Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Большие отклонения для цепей Маркова в положительном квадранте, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 5, 3–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:13:41

УДК 519.21

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ЦЕПЕЙ
МАРКОВА В ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ КВАДРАНТЕ

А. А. Боровков, А. А. Могульский

В работе рассматриваются так называемые N -частично однородные (в пространстве) и однородные во времени цепи Маркова $X(y, n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $X(y, 0) = y$, принимающие значения в положительном квадранте $\mathbb{R}^{2+} = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Эти цепи характеризуются тем, что для них переходная вероятность $P(y, A) = P(X(y, 1) \in A)$ обладает свойством: *при некотором $N \geq 0$ мера $P(y, dx)$ в области $x_1 > N, y_1 > N$ зависит лишь от $x_2, y_2, x_1 - y_1$, а в области $x_2 > N, y_2 > N$ — лишь от $x_1, y_1, x_2 - y_2$* . Для таких цепей найдена асимптотика

$$\ln P\left(\frac{1}{s}X(y, n) \in B\right), \quad \ln P(X(y, n) \in x + B)$$

для фиксированного множества B и $s \rightarrow \infty, |x| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. Рассмотрены и другие условия на рост параметров, например, $|x - y| \rightarrow \infty, |y| \rightarrow \infty$. Изучена структура наиболее вероятных траекторий, дающих основной вклад в рассматриваемую асимптотику, и установлен ряд других результатов, относящихся к рассматриваемой проблематике.

Для более узкого класса 0-частично однородных эргодических цепей получены аналогичные результаты при более широких моментных условиях на переходные вероятности $P(y, dx)$. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях для 0-частично однородных эргодических цепей найдена точная асимптотика вероятностей $P(X(0, n) \in x + B)$.

Интерес к изучению частично однородных цепей Маркова в положительных ортантах обуславливается как математической стороной дела — возникающие здесь задачи, лежащие в русле общей теории больших уклонений, оказываются новыми и интересными; так и прикладной — такие цепи являются весьма точными математическими моделями для описания работы многих основных видов сетей обслуживания и коммуникационных сетей таких, как широко известные сети Джексона, системы поллинга, коммуникационные сети, связанные с алгоритмом АЛОНА, и др. Исследованию этих объектов посвящена обширная литература (библиографию см., например, в [4] и в цитируемых там работах).

Настоящая работа представляет собой попытку выяснить, в какой еще мере возможен асимптотический анализ рассматриваемых цепей Маркова в их *общем виде* без использования различных специальных свойств названных выше конкретных прикладных объектов. Оказалось, что такой анализ в *двумерном случае* вполне возможен, хотя и является трудным. Но уже в трехмерном случае появляются новые принципиальные трудности, которые делают задачу в настоящее время или неразрешимой, или чрезвычайно трудной.

Библиография: 44 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§ 1. Основные утверждения о логарифмической асимптотике для N -частично однородных цепей	7
1.1. Основные обозначения. Основной объект исследования	7
1.2. Ассоциированные цепи и условия невырожденности, регулярности и эргодичности	10
1.3. Моментные условия	15
1.4. Четыре однородные среды и их характеристики	16
1.5. Локальный принцип больших уклонений в пространстве ломаных	21
1.6. Оптимальные траектории	27
1.7. Другие основные результаты. Принцип больших уклонений в $\mathbb{R}^{2+}$	30
1.8. Условные жидкостные пределы	35
1.9. Замечание о больших уклонениях для N -частично однородных цепей Маркова в положительном октанте $\mathbb{R}^{d+}$ пространства $\mathbb{R}^d$	37
1.10. Библиографические замечания	37
§ 2. Доказательства основных утверждений для N -частично однородных цепей	39
2.1. Доказательство лемм 1.1, 1.2	39
2.2. Доказательства теорем 1.2, 1.3	43
2.3. Доказательство теоремы 1.4	54
2.4. Доказательство теорем 1.5, 1.8	58
2.5. Доказательство теорем 1.6, 1.7	61
§ 3. Основные утверждения о логарифмической и точной асимптотиках для больших уклонений 0-частично однородных эргодических цепей	65
3.1. Основные обозначения и условия	65
3.2. Теоремы о логарифмической асимптотике	65
3.3. Теоремы о точной асимптотике	72
§ 4. Доказательство теорем о больших уклонениях 0-частично однородных эргодических цепей	77
4.1. Доказательство теорем 3.1, 3.2	77
4.2. Доказательство лемм 4.1, 4.2	79
4.3. Доказательство лемм 4.3–4.8	82
4.4. Доказательство теорем 3.3, 3.4	88
§ 5. Приложение	99
Основные обозначения	113
Список литературы	114

Введение

В настоящей работе рассматриваются так называемые N -частично однородные (в пространстве), однородные во времени цепи Маркова $X(y, n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, с начальным значением $X(y, 0) = y$, принимающие значения в положительном квадранте

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-00502, 99-01-00504, 00-15-96178) и фонда INTAS (грант № 99-01317).

$\mathbb{R}^{2+} = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Эти цепи характеризуются тем, что для них переходная вероятность $P(y, A) = P(X(y, 1) \in A)$ обладает свойством: *при некотором $N \geq 0$ мера $P(y, dx)$ в области $x_1 > N, y_1 > N$ зависит лишь от $x_2, y_2, x_1 - y_1$, а в области $x_2 > N, y_2 > N$ — лишь от $x_1, y_1, x_2 - y_2$.*

Основным объектом изучения в настоящей работе будет асимптотическое поведение вероятностей

$$P(y, n, \Delta(x)) = P(X(y, n) \in \Delta(x)) \quad (0.1)$$

при $n \rightarrow \infty, x = x(n) \rightarrow \infty$ для N -однородных цепей $X(n)$, где $\Delta(x)$ — квадрат со стороной Δ и вершиной в точке x :

$$\Delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : x_i \leq y_i < x_i + \Delta, i = 1, 2\}.$$

Первоочередной интерес при изучении тех или иных цепей Маркова обычно представляют теоремы эргодичности, т.е. теоремы, устанавливающие условия стабилизации цепей и сходимости распределений цепи (с ростом времени) к стационарному. Для N -частично однородных многомерных блужданий (а также для более общего класса *асимптотически однородных цепей*, у которых зависимость распределений приращений $\xi(y) = X(y, 1) - y$ от y ослабевает при $|y| \rightarrow \infty$) условия эргодичности весьма полно изучены (включая оценки скорости сходимости) в монографии [4] (там же см. ссылки на более ранние работы). Было выяснено, в частности, что сложности в отыскании и описании условий эргодичности резко возрастают с ростом размерности от 1 до 3, а для четырехмерных цепей, скажем, в положительном ортанте, получить общие условия эргодичности, близкие к необходимым, вообще не удастся и, по-видимому, не удастся никогда. Сказанное в еще большей мере относится к цепям большей, чем 4, размерности.

Следующий естественный этап в изучении векторнозначных цепей — исследование вероятностей больших уклонений, т.е. асимптотики вероятностей редких событий, состоящих в попадании траектории цепи в удаленные множества. Мотивация здесь, как и во многих других областях исследований в математике, носит двоякий характер. Одна ее сторона является математической — названное направление примыкает к обширной и популярной сегодня области исследований, которую можно назвать “большие уклонения для случайных процессов”. В этой области рассматриваемые цепи Маркова являются объектом сравнительно новым, они приводят к новым, очень интересным и трудным задачам; в них востребованы многие результаты современных предельных теорем теории вероятностей и, в частности, теоремы о больших уклонениях для случайных блужданий и результаты, относящиеся к граничным задачам для сумм случайных векторов. Новизна задач потребовала разработки новых подходов и методов, которые, видимо, будут использоваться и в дальнейшем.

Отметим также, что исследования вероятностей больших уклонений для эргодических цепей можно рассматривать как прямое дополнение к эргодической теории, так как эти исследования позволяют находить, и очень часто в явном виде, асимптотику стационарных распределений $\pi = \pi(B)$ для удаленных областей B . Сами стационарные распределения найти в явном виде почти никогда не удастся.

Вторая сторона мотивации — прикладная. Интерес к изучению частично однородных цепей Маркова в положительных ортантах обуславливается тем, что такие цепи являются весьма точными математическими моделями для описания работы многих основных видов сетей обслуживания и коммуникационных сетей, таких, как широко

известные сети Джексона, системы поллинга, коммуникационные сети, связанные с алгоритмом АЛОНА и др. Исследованию этих объектов посвящена обширная литература ([2], [4], [38], [21]–[28], [30]–[32], [39], [40], [42], [44]; дополнительную библиографию см., например, в [4] и в цитируемых там работах). Так называемые многоканальные системы обслуживания с очередью приводят к моделям того же типа, но более трудным, представляющим собой частично однородные блуждания в *нескольких* смежных областях. При изучении блужданий на границах этих областей появляются так называемые осциллирующие блуждания, изучению которых также посвящено значительное число работ (см., например, [24] и библиографию там).

Настоящая работа представляет собой попытку выяснить, в какой мере возможен асимптотический анализ рассматриваемых цепей Маркова в их *общем виде* без использования различных специальных свойств названных выше конкретных прикладных объектов (этим же целям, напомним, посвящена значительная часть монографии [4], но применительно, главным образом, к теоремам эргодичности и оценкам скорости сходимости). Оказалось, что такой анализ в *двумерном случае* вполне возможен, хотя и является трудным. Но уже в трехмерном случае появляются новые принципиальные трудности, которые делают задачу в настоящее время или неразрешимой, или чрезвычайно трудной. Здесь наблюдается некоторое отличие от теорем эргодичности (ср. с [4]), доказательство которых в их общем виде в трехмерном случае, как уже отмечалось, оказывается возможным (хотя и трудным), а непреодолимые трудности возникают, начиная с четырехмерного случая.

Результаты об асимптотике вероятностей больших отклонений могут быть использованы для оценки надежности систем, т.е. оценки вероятностей “переполнения систем” или достижения некоторого высокого “критического уровня”. С помощью теорем о больших отклонениях можно доказывать существование тех или иных экспоненциальных моментов стационарных распределений, возникающих в теории управления; можно получать оценки скорости сходимости в теоремах эргодичности в смысле сходимости в соответствующей норме и т. д.

