального управления играют роль основного “полигона”. Это мотивировано несколькими об-

стоятельствами. Во-первых, задачи управления, связанные со многими приложениями, занимают одно из центральных мест в спектре современных бесконечномерных задач оптимизации. Во-вторых, предшествующий опыт Юрия Сергеевича как исследователя связан, прежде всего, с проблематикой теории управления. Наконец, с вычислительной точки зрения алгоритмическая схема, основанная на методе регуляризованного экстремального сдвига, прекрасно приспособлена для решения как раз задач оптимального управления. Для этих задач шаг итерации, как правило, декомпозируется в серию не зависящих друг от друга (параметризованных временем) элементарных задач оптимизации в евклидовом пространстве фиксированной размерности. Во многих типичных ситуациях эти элементарные задачи решаются явно. Кроме того, факт декомпозиции итерационного шага открывает возможность для использования техники параллельных вычислений.

По завершении работы над теорией динамического обращения для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, Юрий Сергеевич, вместе с группой учеников, интенсивно занимался распространением основных положений этой теории на классы бесконечномерных динамических систем [45]–[57]. Здесь отразился устойчивый интерес Юрия Сергеевича к таким системам, во многом обусловленный его работами семидесятых годов. Полученные результаты содержат общую схему динамической регуляризации и ее многочисленные воплощения для разных классов бесконечномерных динамических систем. Среди них – системы, описываемые дифференциально-функциональными уравнениями с различными типами входов; системы, описываемые линейными и нелинейными параболическими уравнениями с монотонными операторами и параболическими вариационными неравенствами, распределенными и граничными входами; системы, описываемые линейными и нелинейными гиперболическими и эллиптическими уравнениями и вариационными неравенствами, и другие. Значительное место в этом цикле исследований занимают задачи, мотивированные приложениями, в первую очередь, экологического содержания – такие, как задачи об отслеживании интенсивности и местоположения ненаблюдаемых источников загрязнений по результатам косвенных измерений. Серьезное внимание уделено вычислительным аспектам; для классов систем, описываемых уравнениями и вариационными неравенствами в бесконечномерных пространствах, построены конечномерные аппроксимации, ориентированные на решение задач обращения. Наряду с исследованием собственно задач обращения, для некоторых типов управляемых бесконечномерных систем с неопределенными входами описана и успешно реализована алгоритмическая схема “обращение-управление” [58]–[60]. Основы метода динамической регуляризации в контексте бесконечномерных систем изложены в монографии [61].

В средние восьмидесятые, во время работы над методами динамической регуляризации, Юрий Сергеевич обратился также к новому, во многом мотивированному приложениями, разделу теории оптимизации бесконечномерных систем – задачам об оптимизации форм. Появился небольшой, оригинальный цикл работ, в котором изучаются условия существования оптимальной пространственной области определения эллиптической системы [62]–[64]; проблема сопрягается с вопросом о сходимости решений абстрактных вариационных за-

дач на последовательностях подпространств. В девяностых годах в нескольких работах Юрий Сергеевич возвращается к классической тематике дифференциальных игр для “обыкновенных” конечномерных систем и проводит исследование на стыке теории дифференциальных и эволюционных игр [65]–[67].

В своей последней по времени работе [68] Юрий Сергеевич остается в области “обыкновенных” управляемых систем. Обращаясь к задачам позиционного управления с неполной информацией о фазовых состояниях, серьезно интересовавшей его в первой половине семидесятых, он предлагает новый инструмент для построения обратных связей, гарантирующих требуемое качество движений. Этот инструмент, названный автором “пакетами программ”, в оригинальном преломлении развивает идею программных конструкций, широко используемую в теории позиционных дифференциальных игр. Пакет программ – это, в вольной интерпретации, априори выбираемое управляющим игроком семейство его потенциально допустимых “физически реализуемых” ответов-программ на всевозможные реализации факторов неопределенности. Фактическая реализация “игроком-противником” какой-либо конкретной комбинации факторов неопределенности провоцирует реализацию соответствующей ответной программы из пакета. Подобная схема работы пакета ведет к естественной трактовке его как некоторого идеализированного механизма решения задачи о гарантирующем управлении. Упрощенная, программная природа таких механизмов открывает, аналогично программным конструкциям дифференциальных игр, возможность аналитической характеристики условий разрешимости задач о гарантирующем управлении с помощью пакетов программ. В этом свете принципиальное значение для анализа задач управления с неполной информацией имеет основной результат работы, утверждающий эквивалентность разрешимости задачи о гарантирующем управлении в двух классах управляющих процедур: классе (идеализированных) пакетов программ и классе (конструктивно реализуемых) обратных связей.

