Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Власов, С. А. Иванов, Базисность и оценки решений уравнений с последним действием в шкале пространств Соболева, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:27:28

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

БАЗИСНОСТЬ И ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ
С ПОСЛЕДСТВИЕМ В ШКАЛЕ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

В. В. Власов, С. А. Иванов

В предлагаемой заметке в шкале пространств Соболева установлена базисность Рисса системы экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа и получены неулучшаемые оценки их решений.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} u^{(j)}(t - h_k) + \sum_{j=0}^m \int_0^h B_j(\tau) u^{(j)}(t - \tau) d\tau = 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0]. \quad (2)$$

Здесь a_{kj} — комплексные коэффициенты, функции $B_j(\tau)$ лежат в $L^2(0, h)$. Функция g принадлежит пространству Соболева $H^s(-h, 0)$, $s > m$ (определение и свойства см. в [1; гл. I]). Предполагается, что s не является полуцелым ($s \neq 3/2, 5/2, \dots$), $0 = h_0 < \dots < h_n = h$.

Под решением задачи (1), (2) мы понимаем такую функцию u , что для любого $T > 0$ функция u принадлежит $H^s(-h, T)$, u удовлетворяет уравнению (1) в $H^{s-m}(0, T)$ и условию (2) в $H^s(-h, 0)$.

Обозначим через H_U^s подпространство функций в $H^s(-h, 0)$, удовлетворяющих условиям согласования

$$\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} g^{(j+r)}(-h_k) + \sum_{j=0}^m \int_0^h B_j(\tau) g^{(j+r)}(-\tau) d\tau = 0 \quad (3)$$

при $r = 0, 1, \dots, [s - m - 1/2]$.

Введем характеристическую функцию $L(\lambda)$ уравнения (1):

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} \lambda^j e^{-\lambda h_k} + \sum_{j=0}^m \lambda^j \int_0^h B_j(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau;$$

через λ_q обозначим ее нули, через ν_q — их кратности; введем почти нормированную систему $V = \{v_{qj}\}$ экспоненциальных решений уравнения (1):

$$v_{qj}(t) = \frac{t^j \exp(\lambda_q t)}{|\lambda_q|^s + 1}, \quad j = 0, 1, \dots, \nu_q - 1.$$

В [2] получены условия базисности экспоненциальных семейств в пространствах Соболева H^s . Из результатов этой работы может быть выведена

ТЕОРЕМА 1. а) Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$. Тогда кратности ν_q нулей λ_q равномерно ограничены: $N = \max_q \nu_q < \infty$, а система V полна и минимальна в пространстве H_U^s .

б) Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$ и множество нулей $\{\lambda_q\}$ отделимо: $\inf_{p \neq q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$. Тогда нули $\{\lambda_q\}$ лежат в полосе $-\infty < \inf \operatorname{Re} \lambda_q \leq \sup \operatorname{Re} \lambda_q = \kappa < \infty$, и система V образует базис Рисса в пространстве H_U^s .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия теоремы существенны; если $B_m = 0$, то при $a_{0m} = 0$ и $a_{nm} = 0$ система V может оказаться неполной в H_U^s . Далее, если множество $\{\lambda_q\}$ неотделимо, то система V уже не будет равномерно минимальной в H_U^s . Отделимость множества $\{\lambda_q\}$ имеет место, в частности, в случае одного запаздывания ($n = 1$) при $B_j(\tau) \equiv 0$, $j = 0, 1, \dots, m$.

На основании теоремы 1 методами работ [3], [4] может быть установлен следующий результат об оценке решений задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия пункта б) теоремы 1 и начальная функция g лежит в пространстве H_U^s . Тогда решение $u(t)$ задачи (1), (2) существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{H^s(t, t+h)} \leq d(t+1)^{N-1} e^{\kappa t} \|g\|_{H^s(-h, 0)}, \quad t \geq -h, \quad (4)$$

с постоянной d , не зависящей от g и t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для целочисленных s теоремы 1 и 2 установлены в [3], [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценки типа (4), для которых величина κ заменяется на $\kappa + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, давно и хорошо известны; см., например, [5]–[7]. Полученная нами оценка (4) неуплучшаема в следующем смысле: константу κ нельзя заменить на $\kappa - \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для полуцелого s , $s = m + r + 1/2$, r — натуральное, оценки, аналогичные (4), справедливы в более сильной норме, чем норма в $H^s(-h, 0)$, при условии, что для начальных данных g эта норма конечна, а g удовлетворяет r условиям согласования и дополнительному условию интегрального характера.

Отметим, что при $0 \leq s - m < 1/2$ условия согласования (3) не накладываются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. [2] S. A. Ivanov, N. Kalton // Алгебра и анализ. 2001. № 2. С. 93–115. [3] В. В. Власов // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2. С. 20–29. [4] В. В. Власов // Изв. вузов. Математика. 2000. № 4. С. 14–22. [5] Р. Беллман, К. Кук. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. [6] D. Henry // J. Differential Equations. 1974. V. 15. № 1. Р. 106–128. [7] Дж. Хейл. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Санкт-Петербургский государственный университет

Принято редколлегией
29.03.2001