Приведем теперь краткое описание содержания настоящей работы. В §1 найдена так называемая грубая (логарифмическая) асимптотика изучаемых вероятностей. Пусть $s \rightarrow \infty$ – некоторый растущий параметр. Будем считать, что начальное положение y , “конечное положение” x и время n меняются таким образом, что существуют пределы γ, β, T , для которых

$$y \sim s\gamma, \quad x \sim s\beta, \quad n \sim sT$$

(соотношение $a(s) \sim b(s)$ означает, что $\lim_{s \rightarrow \infty} a(s)/b(s) = 1$). Один из основных результатов §1 состоит в том, что

$$\ln P(X(y, n) \in \Delta(x)) \sim -sD(\gamma, \beta, T),$$

где “функция отклонений” $D(\gamma, \beta, T)$ найдена в явном виде. Там же изучена структура наиболее вероятных траекторий, дающих основной вклад в рассматриваемую асимптотику, и установлен ряд других результатов, относящихся к рассматриваемой проблематике. В частности, для эргодических цепей найдена логарифмическая асимптотика стационарных вероятностей $\pi(\Delta(x)) = P(y, \infty, \Delta(x))$ и изучены так называемые переходные явления: указано то время $n_0 = T_0(\gamma)s$, начиная с которого (т.е. при $n \geq n_0$) выполняется

$$\ln P(X(y, n) \in \Delta(x)) \sim \ln \pi(\Delta(x)) \sim -sD(0, \beta),$$

где “функция уклонений” $D(0, \beta)$ представляется в виде

$$D(0, \beta) = \min_{0 \leq i \leq 2} \overline{D}_i(0, \beta),$$

а аналитические функции $\overline{D}_i(0, \beta)$ найдены в явном виде. В разделе 1.10 §1 мы поместили также обзор основных предшествующих результатов, относящихся к изучаемым в настоящей работе задачам.

Для более узкого класса 0-частично однородных эргодических цепей в §3 получены аналогичные результаты, но при более широких моментных условиях на переходные вероятности $P(y, dx)$. Кроме того, при некоторых дополнительных условиях для таких цепей при $n \geq n_0$ установлена точная асимптотика вероятностей $P(X(y, n) \in \Delta(x))$ и $\pi(\Delta(x))$ в виде

$$P(X(y, n) \in \Delta(x)) \sim \pi(\Delta(x)) \sim \Delta^2 \sum_{i=0}^2 \frac{C^{(i)}(\beta)}{s^{\varkappa(i)}} e^{-s \overline{D}_i(0, \beta)},$$

где постоянные $\varkappa(i)$, определяющие степенные члены асимптотики, принимают одно из трех значений 0, 1/2, 3/2, а функции $C^{(i)}(\beta)$ найдены в явном виде.

Вместо квадратов $\Delta(x)$ можно было бы рассматривать и множества более общего вида $x + B$ при любом фиксированном “телесном” B . Мы ограничиваемся рассмотрением квадратов $\Delta(x)$, так как для них изложение проще, а случай произвольного B может быть во многом редуцирован к случаю $B = \Delta(0)$. Интегральные теоремы об асимптотике $P(y, n, sB)$ при $s \rightarrow \infty$ для фиксированного множества B с регулярной границей можно без труда получить из интегро-локальных теорем для вероятностей (0.1) путем разбиения множества B на маленькие квадраты. Для многомерных процессов вероятности вида (0.1) являются наиболее естественным и удобным объектом исследования, так как изучение функции точки $x \sim \beta s$ значительно проще изучения функции множества sB . С другой стороны, интегральный характер вероятностей (0.1) позволяет избежать слишком ограничительных требований, связанных с существованием плотности, необходимых для изучения локальных вероятностей $P(X(y, n) \in dx)$ (решетчатый случай тут составляет исключение; для него интегро-локальные и локальные теоремы совпадают).

Доказательства основных утверждений, приведенных в §1 и §3, помещены в §2 и §4 соответственно. Ряд вспомогательных лемм, необходимых для доказательства основных утверждений §1, §3, изложены в приложении (§5). Это связано с тем, что: а) эти леммы формулируются в несколько более общем виде, чем это необходимо для основных целей настоящей работы (скажем, в леммах 5.1–5.5 размерность d фазового пространства $\mathbb{R}^d$ произвольна), б) эти леммы используются в доказательстве основных утверждений неоднократно, и их удобнее поместить отдельно.

§1. Основные утверждения о логарифмической асимптотике для N -частично однородных цепей

1.1. Основные обозначения. Основной объект исследования. Отметим сразу же, что список основных обозначений помещен также в конце работы.

Положительный квадрант на плоскости $\mathbb{R}^2$ обозначим

$$\mathbb{R}^{2+} = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Пусть $X(n) = X(y, n) \in \mathbb{R}^{2+}$, $n = 0, 1, \dots$, – однородная во времени цепь Маркова со значениями в $\mathbb{R}^{2+}$ и с начальным значением $y \equiv X(y, 0)$. Переходная вероятность цепи за n шагов есть функция

$$P(y, n, B) = P(X(y, n) \in B),$$

где B – борелевское множество из $\mathbb{R}^{2+}$. Функция $P(y, B) = P(y, 1, B)$ есть обычная переходная вероятность цепи.

Цепь Маркова $X(n) = X(y, n)$ называется (см. [4; § 22]) *N -частично однородной в пространстве* (или просто *частично однородной*), если переходная вероятность $P(y, dx)$ обладает свойством: *при некотором $N \geq 0$ мера $P(y, dx)$ в области $x_1 > N$, $y_1 > N$ зависит лишь от x_2 , y_2 , $x_1 - y_1$; в области $x_2 > N$, $y_2 > N$ – лишь от $x_1, y_1, x_2 - y_2$.*

Очевидно, что определение однородности не изменится, если сказать, что в первой области $P(y, dx)$ зависит только от y_2 , $x - y$, а во второй области – только от y_1 , $x - y$. Ясно, что на пересечении областей $x_i > N$, $y_i > N$; $i = 1, 2$, мера $P(y, dx)$ для частично однородной цепи будет зависеть лишь от $x - y$.

Рассмотрим свойства частично однородных цепей подробнее. Пусть $\xi(y)$ есть приращение цепи в точке y за один шаг, т.е.

$$\xi(y) = X(y, 1) - y, \quad P(y, B) = P(y + \xi(y) \in B).$$

Мы будем считать, что случайный вектор $\xi(y)$ определен на пространстве $\mathbb{R}^{2+}$, пополненном бесконечно удаленными точками (y_1, ∞) , (∞, y_2) , (∞, ∞) , так что определены случайные векторы

$$\begin{aligned} \xi(y_1, \infty) &\equiv \xi((y_1, \infty)), & \xi(\infty, y_2) &\equiv \xi((\infty, y_2)), \\ \xi(\infty, \infty) &\equiv \xi((\infty, \infty)) \equiv \xi, \end{aligned}$$

удовлетворяющие условию согласованности

$$\xi(y_1, \infty) \Rightarrow \xi, \quad \xi(\infty, y_2) \Rightarrow \xi$$

при $y_1 \rightarrow \infty$, $y_2 \rightarrow \infty$, где символ $\Rightarrow$ обозначает слабую сходимость случайных векторов по распределению.

В дальнейшем будем предполагать, что все случайные векторы $\xi(y)$ удовлетворяют “в большей или меньшей степени” экспоненциальному условию Крамера о существовании момента $Ee^{\langle \lambda, \xi(y) \rangle}$ при некоторых $\lambda \in \mathbb{R}^2$, не равных 0, где $\langle \lambda, x \rangle$ есть скалярное произведение $\langle \lambda, x \rangle = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Подробнее эти условия будут сформулированы в п. 1.3.

Для $N \geq 0$ рассмотрим множество $\mathcal{L} = \{(N, N), (N, \bullet), (\bullet, N), (\bullet, \bullet)\}$, состоящее из 4 “векторов” L . Для $L \in \mathcal{L}$ обозначим через $\mathbb{R}(L)$ следующие области:

$$\mathbb{R}(L) = \begin{cases} \mathbb{R}(N, N) \equiv \{x : x_1 > N, x_2 > N\} & \text{при } L = (N, N); \\ \mathbb{R}(N, \bullet) \equiv \{x : x_1 > N, x_2 \geq 0\} & \text{при } L = (N, \bullet); \\ \mathbb{R}(\bullet, N) \equiv \{x : x_1 \geq 0, x_2 > N\} & \text{при } L = (\bullet, N); \\ \mathbb{R}(\bullet, \bullet) \equiv \mathbb{R}^{2+} & \text{при } L = (\bullet, \bullet). \end{cases}$$

Определим также оператор $[L, \xi(y)]$ соотношением

$$[L, \xi(y)] = \begin{cases} \xi & \text{при } L = (N, N); \\ \xi(\infty, y_2) & \text{при } L = (N, \bullet); \\ \xi(y_1, \infty) & \text{при } L = (\bullet, N); \\ \xi(y) & \text{при } L = (\bullet, \bullet). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что определение частичной однородности цепи Маркова $X(n) = X(y, n)$ эквивалентно следующему: для любого $L \in \mathcal{L}$ при $y \in \mathbb{R}(L)$ распределения проекций случайных векторов $y + \xi(y) = X(y, 1)$ и $y + [L, \xi(y)]$ на область $\mathbb{R}(L)$ совпадают.

Иными словами, если $y + B \subseteq \mathbb{R}(N, \bullet)$, то $P(y, y + B) = P(\xi(\infty, y_2) \in B)$ не зависит от y_1 , когда y пробегает $\mathbb{R}(N, \bullet)$ (при сохранении свойства $y + B \subseteq \mathbb{R}(N, \bullet)$). Аналогично, $P(y, y + B) = P(\xi(y_1, \infty) \in B)$ не зависит от y_2 , если $y \in \mathbb{R}(\bullet, \infty)$, $y + B \subseteq \mathbb{R}(\bullet, \infty)$. И наконец, $P(y, y + B) = P(\xi \in B)$ не зависит от y , если y и $y + B$ принадлежат $\mathbb{R}(N, N)$. Это означает, в частности, что траектория $X(n)$, $n = 0, 1, \dots$; $X(0) \in \mathbb{R}(N, N)$, до тех пор пока она находится в области $\mathbb{R}(N, N)$, совпадает с траекторией $X(0) + S(n)$, где $S(n) = \xi^{(1)} + \dots + \xi^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательные суммы независимых случайных векторов $\xi^{(k)}$, распределенных как ξ . Другими словами, при $y \in \mathbb{R}(N, N)$ справедливо

$$P(X(y, k) \in B_k, k = 1, \dots, n) = P(y + S(k) \in B_k, k = 1, \dots, n),$$

если $B_k \subseteq \mathbb{R}(N, N)$, $k = 1, \dots, n$.

Очевидно, что если $\xi(y) = (\xi_1(y), \xi_2(y))$ и $\xi_1(y) > -M$, $\xi_2(y) > -M$ с вероятностью 1, то для N -однородных блужданий распределение $\xi(y)$ не зависит от $y = (y_1, y_2)$ при $y_1 > M + N$, $y_2 > M + N$.

Простейшим примером N -частично однородной цепи может служить 0-частично однородная цепь $X(n)$, определяемая следующим соотношением:

$$X(y, n + 1) = (X(y, n) + \xi^{(n)})^+,$$

где $y^+ = (y_1^+, y_2^+)$, $t^+ = \max\{t, 0\}$, $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ независимы и распределены, как ξ . Эта цепь остается 0-частично однородной, если ее усложнить следующим образом.

1. Ввести граничные эффекты, скажем, в случае $X_2(y, n) + \xi_2^{(n)} < 0$ полагать $X_2(y, n + 1) = 0$, $X_1(y, n + 1) = (X_1(y, n) + f_1(X_2(y, n), \xi^{(n)}))^+$, где $f_1(t, u)$ есть функция, определяющая граничный эффект.