Характерные черты научного стиля Юрия Сергеевича Осипова – динамичность и целеустремленность. Он периодически обновляет тематику; начатые исследования доводятся им до крупных, ясных, окончательных результатов. Основные мотивы, которыми он руководствуется при выборе новых задач, – синтез дисциплин и практическая содержательность постановок. Еще в семидесятые годы, заведя Отделом дифференциальных уравнений в Институте математики и механики АН в Екатеринбурге, тогда Свердловске, он неоднократно указывал нам, молодым сотрудникам, на эти критерии в научном поиске, одновременно предупреждая о бесперспективности “мелкотемья”. “Задач, которыми можно заниматься, миллион, – говорил он нам. – Надо уметь выбирать”. За долгие годы работы в науке Юрий Сергеевич создал сильный коллектив последователей, продолжающих и развивающих созданные им научные направления, работающих в России и за границей. Среди последователей Юрия Сергеевича – активно работающие зарубежные ученые.

В заключение – субъективный комментарий автора. Настоящий обзор ограничен лишь теми исследованиями Юрия Сергеевича, с которыми автор знаком достаточно близко (над частью из них мы работали совместно). В обзоре акцентированы наиболее важные, на взгляд автора, поворотные и идейные моменты в творчестве Юрия Сергеевича и опущены характеристики многих значимых

результатов. Приведенный список публикаций далеко не полон. Высказанные автором оценки и интерпретации субъективны и могут, разумеется, не соответствовать мнениям как коллег Юрия Сергеевича, так и его самого. Автор заранее просит извинения за возможные неточности.

Список цитированных публикаций Ю. С. Осипова

- [1] Ю. С. Осипов, “Альтернатива в дифференциально-разностной игре”, *Докл. АН СССР*, **197**:5 (1971), 1022–1025.
- [2] Ю. С. Осипов, “Дифференциальная игра наведения для систем с последствием”, *Прикл. матем. и мех.*, **35**:1 (1971), 123–131.
- [3] Ю. С. Осипов, “Дифференциальные игры систем с последствием”, *Докл. АН СССР*, **196**:4 (1971), 779–782.
- [4] Ю. С. Осипов, “К теории дифференциальных игр систем с последствием”, *Прикл. матем. и мех.*, **35**:2 (1971), 300–311.
- [5] Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов, “Линейные дифференциально-разностные игры”, *Докл. АН СССР*, **197**:4 (1971), 777–780.
- [6] Ю. С. Осипов, “Об условиях стабильности поглощения в дифференциально-разностных играх. I”, *Управляемые системы. Новосибирск*, 1971, № 8, 13–20.
- [7] Ю. С. Осипов, “Об условиях стабильности поглощения в дифференциально-разностных играх. II”, *Управляемые системы. Новосибирск*, 1971, № 8, 21–28.
- [8] Ю. С. Осипов, “Минимаксное поглощение в дифференциально-разностных играх”, *Докл. АН СССР*, **203**:1 (1972), 32–35.
- [9] Ю. С. Осипов, В. Г. Пименов, “К теории дифференциальных игр в системах с последствием”, *Прикл. матем. и мех.*, **42**:6 (1978), 969–977.
- [10] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством”, *Прикл. матем. и мех.*, **37**:1 (1973), 3–13.
- [11] Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов, “Задача управления с неполной информацией”, *Изв. АН СССР. Сер. мех. тверд. тела*, 1973, № 4, 5–14.
- [12] Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов, “К теории дифференциальных игр с неполной информацией”, *Докл. АН СССР*, **215**:4 (1974), 780–783.
- [13] Yu. S. Osipov, “An information game problem”, *Optimization Techniques: IFIP Technical Conference* (Novosibirsk, July 1–7, 1974), Lect. Notes Comput. Sci., **27**, Springer, Berlin, 1975, 482–486.
- [14] Ю. С. Осипов, “К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами”, *Докл. АН СССР*, **223**:6 (1975), 1314–1317.
- [15] И. Ф. Вайсбурд, Ю. С. Осипов, “Дифференциальная игра сближения для систем с распределенными параметрами”, *Прикл. матем. и мех.*, **39**:5 (1975), 772–779.
- [16] A. B. Kurzanskii, Yu. S. Osipov, “Minimax control and estimation problems in systems with distributed parameters”, *Proceedings of the IFAC 6th World Congress* (Boston / Cambridge, MA, 1975), IFAC, Düsseldorf, 1975, 15.5/1–15.5/11.
- [17] Ю. С. Осипов, С. П. Охезин, “К теории дифференциальных игр в параболических системах”, *Докл. АН СССР*, **226**:6 (1976), 1267–1270.
- [18] Л. П. Алесенко, Ю. С. Осипов, “О регуляризации управлений в дифференциально-разностной игре сближения-уклонения”, *Дифференц. уравнения*, **12**:6 (1976), 999–1006.
- [19] Ю. С. Осипов, “Позиционное управление в параболических системах”, *Прикл. матем. и мех.*, **41**:2 (1977), 195–201.
- [20] Ю. С. Осипов, С. П. Охезин, “К теории позиционного управления в гиперболических системах”, *Докл. АН СССР*, **233**:4 (1977), 551–554.