2. Скачки $\xi(y)$ с границы области $\mathbb{R}^{2+}$ сделать иными, распределенными, скажем, как $\zeta^{(1)}$, если $y_1 > 0$, $y_2 = 0$; как $\zeta^{(2)}$, если $y_1 = 0$, $y_2 > 0$; как $\zeta^{(0)}$, если $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, так что

$$\xi(y) = \begin{cases} \zeta^{(1)}, & \text{если } y_1 > 0, y_2 = 0; \\ \zeta^{(2)}, & \text{если } y_1 = 0, y_2 > 0; \\ \zeta^{(0)}, & \text{если } y_1 = 0, y_2 = 0. \end{cases}$$

Если $\xi_i > -2N$, $i = 1, 2$, то N -однородной будет следующая простейшая цепь “с отражением”: $X(n + 1) = (|X_1(n) + \xi_1^{(n)}|, |X_2(n) + \xi_2^{(n)}|)$.

Как мы уже говорили во введении, *основным объектом изучения в настоящей работе будет асимптотическое поведение переходных вероятностей*

$$P(y, n, \Delta(x)) = P(X(y, n) \in \Delta(x))$$

при $n \rightarrow \infty$, $x = x(n) \rightarrow \infty$ для N -однородных цепей $X(n)$, где $\Delta(x)$ – квадрат со стороной Δ и вершиной в точке x :

$$\Delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : x_i \leq y_i < x_i + \Delta, i = 1, 2\}.$$

1.2. Ассоциированные цепи и условия невырожденности, регулярности и эргодичности. Введем в рассмотрение множества

$$\Gamma(N, N) = \mathbb{R}^{2+} \setminus \mathbb{R}(N, N), \quad \Gamma(N, \bullet) = \mathbb{R}^{2+} \setminus \mathbb{R}(N, \bullet), \quad \Gamma(\bullet, N) = \mathbb{R}^{2+} \setminus \mathbb{R}(\bullet, N).$$

Для N -частично однородной цепи $X(n)$ можно определить две так называемые *ассоциированные* цепи $X^{(1)}(n) = X^{(1)}(y, n)$ и $X^{(2)}(n) = X^{(2)}(y, n)$, полученные из X “устранением” соответственно границ $\Gamma(N, \bullet)$ и $\Gamma(\bullet, N)$. Другими словами, цепь $X^{(1)}(n)$ определена в верхней полуплоскости $\mathbb{R}^{(\bullet, 0)} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 \geq 0\}$, а цепь $X^{(2)}(n)$ – в правой полуплоскости $\mathbb{R}^{(0, \bullet)} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 \geq 0\}$. Приращения цепи $X^{(1)}(n)$ определяются векторами $\xi(\infty, y_2)$:

$$X^{(1)}(n+1) = X^{(1)}(n) + \xi((\infty, X_2^{(1)}(n)), n);$$

приращения цепи $X^{(2)}(n)$ – векторами $\xi(y_1, \infty)$:

$$X^{(2)}(n+1) = X^{(2)}(n) + \xi((X_1^{(2)}(n), \infty), n),$$

где $\xi(y, 1), \dots, \xi(y, n)$ суть независимые копии случайного вектора $\xi(y)$. Очевидно, что координаты $X_2^{(1)}(n)$ и $X_1^{(2)}(n)$ являются цепями Маркова на полупрямой $\mathbb{R}^{1+} = \{t \in \mathbb{R}^1 : t \geq 0\}$.

Мы будем различать решетчатые (целочисленные) и нерешетчатые цепи.

Цепь $X = X(y, n)$ является *целочисленной*, если

- 1) она принимает значения на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^{2+}$ квадранта $\mathbb{R}^{2+}$: для любого $y \in \mathbb{Z}^{2+}$

$$P(X(y, 1) \in \mathbb{Z}^{2+}) = 1;$$

- 2) для любого вектора $b \in \mathbb{Z}^2$ такого, что $P(\xi = b) > 0$, группа, порожденная множеством $\{a \in \mathbb{Z}^2 : P(\xi = a + b) > 0\}$, совпадает с $\mathbb{Z}^2$.

Очевидно, что цепи $X^{(1)}(n)$, $X^{(2)}(n)$, ассоциированные с целочисленной цепью $X(n)$, тоже являются целочисленными (при естественном распространении приведенного выше определения на случай цепей, определенных в полуплоскостях $\mathbb{R}^{(\bullet, 0)}$, $\mathbb{R}^{(0, \bullet)}$).

Любая цепь, которая получается из целочисленной преобразованием сжатия, называется *решетчатой*.

Цепь $X = X(y, n)$ мы будем называть *нерешетчатой*, если вектор ξ является нерешетчатым, т.е. характеристическая функция $f(t) = Ee^{i\langle t, \xi \rangle}$, $t \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяет свойству $|f(t)| < 1$ при всех $t \neq 0$.

Было бы естественным включить в класс нерешетчатых также цепи, у которых $\xi(y)$ для “достаточно вероятного” множества значений y является нерешетчатым. Однако ради упрощения изложения мы этого делать не будем.

Далее мы везде будем предполагать выполненными следующие два условия:

“условие невырожденности”: для любого вектора $e \in \mathbb{R}^2$, $|e| = 1$, выполняется

$$P(\langle e, \xi \rangle > 0) > 0; \quad (1.1)$$

условие равномерной интегрируемости $\xi(y)$ в форме следующего достаточного условия:

$$\int_0^\infty \sup_{y \in \mathbb{R}^{2+}} P(|\xi(y)| \geq v) dv < \infty. \quad (1.2)$$

Сформулируем теперь *условия регулярности*, которые мы будем накладывать на рассматриваемую цепь $X(y, n)$ (сформулированные выше условия частичной однородности также можно отнести к условиям регулярности). Эти условия будут представлять из себя несколько усиленную версию свойства неприводимости по Харрису.

Напомним, что цепь Маркова $X(y, n)$ в фазовом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ называется *неприводимой по Харрису*, если

(I) найдется множество $V \in \mathcal{B}$ такое, что для любого $y \in \mathcal{X}$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^\infty \{X(y, n) \in V\}\right) > 0; \quad (1.3)$$

(II) существуют вероятностная мера μ на пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, вещественное число $p \in (0, 1)$ и целое число $n_0 \geq 1$ такие, что для любого $B \in \mathcal{B}$ выполняется

$$\inf_{y \in V} P(y, n_0, B) \geq p\mu(B). \quad (1.4)$$

Условие (II) есть условие существования на множестве V равномерно положительной абсолютно непрерывной компоненты распределения $P(y, n_0, \cdot)$ относительно меры μ . Такая мера μ называется *миноризирующей мерой* для $P(y, n_0, \cdot)$.

Иногда под неприводимостью по Харрису понимают также свойства (I₁), (II), где (I₁) получается из (I) приравниванием вероятности в (1.3) к единице, т.е. цепь, стартуя из любой фиксированной точки y , рано или поздно оказывается в множестве V . Свойства (I), (II) иногда называют также *свойством перемешивания на множестве V* .

Если к условиям (I₁), (II) добавить условие *непериодичности* и условие *положительной возвратности множества V* :

$$\sup_{y \in V} E\tau_V(y) < \infty, \quad (1.5)$$

где $\tau_V(y) = \min\{n \geq 1 : X(y, n) \in V\}$, то цепь будет *харрисовой* (или *положительно возвратной по Харрису*) и будет *эргодической* в смысле сходимости по вариации, т.е. вероятность $P(y, n, \cdot)$ при каждом y будет сходиться по вариации к инвариантной мере π при $n \rightarrow \infty$ (см., например, [4], [37] и теорему 1.1 ниже).

Известно (см., например, [4]), что неприводимость по Харрису (т.е. условия (I), (II)) эквивалентна существованию атома x_0 (иногда искусственного) такого, что (1.3) выполняется для $V = \{x_0\}$ (условие (II) для $V = \{x_0\}$ выполнено всегда; если выполнено еще и (1.5), то этот атом будет положительным). Поэтому, чтобы упростить изложение, мы с самого начала будем предполагать выполненным нужный нам усиленный вариант неприводимости (см. ниже) для множества V , замененного на атом.

Итак, для изучаемых цепей в пространстве $\mathcal{X} = \mathbb{R}^{2+}$ мы будем рассматривать следующее условие (атом x_0 отождествим с точкой 0).

(R_1^*) (неприводимость цепи или достижимость нуля). *Для любого $y \in \mathbb{R}^{2+}$*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X(y, n) = 0\}\right) > 0. \quad (1.6)$$

Аналогичное свойство предполагается выполненным для одномерных цепей $X_2^{(1)}$ и $X_1^{(2)}$, т.е. соответственно

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_2^{(1)}(y, n) = 0\}\right) > 0, \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_1^{(2)}(y, n) = 0\}\right) > 0.$$

Как уже отмечалось, нам понадобится несколько более сильное, чем (R_1^*) , условие (R_1) (равномерная достижимость нуля). *Выполнено условие (R_1^*) и для любого фиксированного $M < \infty$ найдется $n = n(M) < \infty$ такое, что*

$$\inf_{|y| \leq M} P(X(y, n) = 0) > 0. \quad (1.7)$$

Аналогичное свойство предполагается выполненным для одномерных цепей $X_2^{(1)}$ и $X_1^{(2)}$ при $M = N + 1$:

$$\inf_{0 \leq y_2 \leq N+1} P(X_2^{(1)}(y, n) = 0) > 0, \quad \inf_{0 \leq y_1 \leq N+1} P(X_1^{(2)}(y, n) = 0) > 0.$$

Другое усиление условия (R_1^*) относится к достижимости из нуля удаленных точек квадранта.

(R_2^*) . *Для любого фиксированного $M < \infty$ найдется $n = n(M) < \infty$ такое, что*

$$P(X(0, n) \in \mathbb{R}(M, M)) > 0; \quad (1.8)$$

аналогичное свойство предполагается выполненным для одномерных цепей $X_2^{(1)}(0, n)$, $X_1^{(2)}(0, n)$ при $M = N$:

$$P(X_2^{(1)}(0, n) > N) > 0, \quad P(X_1^{(2)}(0, n) > N) > 0.$$

Значительно более сильный вариант условия (R_2^*) устанавливает равномерную достижимость из нуля окрестности любой точки x из компакта $V_M = \{x \in \mathbb{R}^{2+} : x_1 \leq M, x_2 \leq M\}$:

(R₂). Нерешетчатый случай. Для любых $\Delta > 0$ и $M < \infty$ найдется $n = n(\Delta, M) < \infty$ такое, что

$$\inf_{x \in V_M} P(X(0, n) \in \Delta(x)) > 0;$$

аналогичное свойство предполагается выполненным для одномерных цепей $X_2^{(1)}(0, n)$, $X_1^{(2)}(0, n)$ при $M = N + 1$: для любого $\Delta > 0$ найдется $n < \infty$ такое, что

$$\inf_{0 \leq v \leq N+1} P(X_2^{(1)}(0, n) \in [v, v + \Delta)) > 0, \quad \inf_{0 \leq v \leq N+1} P(X_1^{(2)}(0, n) \in [v, v + \Delta)) > 0.$$

Решетчатый случай. Те же условия налагаются соответственно на вероятности событий $P(X(0, n) = x)$, $P(X_2^{(1)}(0, n) = v)$, $P(X_1^{(2)}(0, n) = v)$, где $x \in \mathbb{Z}^{2+}$, $v \in \mathbb{Z}^{1+}$.

Отметим, что усиление (R₂) условия (R₂^{*}) предназначается для того, чтобы избежать возможности обращения в нуль изучаемых вероятностей $P(X(y, n) \in \Delta(x))$ ($P(X(y, n) = x)$ в решетчатом случае). Поэтому оно при широких условиях относительно x и Δ оказывается излишним. Оно не потребуется, например, если $\Delta(x) \cap \mathbb{R}(M_0, M_0) \neq \emptyset$. Если же это пересечение пусто, то и в этом случае потребуется лишь одно из трех неравенств в (R₂) в зависимости от того, где располагается множество $\Delta(x)$. Несмотря на это мы для упрощения и унификации изложения будем предполагать условие (R₂) выполненным в большинстве утверждений настоящей работы. В этом случае лемма 1.1, приводимая ниже, будет гарантировать нужную нам положительность изучаемых вероятностей.

Из условий (R₁), (R₂) будет следовать, что для любых двух точек y и x из $\mathbb{R}^{2+}$, удаленных друг от друга не более чем на некоторое фиксированное расстояние, вероятность попасть из y в $\Delta(x)$ за подходящее число шагов n будет равномерно отделена от 0 для любого фиксированного $\Delta > 0$. Точнее, справедлива

ЛЕММА 1.1. Пусть для частично однородной цепи Маркова $X(y, n)$ выполнены условия (R₁), (R₂). Тогда в нерешетчатом случае для любого $\Delta > 0$ найдется $n_0 < \infty$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется

$$\inf_{x, y \in \mathbb{R}^{2+}, |x-y| \leq 1} P(X(y, n) \in \Delta(x)) > 0;$$

в решетчатом случае найдется $n_0 < \infty$ такое, что для всех $n \geq n_0$ выполняется

$$\inf_{x, y \in \mathbb{Z}^{2+}, |x-y| \leq \sqrt{2}} P(X(y, n) = x) > 0.$$

Лемма 1.1 будет доказана в разделе 2.1. Анализируя доказательство леммы 1.1, можно заметить, что условия (R₁), (R₂) достаточно проверять не для всех M , а только для некоторого $M_0 = M_0(\Delta)$, зависящего от Δ и от распределений вектора ξ и цепей $X^{(1)}$, $X^{(2)}$; тогда эти условия будут выполняться и для всех остальных M . В широких дополнительных предположениях константа M_0 не зависит от Δ . Например, если для некоторого $T < \infty$ и для любого $\Delta > 0$ найдется $n = n(\Delta) < \infty$ такое, что

$$\inf_{0 \leq x_2 \leq N} P(X_2^{(1)}(0, n) \in [x_2, x_2 + \Delta), \min_{1 \leq k \leq n} X_1^{(1)}(0, k) \geq -T) > 0,$$

$$\inf_{0 \leq x_1 \leq N} P(X_1^{(2)}(0, n) \in [x_1, x_1 + \Delta), \min_{1 \leq k \leq n} X_2^{(2)}(0, k) \geq -T) > 0,$$

то константа M_0 зависит только от распределения вектора ξ .

Для другой широкой группы дополнительных предположений число M_0 , для которого достаточно проверять условия (R_1) , (R_2) , можно отождествить с N . Именно, если выполнено условие (R_2^*) при $M = N$ (это условие по сути необходимо для полученных результатов) и, кроме того, скажем, распределение ξ имеет абсолютно непрерывную компоненту с плотностью, положительной в области $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\}$, то нужные нам условия (1.6), (1.7) будут выполнены всегда.

Вернемся к условию (R_1^*) и отметим еще раз, что это условие приведено не в самом общем его виде. В общем виде это есть условие неприводимости по Харрису, которое состоит в существовании некоторого достижимого множества V (такого, что $P(\tau_V(y) < \infty) > 0$ для всех y), скажем, $V = V_N$, на котором мера $P(y, n_0, \cdot)$ допускает миноранту $p\mu(\cdot)$ (см. (1.4)). Редукция от условий общего вида к условию (R_1^*) происходит с помощью ставшей уже стандартной конструкции Нуммелина–Атреа–Нея (см., например, [4], [37]). В условиях (R_2^*) , (R_2) , соответствующих общей версии условия (R_1^*) , начальное значение $y = 0$ следует заменить случайным начальным значением с распределением μ . Мы предпочитаем в настоящей работе условие неприводимости в его “редуцированном” виде (R_1) из очевидных соображений: оно значительно проще в записи и использовании. В большинстве задач, представляющих интерес в приложениях, нулевая точка оказывается положительным атомом эргодических цепей в их исходном виде, без какой-либо редукции.

Случай *эргодических* цепей мы будем выделять с помощью следующих условий, достаточных для существования положительного атома $x_0 = 0$ (см. (1.5); эти условия при выполнении (R_1) в известном смысле близки к необходимым, см. [4]).

Обозначим

$$a(y) = (a_1(y), a_2(y)) = E\xi(y)$$

вектор средних приращений цепи $X(y, n)$ из точки y за один шаг. Пусть, далее,

$$a = (a_1, a_2) = E\xi.$$

Если выполнены условия (R_1) , (R_2) и $a_2 < 0$, то одномерная цепь $X_2^{(1)}(n)$ эргодична. Обозначим стационарное распределение, отвечающее этой цепи, через $\pi_2^{(1)}$. Тогда среднее приращение цепи $X_1^{(1)}(n)$ относительно стационарного распределения $\pi_2^{(1)}$ имеет вид

$$a^{(1)} = \int_0^\infty a_1((\infty, y_2)) \pi_2^{(1)}(dy_2).$$

Аналогично вводится среднее приращение цепи $X_2^{(2)}(n)$ в случае $a_1 < 0$:

$$a^{(2)} = \int_0^\infty a_2((y_1, \infty)) \pi_1^{(2)}(dy_1).$$

Условие эргодичности цепи $X(n)$ мы сформулируем в следующей форме:

(E). *Выполнено одно из следующих трех условий:*

- 1) $a_1 < 0, a_2 < 0, a^{(1)} < 0, a^{(2)} < 0$;
- 2) $a_1 < 0, a_2 > 0, a^{(2)} < 0$;
- 3) $a_1 > 0, a_2 < 0, a^{(1)} < 0$.

Если выполнены условия (R_1) , (R_2) , (E), то выполнены условия (I_1) , (II), (1.5) при $V = \{0\}$ и цепь $X(n)$ является харрисовой и, следовательно, эргодической в смысле сходимости по вариации (см., например, [4]).

1.3. Моментные условия. Нам понадобятся следующие условия об экспоненциальном убывании “хвостов” распределений приращений $\xi(y)$. Рассмотрим сначала условие Крамера

(M₁). Для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^{2+}} \mathbb{E} e^{\delta |\xi(y)|} < \infty.$$

Условие (M₁) означает, в частности, что функции

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{E} e^{\langle \lambda, \xi \rangle}, \quad \varphi(\lambda, y) = \mathbb{E} e^{\langle \lambda, \xi(y) \rangle}$$

аналитичны в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$.

Одностороннее условие Крамера:

(M₁⁺). Для некоторого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, выполняется

$$\overline{\varphi}(\lambda) \equiv \sup_{y \in \mathbb{R}^{2+}} \varphi(\lambda, y) < \infty.$$

Обозначим

$$\Phi = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 : \varphi(\lambda) < \infty\}, \quad \Phi_1 = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 : \varphi(\lambda) \leq 1\} \subseteq \Phi.$$

Нам понадобится также либо условие

(M₂) для всех $\lambda \in \Phi$

$$\overline{\varphi}(\lambda) < \infty,$$

либо несколько более слабое условие

(M₂⁽⁰⁾) для всех $\lambda \in \Phi_1$

$$\overline{\varphi}(\lambda) < \infty.$$

Обозначим группы условий (M₁), (M₂) и (M₁), (M₂⁽⁰⁾) через (M) и (M⁽⁰⁾) соответственно.

Из результатов монографии [4] вытекает, в частности, следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия (R₁), (E), (M₁⁺). Тогда цепь $X(n)$ эргодична в смысле сходимости по вариации: существует единственное инвариантное распределение π в $\mathbb{R}^{2+}$ такое, что при каждом $y \in \mathbb{R}^{2+}$ (если цепь целочисленна, то $y \in \mathbb{Z}^{2+}$)

$$\Delta(y, n) \equiv \sup_{B \in \mathcal{B}} |\mathbb{P}(X(y, n) \in B) - \pi(B)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, при некоторых $C < \infty$, $\rho > 0$, $h > 0$ выполняется

$$\begin{aligned} \max_n P(0, n, \{x : |x| > t\}) &< C e^{-\rho t}, \\ \sup_{|y| < hn} \Delta(y, n) &< C e^{-\rho n}, \quad \pi(\{x : |x| > t\}) < C e^{-\rho t}. \end{aligned}$$

Непериодичность цепей Маркова в этой теореме обеспечивается условиями достижимости и непериодичностью блуждания в $\mathbb{R}(N, N)$. Выполнение (I₁) вытекает из (1.8) и (E).

1.4. Четыре однородные среды и их характеристики. Напомним, что для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ мы обозначили через

$$\Delta(x) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i \leq y_i < x_i + \Delta; i = 1, 2\}$$

квадрат со стороной $\Delta > 0$ и с вершиной в точке x . Мы будем изучать асимптотическое поведение последовательности

$$\ln P(X(y, n) \in \Delta(x)), \quad n \rightarrow \infty,$$

где в случае целочисленной цепи точки x, y будут принадлежать целочисленной решетке $\mathbb{Z}^{2+}$, а квадрат $\Delta(x)$ будет заменен на целочисленную точку x (что соответствует $\Delta = 1$); в нерешетчатом случае Δ можно выбирать сколь угодно малым. Везде в дальнейшем мы будем следовать этому соглашению.

Для случайного блуждания в $\mathbb{R}^{2+}$ (или $\mathbb{Z}^{2+}$) условно можно выделить четыре среды, в которых законы, описывающие это блуждание, можно считать однородными.