- [21] А. И. Короткий, Ю. С. Осипов, “Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами”, *Прикл. матем. и мех.*, **42:4** (1978), 599–605.
- [22] Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, С. П. Охезин, “Задачи управления в системах с распределенными параметрами”, *Динамика управляемых систем* (Иркутск, 1977), Наука, Новосибирск, 1979, 199–208.
- [23] А. И. Короткий, Ю. С. Осипов, “О позиционном управлении в системах с распределенными параметрами”, *Прикл. матем. и мех.*, **44:4** (1980), 611–617.
- [24] Ю. С. Осипов, В. Г. Пименов, “О позиционном управлении при последствии в управляющих силах”, *Прикл. матем. и мех.*, **45:2** (1981), 223–229.
- [25] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Метод позиционной регуляризации в задаче о построении движения”, *Аннотации докладов 5-го Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике*, Изд-во “Наука” КазССР, Алма-Ата, 1981, 214.
- [26] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “О моделировании управления в динамической системе”, *Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика*, 1983, № 2, 51–60.
- [27] А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, Ю. С. Осипов, “О позиционном моделировании в динамических системах”, *Прикл. матем. и мех.*, **47:6** (1983), 883–890.
- [28] Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, “О моделировании параметров динамической системы”, *Задачи управления и моделирования в динамических системах*, УНЦ АН СССР, Свердловск, 1984, 47–68.
- [29] A. V. Krjazimskii, Yu. S. Osipov, “On positional calculation of Ω -normal controls in dynamical systems”, *Problems Control Inform. Theory*, **13:6** (1984), 425–436.
- [30] Yu. S. Osipov, A. V. Krjazimskii, “Positional modeling of stochastic control in dynamical systems”, *Stochastic optimization* (Kiev, 1984), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., **81**, Springer, Berlin, 1986, 696–704.
- [31] Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, “Метод функций Ляпунова в задаче моделирования движения”, *Устойчивость движения*, Наука, Новосибирск, 1985, 53–56.
- [32] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Метод функций Ляпунова в задаче о моделировании движений”, *Аннотации докладов IV Четаевской конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением* (Звенигород, 1985), 35.
- [33] Ю. С. Осипов, “Задачи динамического восстановления”, *Число и мысль*, вып. 10, Знание, М., 1987, 7–27.
- [34] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Обратные задачи динамики и управляемые модели”, *Механика и научно-технический прогресс*, т. 1: Общая и прикладная механика, Наука, М., 1987, 196–211.
- [35] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Устойчивые решения обратных задач динамики управляемых систем”, *Оптимальное управление и дифференциальные игры*, Тр. МИАН, **185**, ред. Л. С. Понтрягин, Наука, М., 1988, 126–146.
- [36] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “О методах позиционного моделирования управления в динамических системах”, *Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем*, Свердловск, 1988, 34–44.
- [37] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат”, *Некоторые задачи управления и устойчивости*, УНЦ АН СССР, Свердловск, 1989, 33–47.
- [38] Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhinskii, *Inverse problem for ordinary differential equations: dynamical solutions*, Gordon & Breach, Basel, 1995.
- [39] Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, “О динамическом решении операторных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **269:3** (1983), 552–556.
- [40] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “О динамической регуляризации линейных алгебраических уравнений”, *Задачи позиционного моделирования*, УНЦ АН СССР, Свердловск, 1986, 41–84.