Третья среда – это пространство $\mathbb{R}(N, N)$, где, как уже отмечалось, блуждание $X(y, n)$ совпадает с процессом $y + S(n)$ суммирования независимых одинаково распределенных векторов. Тут наиболее вероятные траектории, соединяющие точки $y \in \mathbb{R}(N, N)$ и $x \in \mathbb{R}(N, N)$, являются “почти” прямолинейными (после соответствующих нормировок), а сами вероятности описываются с помощью функции уклонений

$$\Lambda^{(3)}(\alpha) \equiv \Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - \ln \varphi(\lambda)\}.$$

Именно, при $n \rightarrow \infty$ и любом достаточно большом $\Delta > 0$

$$\begin{aligned} \ln P(X(y, n) \in \Delta(x); X(y, k) \in \mathbb{R}(N, N), k = 1, \dots, n) \\ \sim \ln P(S(n) \in \Delta(y - x)) \sim -n\Lambda\left(\frac{y - x}{n}\right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $S(n) = \xi^{(1)} + \dots + \xi^{(n)}$, $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ независимы и распределены, как ξ ([13], [14]). Соотношение $a_n \sim b_n$ означает, что $a_n = b_n(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$. В нерешетчатом случае (см. [13], [14]) $\Delta > 0$ можно выбрать любым.

Что касается прямолинейности наиболее вероятных траекторий $S(k)$, $k = 1, \dots, n$, ведущих из точки $S(0) = 0$ в множество $\Delta(y - x)$, то здесь необходимо сделать одно существенное замечание. Мы проиллюстрируем его на примере одномерного случая, когда $\xi^{(k)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda\xi}$, $\lambda_+ = \sup\{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\}$, $\alpha_+ = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_+} \varphi(\lambda)/\varphi'(\lambda)$. Известно (см., например, [10], [15]), что если

$$\alpha_+ < \infty, \quad \lambda_+ < \infty, \quad (1.10)$$

то функция уклонений при $\alpha \geq \alpha_+$ линейна:

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+) + \lambda_+(\alpha - \alpha_+). \quad (1.11)$$

Обозначим $s_n = s_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ломаную (кусочно-линейную или ступенчатую), построенную по узлам $(k/n, S(k)/n)$, где $S(0) = 0$, так что

$$s_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{S(k)}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Пусть, далее, $U_\varepsilon(f)$ есть ε -окрестность (в равномерной метрике) абсолютно непрерывной функции $f = f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $f(0) = 0$. Тогда (см. [5], [15], [34]) если $\varepsilon = \varepsilon_n \rightarrow 0$ достаточно медленно, то при $n \rightarrow \infty$

$$\ln P(s_n \in U_\varepsilon(f)) \sim -n \int_0^1 \Lambda(f'(t)) dt. \quad (1.12)$$

При этом для “достаточно хороших” множеств A выполняется

$$\ln P(s_n \in A) \sim -n \inf_{f \in A \cap C_1(0,1)} \int_0^1 \Lambda(f'(t)) dt, \quad (1.13)$$

где $C_1(0, 1)$ – класс абсолютно непрерывных функции $f = f(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $f(0) = 0$.

Будем называть функцию $f \in A$ *наиболее вероятной траекторией в A* , если правая часть (1.13) совпадает с

$$-n \int_0^1 \Lambda(f'(t)) dt.$$

Иными словами, в этом случае

$$\ln P(s_n \in A) \sim \ln P(s_n \in U_\varepsilon(f)) \sim -n \int_0^1 \Lambda(f'(t)) dt.$$

Если функция f такова, что $f'(t) \geq \alpha_+$ при всех $t \in [0, 1]$, то из (1.11) следует, что правая часть в (1.12) равна

$$-n(\Lambda(\alpha_+) + \lambda_+(f(1) - \alpha_+)) = -n\Lambda(f(1)) \sim -\ln P(S(n) \in \Delta(nf(1))).$$

Таким образом, для любых функций $f = f(t)$ таких, что $f'(t) \geq \alpha_+$, логарифмы вероятностей событий, состоящих в том, что случайная ломаная s_n “идет вдоль траектории f ”, асимптотически эквивалентны $-n\Lambda(f(1))$ и имеют ту же асимптотику, что и $\ln P(S(n) \in \Delta(nf(1)))$. Это означает, что все эти траектории $f = f(t)$ оказываются “наиболее вероятными траекториями” в множестве траекторий, достигающих в момент $t = 1$ квадрата $f(1) + \Delta(0)/n$. В частности, в качестве одной из типичных наиболее вероятных траекторий мы можем взять функцию $f_0(t) = \alpha t$, $\alpha = f(1) \geq \alpha_+$. Заметим, что при более точной постановке задачи (при рассмотрении асимптотики самих вероятностей, а не их логарифмов) функция $f_0(t) = \alpha t$ не будет наиболее вероятной. Как показано в [1]–[3], при весьма широких предположениях условное распределение процесса $s_n(\cdot)$ при условии $\{S(n) \in \Delta(x)\}$, где $x/n \rightarrow \alpha \geq \alpha_+$, сходится в подходящем смысле к процессу (разрывному)

$$s(t) = \alpha_+ t + (\alpha - \alpha_+) I_{\{\eta < t \leq 1\}}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где I_A – индикатор множества A , случайная величина η равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Этот процесс $s(t)$ и будет определять “наиболее вероятную” траекторию в более точной постановке задачи.

Во всех остальных случаях, т.е. когда (1.10) не выполнено или $x/n \rightarrow \alpha \leq \alpha_+$, таких явлений не возникает. Более точно, в случае $x/n \rightarrow \alpha$, $\alpha \in [\alpha_-, \alpha_+]$, где

$\alpha_- = \lim_{\lambda \downarrow \lambda_-} \varphi(\lambda)/\varphi'(\lambda)$, $\lambda_- = \inf\{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\}$, условным предельным процессом всегда будет непрерывный процесс $s(t) = \alpha t$. Такой вид предельного процесса означает, грубо говоря, что движение блуждающей частицы из точки 0 в точку x происходит с постоянной скоростью α .

Со случаем $\lambda_+ < \infty$ связан и другой феномен, с которым нам придется иметь дело. Ниже нам придется сравнивать вероятности $P(S(k) \in \Delta(x))$ при разных $k = 1, 2, \dots$. Как мы уже видели, при $\alpha = x/n$

$$\ln P(S(n) \in \Delta(x)) \sim -n\Lambda(\alpha) = -x \frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha}.$$

Убедимся, что функция $\Lambda(\alpha)/\alpha$ в случае $\varphi(\lambda_+) < 1$ будет убывающей при $\alpha > E\xi$.

Действительно, так как $\Lambda'(\alpha) = \lambda(\alpha)$ есть значение λ , при котором достигается $\sup_{\lambda} \{\lambda\alpha - \ln \varphi(\lambda)\}$, то (см. [15], [16])

$$\left(\frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha} \right)' = \frac{\lambda(\alpha)\alpha - \Lambda(\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\lambda(\alpha)\alpha - \lambda(\alpha)\alpha + \ln \varphi(\lambda(\alpha))}{\alpha^2} = \frac{\ln \varphi(\lambda(\alpha))}{\alpha^2}.$$

Поскольку $0 < \lambda(\alpha) \leq \lambda_+$ при $\alpha > E\xi$ и, стало быть, $\varphi(\lambda(\alpha)) < 1$ (неравенство $\varphi(\lambda_+) < 1$ с необходимостью влечет $E\xi < 0$), то мы получаем $(\Lambda(\alpha)/\alpha)' < 0$. Это означает, что $\inf_{\alpha} \Lambda(\alpha)/\alpha$ достигается при $\alpha = \infty$, что соответствует, грубо говоря, тому, что *максимум* $P(S(k) \in \Delta(x))$ *достигается при* $k = 1$.

Отметим еще, что если $\varphi(\lambda_+) = 1$ и дополнительно $\alpha_+ < \infty$, то при $\alpha \geq \alpha_+$

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+) + (\alpha - \alpha_+)\lambda_+ = \alpha_+\lambda_+ - \ln \varphi(\lambda_+) + (\alpha - \alpha_+)\lambda_+ = \lambda_+\alpha, \quad \frac{\Lambda(\alpha)}{\alpha} = \lambda_+,$$

и, стало быть, асимптотика $\ln P(S(n) \in \Delta(x)) \sim -\lambda_+x$ при $x \rightarrow \infty$, $n \leq x/\alpha_+$ перестает зависеть от n .

Все описанные выше эффекты, связанные с (1.10) или с неравенствами $\lambda_+ < \infty$, $\varphi(\lambda_+) \leq 1$, возможны, конечно, и в двумерном случае.

Вернемся к описанию однородных сред. Третья среда, которую можно отождествить с $\mathbb{R}(N, N)$, была уже описана, и в ней был выяснен характер наиболее вероятных траекторий.

Другие две среды (*первая и вторая*) расположены соответственно вдоль полос $\Gamma(N, \bullet)$ и $\Gamma(\bullet, N)$. Рассмотрим, например, первую однородную среду, соответствующую блужданию вдоль полосы $\Gamma(\bullet, N)$. Здесь траекториям из точки $y \in \Gamma(\bullet, N)$ в точку $x \in \Gamma(\bullet, N)$ тоже можно придать структуру независимых одинаково распределенных приращений (с точностью до первого и последнего элементов). Это суть приращения по циклам цепи Маркова $X^{(1)}(n)$, образованным попаданиями координаты $X_2^{(1)}(n)$ в атом $x_2 = 0$. Определим случайные величины $\tau^{(1)}$ и $\zeta^{(1)}$ (вообще говоря, несобственные):

$$\tau^{(1)} = \inf\{n \geq 1 : X_2^{(1)}(0, n) = 0\}, \quad \zeta^{(1)} = X_1^{(1)}(0, \tau^{(1)}).$$

Очевидно, что в случае $a_2 < 0$ справедливо $P(\tau^{(1)} < \infty) = 1$ и средняя длина цикла $\tau^{(1)}$ эргодической цепи $X_2^{(1)}$ по возвращению в точку $x_2 = 0$ равна $E\tau^{(1)} = \frac{1}{\pi^{(1)}(\{0\})}$, а

среднее приращение на этом цикле равно $E\zeta^{(1)} = a^{(1)}E\tau^{(1)} = a^{(1)}\frac{1}{\pi^{(1)}(\{0\})}$. Поэтому при $a_2 < 0$ неравенства $E\zeta^{(1)} < 0$ и $a^{(1)} < 0$ выполняются одновременно.

Аналогичное соотношение верно и в случае $a_1 < 0$: неравенства $E\zeta^{(2)} < 0$ и $a^{(2)} < 0$ выполняются одновременно.

Длина цикла $\tau^{(1)}$ и приращение на цикле $\zeta^{(1)}$ образуют пару $(\tau^{(1)}, \zeta^{(1)})$, которой соответствует функция уклонений

$$\Lambda^{(1)}(\alpha, t) = \sup_{\lambda_1, \mu} \{ \lambda_1 \alpha_1 + t\mu - \ln E e^{\lambda_1 \zeta^{(1)} + \mu \tau^{(1)}} \}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_1) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^1. \quad (1.14)$$

Очевидно, что функция $\Lambda^{(1)}(\alpha, t) = \Lambda^{(1)}((\alpha_1, \alpha_2), t)$ не зависит от второй координаты α_2 вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Использование векторного аргумента α в определении функции $\Lambda^{(1)}(\alpha, t)$ нам понадобится в дальнейшем.

Обозначим

$$T_k^{(1)} = \sum_{j=1}^k \tau^{(1)}(j), \quad Z_k^{(1)} = \sum_{j=1}^k \zeta^{(1)}(j),$$

где пары $(\tau^{(1)}(k), \zeta^{(1)}(k))$ независимы при $k = 1, 2, \dots$ и распределены, как $(\tau^{(1)}, \zeta^{(1)})$. При $y, x \in \Gamma(\bullet, N)$ асимптотика логарифма вероятности

$$\ln P(X(y, n) \in \Delta(x); X(y, k) \notin \Gamma(N, \bullet), k = 1, \dots, n) \quad (1.15)$$

будет совпадать с асимптотикой

$$\ln P(X^{(1)}(y, n) \in \Delta(x)),$$

которая, в свою очередь, будет совпадать с асимптотикой логарифма суммы вероятностей непересекающихся событий

$$\ln \sum_{k=1}^n P(T_k^{(1)} = n, Z_k^{(1)} \in \Delta(y - x)) \quad (1.16)$$

(если положить для простоты $x_2 = y_2 = 0$ и вместо квадрата $\Delta(x)$ рассмотреть множество $\Delta^{(1)}(x) = \{y : x_1 \leq y_1 < y_1 + \Delta, y_2 = 0\}$, то $\ln P(X^{(1)}(y, n) \in \Delta(x))$ и (1.16) просто совпадают).

В силу сказанного асимптотика логарифмов вероятностей (1.15), (1.16) будет определяться значением

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq k \leq n} k \Lambda^{(1)}\left(\left(\frac{x_1 - y_1}{k}, 0\right), \frac{n}{k}\right) &\sim n \min_{0 < v \leq 1} v \Lambda^{(1)}\left(\left(\frac{x_1 - y_1}{nv}, 0\right), \frac{1}{v}\right) \\ &\equiv n \Lambda^{(1)}\left(\left(\frac{x_1 - y_1}{n}, 0\right)\right), \end{aligned}$$

где для $\alpha \in \mathbb{R}^2$

$$\Lambda^{(1)}(\alpha) = \inf_{v > 0} v \Lambda^{(1)}\left(\frac{\alpha}{v}, \frac{1}{v}\right). \quad (1.17)$$

Здесь, аналогично предыдущему, может оказаться, что $\inf$ достигается при $v = 0$, что соответствует тому, что наиболее вероятная траектория, соединяющая точки y и x из области $\Gamma(\bullet, N)$, в течении “почти всего” времени лежит вне ее, т.е. по сути лежит в третьей среде однородности. Таким образом, первая среда однородности включает в себя в известном смысле и третью среду. Если $\inf$ в (1.17) достигается при $v > 0$ (очевидно, что при $v = \infty$ он достигаться не может), то наиболее вероятная траектория будет долю времени cn , $c > 0$, находиться в $\Gamma(\bullet, N)$. Функция $\Lambda^{(1)}(\alpha)$ полунепрерывна снизу и выпукла, т.е. обладает основными свойствами функции уклонений (см. лемму 1.2); она играет роль функции уклонений, соответствующей первой среде однородности.

Аналогичным образом определяются величины $\tau^{(2)}$, $\zeta^{(2)}$, $T^{(2)}$, $Z^{(2)}$, функции $\Lambda^{(2)}(\alpha, t)$, $\Lambda^{(2)}(\alpha)$ (которые не зависят от первой координаты векторного аргумента $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$) и описывается *вторая среда однородности*.

Отметим, далее, что если, скажем, цепь $X_2^{(1)}(y, n)$ не эргодична ($E\xi_2 > 0$), то случайные величины $\tau^{(1)}$, $\zeta^{(1)}$ будут несобственными. Однако при этом все сказанное о грубой асимптотике $P(X^{(1)}(y, n) \in \Delta(x))$ остается в силе, если в определении функции уклонений $\Lambda^{(1)}(\alpha, t)$ в (1.14) операцию E выполнить по событию $\{\tau^{(1)} < \infty\}$.

Наконец, можно ввести в рассмотрение “нулевую среду однородности” цепи $X(n)$, которая соответствует пребыванию начала и конца последовательности $X(n)$ в окрестности квадрата V_N . Ясно, что для эргодической цепи $\frac{1}{n} \ln P(X(y, n) \in \Delta(x)) \rightarrow 0$ при $|y| \leq C$, $|x| \leq C$, $C = \text{const}$ и $n \rightarrow \infty$. Это означает, что пребыванию в окрестности нуля соответствует вырожденная функция уклонений $\Lambda^{(0)} \equiv 0$. В неэргодическом случае константа $\Lambda^{(0)}$ может быть положительной. Введем в рассмотрение длину цикла $\tau^{(0)} = \inf\{n \geq 1 : X(0, n) = 0\}$ по возвращению цепи в начало координат. Обозначим $T_k^{(0)} = \sum_{j=1}^k \tau^{(0)}(j)$, где случайные величины $\tau^{(0)}(j)$ независимы и распределены, как $\tau^{(0)}$. Тогда при $|y| \leq C$, $|x| \leq C$ логарифмическая асимптотика вероятности $P(X(y, n) \in \Delta(x))$ совпадает с асимптотикой $\ln \sum_{k=1}^n P(T_k^{(0)} = n)$. Она определяется константой

$$\Lambda^{(0)} \equiv \inf_{v>0} v \Lambda^{(0)} \left(\frac{1}{v} \right), \quad (1.18)$$

где

$$\Lambda^{(0)}(\alpha) = \sup_{\lambda} \{ \lambda \alpha - \ln E(e^{\lambda \tau^{(0)}}; \tau^{(0)} < \infty) \}.$$

В подтверждение сказанного выше заметим, что если цепь $X(n)$ эргодична, то $P(\tau^{(0)} < \infty) = 1$, $\inf$ в (1.17) достигается при $v = E\tau^{(0)}$ и выполняется $\Lambda^{(0)} \equiv 0$.

Приведем теперь утверждение, описывающее некоторые свойства функции уклонений $\Lambda(\alpha) = \Lambda^{(3)}(\alpha)$ и вновь введенных функций уклонений $\Lambda^{(j)}(\alpha)$. Обозначим для $j = 1, 2$

$$\Phi_1^{(j)} = \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : E(e^{\lambda_1 \zeta^{(j)} + \lambda_2 \tau^{(j)}}; \tau^{(j)} < \infty) \leq 1 \}.$$

ЛЕММА 1.2. Пусть выполнены условия (R_1) , (R_2) , (M) . Тогда

1. Функции $\Lambda^{(j)}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$, $j = 0, 1, 2, 3$, выпуклы и полунепрерывны снизу; последнее означает, что

$$\liminf_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \Lambda^{(j)}(\alpha) \geq \Lambda^{(j)}(\alpha_0);$$

2. Существуют пределы

$$\Lambda_0^{(j)}(\alpha) = \lim_{v \downarrow 0} v \Lambda^{(j)}(\alpha/v), \quad j = 1, 2, 3,$$

где

$$\Lambda_0^{(3)}(\alpha) = \Lambda_0(\alpha) = \sup_{\lambda \in \Phi} \langle \lambda, \alpha \rangle, \quad (1.19)$$

и для $j = 1, 2$

$$\Lambda_0^{(j)}(\alpha) = \alpha_j \sup_{\lambda \in \Phi_1^{(j)}} \lambda_1; \quad (1.20)$$

3. Функции $\Lambda_0^{(j)}(\alpha)$, $j = 1, 2, 3$, выпуклы и полунепрерывны снизу;

4. Функции $\Lambda^{(j)}(\alpha)$, $j = 0, \dots, 3$, где $\Lambda^{(0)}(\alpha) = \Lambda^{(0)}$, удовлетворяют неравенствам согласованности:

$$\Lambda^{(0)} \leq \Lambda^{(j)}(0), \quad j = 1, 2, 3;$$

для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\Lambda^{(1)}(\alpha) \leq \Lambda^{(3)}((\alpha_1, 0)), \quad \Lambda^{(2)}(\alpha) \leq \Lambda^{(3)}((0, \alpha_2)).$$

Этим же неравенствам удовлетворяют функции $\Lambda_0^{(j)}(\alpha)$, $j = 0, \dots, 3$, где $\Lambda_0^{(0)}(\alpha) = \Lambda^{(0)}(\alpha) = \Lambda^{(0)}$.

Доказательство леммы 1.2 будет приведено в разделе 2.1.

1.5. Локальный принцип больших уклонений в пространстве ломаных.

Получить принцип больших уклонений для цепи $X(y, k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, в пространстве всех возможных “предельных” траекторий весьма затруднительно. Мы будем рассматривать принцип больших уклонений в несколько суженном пространстве, состоящем из кусочно-линейных функций. Предварительно сформулируем принцип больших уклонений для прямолинейных элементов кусочно-линейных функций. Для этого опишем сначала несколько более формально среды однородности для траектории $(X(0), \dots, X(n)) = \vec{X}(n)$. Выше в (1.13) в качестве нормирующего множителя мы использовали $1/n$. Для процесса $\vec{X}(n)$ нам могут понадобиться и другие нормирующие множители вида $1/s$, где в качестве s в зависимости от обстановки будет выбираться одно из чисел n , $|x|$, $|y|$, $|x - y|$. Чаще всего это будет $s = |x|$ (для эргодических цепей) и $s = n$ (для неэргодических цепей).

Итак, фиксируем нормирующий параметр s таким образом, что при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{n}{s} \rightarrow T < \infty, \quad (1.21)$$

где случай $T = 0$ не исключается. Кроме того, фиксируем две функции $h = h(s)$ и $m = m(s)$ такие, что $h \geq N$, $h = o(s)$, $m = o(n)$ при $s \rightarrow \infty$.

Мы будем говорить, что траектория $\vec{X}(n)$ лежит в нулевой среде однородности, если $|y| \leq h$, $|X(y, n)| \leq h$. Заметим попутно, что в случае нулевой среды естественно положить $s = n$.

Мы будем говорить, что *траектория $\vec{X}(n)$ лежит в первой среде однородности*, если $y_2 \leq h$, $X_2(y, n) \leq h$, $X_1(y, i) > N$ при всех i , $t < i < n - t$.

Траектория $\vec{X}(n)$ лежит во второй среде однородности, если $y_1 \leq h$, $X_1(y, n) \leq h$, $X_2(y, i) > N$ при всех i , $t < i < n - t$.

Будем говорить, наконец, что *траектория $\vec{X}(n)$ лежит в третьей среде однородности*, если $X(y, i) \in \mathbb{R}(N, N)$ при всех i , $t < i < n - t$.