- [41] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “О наилучшем приближении оператора дифференцирования в классе неупреждающих операторов”, *Матем. заметки*, **37:2** (1985), 192–199.
- [42] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “К регуляризации выпуклой экстремальной задачи с неточно заданными ограничениями. Приложение к задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями”, *Некоторые методы позиционного и программного управления*, УНЦ АН СССР, Свердловск, 1987, 34–54.
- [43] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Экстремальные задачи с отделимыми графиками”, *Кибернетика и системн. анализ*, 2002, № 2, 32–55.
- [44] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, “Метод экстремального сдвига и задачи оптимизации”, *Труды ИММ УрО РАН*, **10:2** (2004), 83–106.
- [45] А. В. Ким, А. И. Короткий, Ю. С. Осипов, “Обратные задачи динамики параболических систем”, *Прикл. матем. и мех.*, **54:5** (1990), 754–759.
- [46] Yu. S. Osipov, *Inverse problems of dynamics for systems described by parabolic inequality*, Working paper WP-89-101, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, 1989.
- [47] Ю. С. Корбич, В. И. Максимов, Ю. С. Осипов, “Динамическое моделирование управлений в некоторых параболических системах”, *Прикл. матем. и мех.*, **54:3** (1990), 355–360.
- [48] А. И. Короткий, Ю. С. Осипов, “Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах”, *Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика*, 1991, № 2, 154–164.
- [49] А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, Ю. С. Осипов, *Задачи динамической регуляризации для систем с распределенными параметрами*, Препринт, ИММ УрО АН СССР, Свердловск, 1991.
- [50] Yu. S. Osipov, “Inverse problem of dynamics for systems described by parabolic inequality”, *Modelling and inverse problems of control for distributed parameter systems* (Laxenburg, 1989), *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, **154**, Springer, Berlin, 1991, 127–134.
- [51] Yu. S. Osipov, A. I. Korotkii, “On dynamical restoration of parameters of elliptic systems”, *Ill-posed problems in natural sciences* (Moscow, 1991), VSP, Utrecht, 1992, 108–117.
- [52] Yu. S. Osipov, *On the reconstruction of a parameter for a hyperbolic systems*, Working paper WP-91-54, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, 1991.
- [53] Yu. S. Osipov, “On reconstruction of coefficients for differential equations”, *Current problems of analysis and mathematical physics* (Taormina, 1992), Univ. Roma “La Sapienza”, Rome, 1993, 195–199.
- [54] Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhinskii, V. I. Maksimov, “Dynamical inverse problems for systems with distributed parameters”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **4:4** (1996), 267–282.
- [55] A. V. Kryazhinskii, V. I. Maksimov, Yu. S. Osipov, *Reconstruction of boundary sources through sensor observations*, Working paper WP-96-97, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, 1996.
- [56] А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, Ю. С. Осипов, “О реконструкции экстремальных возмущений в параболических уравнениях”, *ЖВМ и МФ*, **37:3** (1997), 291–301.
- [57] Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, “Динамические обратные задачи для параболических систем”, *Дифференц. уравнения*, **36:5** (2000), 579–597.
- [58] Ю. С. Осипов, Л. Пандольфи, В. И. Максимов, “Задача робастного граничного управления: случай краевых условий Дирихле”, *Докл. РАН*, **374:3** (2000), 310–312.

- [59] V. I. Maksimov, Yu. S. Osipov, L. Pandolfi, “Problems of dynamical reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions”, *Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде*, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2000, 42–45.
- [60] Yu. S. Osipov, L. Pandolfi, V. I. Maksimov, “Problems of dynamical reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions”, *Distributed systems: optimization and economic-environmental applications* (Ekaterinburg, 2000), *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **9:2** (2001), 149–162.
- [61] Ю. С. Осипов, Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, *Основы метода динамической регуляризации*, Изд-во МГУ, М., 1999.
- [62] Ю. С. Осипов, А. П. Суетов, “Об одной задаче Ж.-Л. Лионса”, *Докл. АН СССР*, **276:2** (1984), 288–291.
- [63] Ю. С. Осипов, А. П. Суетов, “Качественные вопросы теории оптимизации конструкций”, *Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, Наука, Новосибирск, 1988, 237–244.
- [64] Ю. С. Осипов, А. П. Суетов, *Существование оптимальных форм эллиптических систем. Случай краевых условий Дирихле*, ИММ УрО АН СССР, Свердловск, 1990.
- [65] А. В. Кряжковский, Ю. С. Осипов, “О дифференциально-эволюционных играх”, *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. К 70-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко*, Тр. МИАН, **211**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, Наука, М., 1995, 257–287.
- [66] А. В. Кряжковский, Ю. С. Осипов, “Аппроксимационная линейная редукция в дифференциальной игре наведения-уклонения”, *Оптимальное управление, дифференциальные уравнения и гладкая оптимизация. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Р. В. Гамкрелидзе*, Тр. МИАН, **220**, МАИК “Наука”, М., 1998, 173–194.
- [67] А. В. Кряжковский, Ю. С. Осипов, “О двумерной редукции в дифференциальной игре качества”, *Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения. К 90-летию со дня рождения академика Л. С. Понтрягина*, Тр. МИАН, **224**, МАИК “Наука”, М., 1999, 218–233.
- [68] Ю. С. Осипов, “Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией”, *УМН*, **61:4** (2006), 25–76.

А. В. Кряжковский (A. V. Kryazhinskii)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kryazhim@mi.ras.ru, kryazhim@iiasa.ac.at

Поступила в редакцию

25.07.2006