Обозначим для $j = 0, \dots, 3$ через $A(j)$ событие

$$A(j) = \{\text{траектория } \vec{X}(n) \text{ лежит в } j\text{-й среде однородности}\}.$$

Как правило, мы будем предполагать, наряду с (1.21), что векторы $y = y(s)$, $x = x(s)$, определяющие начало и конец траектории $\vec{X}(n)$, удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{y}{s} = \gamma, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{x}{s} = \beta. \quad (1.22)$$

Очевидно, что если траектория $\vec{X}(n)$ лежит в нулевой среде однородности, то $\gamma = \beta = 0$. Эту область в $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{2+} \times \mathbb{R}^{2+}$ обозначим $\mathcal{A}^{(0)} = \{(0, 0)\}$. Если траектория $\vec{X}(n)$ лежит в первой или во второй среде, то соответственно $\gamma_2 = 0, \beta_2 = 0$ или $\gamma_1 = 0, \beta_1 = 0$. Эти области в $\mathcal{A}$ обозначим соответственно $\mathcal{A}^{(1)} = \{(\gamma, \beta) \in \mathcal{A} : \gamma_2 = 0, \beta_2 = 0\} = \Gamma(\bullet, 0) \times \Gamma(\bullet, 0)$ и $\mathcal{A}^{(2)} = \{(\gamma, \beta) \in \mathcal{A} : \gamma_1 = 0, \beta_1 = 0\} = \Gamma(0, \bullet) \times \Gamma(0, \bullet)$. Область $\mathcal{A}^{(3)}$ положим по определению равной $\mathcal{A}$.

Мы будем говорить, что *векторы y , x , удовлетворяющие (1.22), согласованы со средой j* , если для предельных векторов γ, β выполняется $(\gamma, \beta) \in \mathcal{A}^{(j)}$. Если $(\gamma, \beta) \notin \mathcal{A}^{(j)}$, то мы будем говорить, что векторы y, x *не согласованы со средой j* .

Нетрудно видеть, что если векторы y, x , удовлетворяющие (1.22), согласованы со средой j , то в широких предположениях $P(X(y, n) \in \Delta(x), A(j)) > 0$, а если не согласованы, то всегда для всех достаточно больших s выполняется $P(X(y, n) \in \Delta(x), A(j)) = 0$.

Нетрудно видеть также, что имеют место следующие включения (первое для $j = 1, 2, 3$):

$$\{X(y, n) \in \Delta(x), A(0)\} \supseteq \{X(y, n) \in \Delta(x), A(j)\} \text{ при } \gamma = \beta = 0; \quad (1.23)$$

$$\{X(y, n) \in \Delta(x), A(1)\} \supseteq \{X(y, n) \in \Delta(x), A(3)\} \text{ при } \gamma_2 = \beta_2 = 0; \quad (1.24)$$

$$\{X(y, n) \in \Delta(x), A(2)\} \supseteq \{X(y, n) \in \Delta(x), A(3)\} \text{ при } \gamma_1 = \beta_1 = 0. \quad (1.25)$$

Для $\alpha \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ обозначим $U_\varepsilon(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{R}^2 : |\alpha - \beta| < \varepsilon\}$. Смысл термина “среда однородности” поясняется в какой-то мере следующим утверждением.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены условия (R_1) , (R_2) , (M) . Пусть для функций $y = y(s) \in \mathbb{R}^{2+}$, $x = x(s) \in \mathbb{R}^{2+}$, $n = n(s) \in \{1, 2, \dots\}$ и констант $\gamma \in \mathbb{R}^{2+}$, $\beta \in \mathbb{R}^{2+}$, $T \geq 0$ выполнены соотношения (1.22), (1.21). Пусть, кроме того, векторы y, x согласованы со средой j . Тогда по y, x, T можно построить функцию $\delta = \delta(s) > 0$, $\delta \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, такую, что:

I. Если $T > 0$, то

1) для любого $\varepsilon \geq \delta$, $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{1}{s}X(y, n) \in U_\varepsilon(\beta), A(j)\right) = -T\Lambda^{(j)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right); \quad (1.26)$$

2) если либо функция $\Lambda^{(j)}$ непрерывна в точке $\frac{\beta - \gamma}{T}$, либо $\frac{n}{s} - T \geq \delta$, то выполняется

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(y, n) \in \Delta(x), A(j)) = -T\Lambda^{(j)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right). \quad (1.27)$$

II. Если $T = 0$ и $\frac{n}{s} \geq \delta$, то

1) для любого $\varepsilon \geq \delta$, $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняется

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{1}{s}X(y, n) \in U_\varepsilon(\beta), A(j)\right) = -\Lambda_0^{(j)}(\beta - \gamma); \quad (1.28)$$

2) если функция $\Lambda_0^{(j)}$ непрерывна в точке $\beta - \gamma$, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(y, n) \in \Delta(x), A(j)) = -\Lambda_0^{(j)}(\beta - \gamma). \quad (1.29)$$

Если цепь нерешетчатая, $N > 0$ и $j < 3$, то для выполнения утверждений (1.26)–(1.29) надо потребовать дополнительно выполнения следующего условия.

(R₃). Для любого $y_0 \in \Gamma(N, N)$ найдутся квадрат $\Delta(y)$ и $s > 0$ такие, что для всех $y' \in \Delta(y)$ и для любого измеримого множества $B \subseteq \mathbb{R}^{2+}$ выполняется

$$P(y', B) \geq cP(y_0, B). \quad (1.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Хорошо известно, что для произвольной “регулярной” цепи $X = X(n)$ переходные вероятности $P(y, B)$ можно так “испортить” на множестве игровых нулевой меры (скажем, меры Лебега или стационарной меры), что это никак не скажется на поведении $P(y, n, B)$ для п.в. y . Условия (R₁), (R₂) направлены на устранение такого рода нерегулярностей в области $\Gamma(N, N)$ (в дополнительной области цепь достаточно регулярна). Однако оказалось, что в некоторых случаях этих условий недостаточно.

Рассмотрим, например, неэргодическую цепь, удовлетворяющую условиям теоремы 1.2, с $\Lambda^{(0)} > 0$, так что

$$\ln P(X(y, n) = 0) \sim P(X(0, n) = 0) \sim -n\Lambda^{(0)} \quad (1.31)$$

при $y \in \Delta(0)$, $\Delta = N$ (см. (1.27)). Цепь X будем предполагать такой, что существует точка $y_0 \in \Delta(0)$, $\Delta = N$, для которой $P(X(y, 1) = y_0) = 0$ при всех y . Это всегда имеет

место, если распределение $X(y, 1)$ имеет плотность в $(\mathbb{R}^{2+})$. “Испортим” теперь эту цепь, построив с ее помощью новую цепь X^* , для которой

$$X^*(y_0, 1) = \begin{cases} y_0 & \text{с вероятностью } p; \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - p; \end{cases}$$

$P(X^*(y, 1) \in B) = P(X(y, 1) \in B)$ для всех $y \neq y_0$. Тогда при $\ln p > -\Lambda^{(0)}$ соотношение (1.31) выполнено не будет, так как $P(X^*(y_0, n) = 0) \geq p^{n-1}(1 - p)$, хотя цепь X^* удовлетворяет условиям (R_1) , (R_2) , (M) .

Условие (R_3) направлено на “недопущение” такого рода нерегулярностей. Известны и другие подходы к “регуляризации” цепей по y . Например, можно ограничиться рассмотрением феллеровских цепей, для которых $P(y', \cdot) \Rightarrow P(y, \cdot)$ при $y' \rightarrow y$. Однако в нашем случае это условие излишне ограничительно, не адекватно природе вещей и менее удобно, чем (R_3) . Условие (R_3) позволяет сделать все доказательства для нерешетчатого случая по сути идентичными доказательствам в решетчатом случае.

Заметим еще, что условие (R_3) можно несколько ослабить, заменив в (1.30) вероятности $P(y, B)$, $P(y', B)$ на вероятности $P(y, n_0, B)$, $P(y', n_0, B)$ для некоторого $n_0 < \infty$.

По поводу “нерегулярных” цепей заметим также, что все они, как правило, искусственны и в приложениях не встречаются (см., например, задание сетей Джексона, систем поллинга, коммуникационных сетей и др.). В прикладных задачах переходные вероятности обычно задаются конструктивно и регулярно и необходимость в условиях вида (R_3) отсутствует. Условия (R_1) , (R_2) также обычно выполнены.

Для краткости обозначим (R) условие, состоящее в одновременном выполнении условий (R_1) , (R_2) , а также условия (R_3) , но лишь в случае, когда цепь нерешетчатая и $N > 0$ (если цепь решетчатая или $N = 0$, то условие (R_3) излишне).

Заметим, что соотношения (1.23)–(1.25) вместе с теоремой 1.2 доказывают неравенства согласованности для функций $\Lambda^{(j)}$, $j = 0, \dots, 3$ (утверждение 4 леммы 1.2).

Теорема 1.2 показывает, что грубая асимптотика вероятности события $\{X(y, n) \in \Delta(x)\}$ “в j -й среде” ведет себя, как асимптотика в (1.9) с заменой функции уклонений Λ на функцию $\Lambda^{(j)}$. Это означает, следовательно, что в каждой из сред наиболее вероятная траектория будет прямолинейной (с точностью до замечаний, связанных с соотношениями (1.10)). Это означает, в свою очередь, что асимптотика в теореме 1.2 сохранится, если вместо события $A(j)$ поместить событие, состоящее в том, что траектория $\vec{X}(n)$ мало отличается от прямолинейной. Это приводит нас к так называемому локальному принципу больших уклонений. Чтобы его сформулировать, нам понадобится пространство $\mathcal{F}$ “предельных траекторий” f . Оно будет устроено следующим образом.

Каждый элемент $f \in \mathcal{F}$ будет характеризоваться наборами “времен” $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_r = T$, $r < \infty$, и конечными множествами $F_i = \{f_{i,1}, \dots, f_{i,k_i}\}$, $f_{i,j} \in \mathbb{R}^{2+}$, $i = 0, \dots, r$. На каждом интервале (u_i, u_{i+1}) , $0 \leq i \leq r - 1$, функция f определяется как линейная функция, соединяющая точки (u_i, f_{i,k_i}) и $(u_{i+1}, f_{i+1,1})$. Если же время t равно одному из значений $u_0, \dots, u_r$, скажем, $t = u_i$, то f в этой точке будет отождествляться с множеством F_i ; при этом порядок следования элементов в F_i *существенен*.

Точки $t = u_i$ в случае $k_i \geq 2$ будут, таким образом, точками разрывов и “неоднозначности” функции f ; если же $k_i = 1$, то в точке $t = u_i$ разрыв и неоднозначность отсутствуют.

Траекторию (функцию) $f \in \mathcal{F}$ можно представить и несколько иначе, как конечную последовательность пар (которые будем называть узлами траектории)

$$(t_0, \beta(0)), \dots, (t_l, \beta(l)),$$

где $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_l = T$, $\beta(k) \in \mathbb{R}^{2+}$, $k = 0, 1, \dots, l = k_0 + \dots + k_r$, так что множества $\{\beta(0), \dots, \beta(l)\}$ и $\bigcup_0^r F_i$ совпадают, $\{u_0, \dots, u_r\} \subseteq \{t_0, \dots, t_l\}$. Если $t_{i+1} > t_i$, то мы будем считать, что движение вдоль траектории f на интервале (t_i, t_{i+1}) происходит из точки $\beta(i)$ в точку $\beta(i+1)$ по отрезку, соединяющему эти точки, с постоянной скоростью $v_i = (\beta(i+1) - \beta(i)) / (t_{i+1} - t_i)$. Если же $t_{i+1} = t_i$, то мы будем считать, что движение из точки $\beta(i)$ в точку $\beta(i+1)$ в момент $t = t_i$ происходит “мгновенно” и проходит при этом через все точки отрезка $[\beta(i), \beta(i+1)]$. Таким образом, если совпадают несколько значений $t = t_i = \dots = t_{i+j}$, то в этот момент t траектория f “мгновенно” описывает в пространстве (t, f) непрерывный контур, проходящий в установившейся последовательности через точки $\beta(i), \beta(i+1), \dots, \beta(i+j)$.

Очевидно, что оба описания пространства $\mathcal{F}$ траекторий f эквивалентны; мы будем использовать то из них, которое в текущий момент окажется удобнее.

Каждое из этих описаний позволяет поставить в соответствие траектории $f \in \mathcal{F}$ множество (кривую) в пространстве $[0, T] \times \mathbb{R}^{2+}$, которое мы будем называть *графиком* функции f и обозначать его символом G_f . Эта кривая по определению состоит из объединения отрезков

$$[(t_i, \beta(i)), (t_{i+1}, \beta(i+1))], \quad i = 0, 1, \dots, l, \quad (1.32)$$

и, стало быть, односвязна (непрерывна относительно естественной параметризации, скажем, с помощью длины пройденного пути). Множество всех графиков, когда t пробегает $\mathcal{F}$, обозначим через $G_{\mathcal{F}}$. Очевидно, что между $\mathcal{F}$ и $G_{\mathcal{F}}$ нет, вообще говоря, взаимно однозначного соответствия. Однако если под $\mathcal{F}$ понимать несколько суженное пространство $\mathcal{F}_0$ элементов f , для которых

- (i) *график G_f функции f не имеет точек самопересечения;*
- (ii) *не существует точек $(t_k, \beta(k))$, $1 \leq k \leq l-1$, которые лежали бы на отрезке, соединяющем пару соседних точек $(t_{k-1}, \beta(k-1))$, $(t_{k+1}, \beta(k+1))$,*

то соответствие между $\mathcal{F}_0$ и $G_{\mathcal{F}_0}$ будет взаимно однозначным, т.е. график G_f будет однозначно определять f . Указанное сужение $\mathcal{F}$ до $\mathcal{F}_0$ при описании в настоящей работе множества предельных траекторий вполне оправдано, так как главный объект наших рассуждений – “наиболее вероятные траектории”, соединяющие две фиксированные точки, – всегда будут обладать свойствами (i), (ii) (см. об этом ниже). Однако в силу ряда соображений (см., например, формулировку теоремы 1.4) нам будет удобнее в дальнейшем понимать под $\mathcal{F}$ исходное несуженное пространство.

Каждому $f \in \mathcal{F}$ и $\varepsilon > 0$ поставим в соответствие множество $W_\varepsilon(f) \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2+}$, определив его как объединение открытых шаров радиуса ε с центрами в точках $(t, z) \in G_f$. В пространстве $\mathcal{F}$ введем *псевдометрику* $\rho(f, g)$, считая, что $\rho(f, g) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $G_g \in W_\varepsilon(f)$ и $G_f \in W_\varepsilon(g)$.

В суженном пространстве $\mathcal{F}_0$, удовлетворяющем (i), (ii), псевдометрика ρ превращается в обычную метрику (т.е. из $\rho(f, g) = 0$ будет следовать $f = g$). Эта метрика

близка метрике, соответствующей топологии J_2 , введенной А. В. Скороходом в [41], и метрике пространства F , рассмотренной в [19], [9].

Для каждого участка (1.32) предельной траектории $f \in \mathcal{F}$ мы можем также определить среду однородности. Однако это определение будет выглядеть иначе, чем аналогичное определение для траектории $\vec{X}(n)$.

Обозначим через $\Gamma^{(1)} = \Gamma(\bullet, 0)$, $\Gamma^{(2)} = \Gamma(0, \bullet)$, $\Gamma^{(0)} = \Gamma(0, 0)$ части границы Γ положительного квадранта $\mathbb{R}^{2+}$, так что

$$\Gamma = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)} = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)} \cup \Gamma^{(0)}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$j(\gamma, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma = \beta = 0; \\ 1, & \text{если } \gamma, \beta \in \Gamma^{(1)}, j(\gamma, \beta) \neq 0; \\ 2, & \text{если } \gamma, \beta \in \Gamma^{(2)}, j(\gamma, \beta) \neq 0; \\ 3 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Другими словами, во введенных ранее обозначениях

$$j(\gamma, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\gamma, \beta) \in \mathcal{A}^{(0)}; \\ 1, & \text{если } (\gamma, \beta) \in \mathcal{A}^{(1)} \setminus \mathcal{A}^{(0)}; \\ 2, & \text{если } (\gamma, \beta) \in \mathcal{A}^{(2)} \setminus \mathcal{A}^{(0)}; \\ 3 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Номер среды однородности участка (1.32) определим как число $j(\beta(i), \beta(i+1))$.

Для траектории $f \in \mathcal{F}$ определим функционал

$$L(f) = \sum_{k=0}^{l-1} L_k(f), \quad L_k(f) \equiv (t_{k+1} - t_k) \Lambda^{(j_k)} \left(\frac{\beta(k+1) - \beta(k)}{t_{k+1} - t_k} \right), \quad (1.33)$$

где $j_k = j(\beta(k), \beta(k+1))$ и в случае $t_{k+1} = t_k$ под слагаемым $L_k(f)$ понимается предел (который существует в силу леммы 1.2)

$$L_k(f) \equiv \Lambda_0^{(j_k)} (\beta(k+1) - \beta(k)) = \lim_{t \downarrow 0} t \Lambda^{(j_k)} \left(\frac{\beta(k+1) - \beta(k)}{t} \right).$$

Введем теперь в рассмотрение нормированные “допредельные” случайные траектории (выборочные траектории), соответствующие траекториям $\vec{X}(n)$. Доопределим $X(y, u)$ при произвольных u линейным непрерывным образом, так что $X(y, u)$ будет образовывать непрерывную ломаную с узлами в точках $(k, X(y, k))$. Положим

$$x_s \equiv x_s(t) = \frac{1}{s} X(y, ts), \quad 0 \leq t \leq \frac{n}{s},$$

где $n/s \rightarrow T$, $s \rightarrow \infty$ (можно ввести выборочные траектории и иначе, например, положив $x_s(t) = \frac{1}{s} X(y, [ts])$). Очевидно, что функция x_s лежит в пространстве $\mathcal{F}$ и для нее определено событие $\{\rho(x_s, f) < \varepsilon\}$ при $f \in \mathcal{F}$.

Следующее утверждение можно назвать *локальным принципом больших уклонов для нормированных траекторий* x_s в $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть выполнены условия (R), (M). Тогда для любого $f \in \mathcal{F}_0$ существует достаточно медленно стремящаяся к нулю функция $\delta = \delta(s) \downarrow 0$ такая, что для всех $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon \geq \delta$, выполняется

$$\frac{1}{s} \ln P(\rho(x_s, f) < \varepsilon) \sim -L(f). \quad (1.34)$$

Пусть траектория $f \in \mathcal{F}_0$ с узлами $(t_k, \beta(k))$, $0 \leq k \leq l$, такова, что $\min_{1 \leq k \leq l} (t_k - t_{k-1}) > 0$ и функционал $L(f)$ ограничен в окрестности точки f . Тогда правая часть в (1.34) не изменится, если мы сузим событие, стоящее под знаком вероятности, добавив туда также событие $\{X(n_k) \in \Delta(s\beta(k)), k = 1, \dots, l\}$, где $n_k/s \rightarrow t_k$, Δ удовлетворяет принятым ранее соглашениям.

Напомним, что в случае, когда мы имели только одну однородную среду, для любой абсолютно непрерывной функции f было справедливо представление (1.12). Сравнивая (1.12) с (1.34), можно отметить два отличия.

1. В (1.34) допускаются разрывы функции f и им соответствуют слагаемые в определении (1.33) функционала $L(f)$, для которых $t_k = t_{k+1}$. Разрывы связаны с эффектами, которые в одномерном случае возникают в ситуации (1.10) и, следовательно, могут присутствовать в каждой из однородных сред. Можно было бы допускать и счетное число разрывов, однако это потребовало бы усложнения пространства $\mathcal{F}$. Как мы увидим ниже, с точки зрения основных результатов настоящей работы в этом нет необходимости.

2. Сумма в правой части (1.33) очень напоминает интегральную сумму, соответствующую интегралу (1.12), однако функции уклонений, присутствующие в (1.33), разрывны относительно среды и принимают значения $\Lambda^{(j)}$, $j = 0, \dots, 3$. В связи с этим получить в условиях теоремы 1.3 интегральный функционал типа (1.12) для “существенно” более широкого класса функций f не удастся.

1.6. Оптимальные траектории. Функционал $L(f)$, определенный в (1.33), можно интерпретировать как суммарные затраты вдоль траектории f , предписывающей за время T перейти из точки $\gamma = \beta(0) = f_{1,1}$ в точку $\beta = \beta(l) = f_{r,k_r}$. Эти затраты складываются из затрат $(t_{k+1} - t_k)\Lambda^{(j_k)}(v_k)$ в течение интервалов времени (t_k, t_{k+1}) , если $t_{k+1} > t_k$, где числа $\Lambda^{(j_k)}(v_k)$ определяют затраты на единицу времени (цену) в среде j_k при движении со скоростью $v_k = \frac{\beta(k+1) - \beta(k)}{t_{k+1} - t_k}$. Слагаемые $\Lambda_0^{(j_k)}(\beta(k+1) - \beta(k))$ определяют затраты на мгновенное перемещение из точки $\beta(k)$ в точку $\beta(k+1)$.

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{F}(\gamma, \beta, T)$ всех траекторий $f \in \mathcal{F}$ с фиксированным началом $\gamma = \beta(0)$, концом $\beta = \beta(l)$ и временем T . Обозначим

$$D(\gamma, \beta, T) = \inf_{f \in \mathcal{F}(\gamma, \beta, T)} L(f)$$

минимальные затраты по всем маршрутам f , ведущим из γ в β за время T . Траектория $f^* = f^*(\gamma, \beta, T)$, минимизирующая эти затраты, существует в $\mathcal{F}$, но не всегда единственна. Единственность будет иметь место очень часто (об этом см. ниже), если под $\mathcal{F}$ понимать сужение $\mathcal{F}_0$, описанное выше. В этом случае в широких предположениях неединственность при фиксированных γ и T может возникать лишь для множества значений β , лебегова мера которого равна 0.

Величина

$$D(\gamma, \beta) = \inf_{T \geq 0} D(\gamma, \beta, T) \quad (1.35)$$

будет определять минимальные затраты вдоль всех траекторий, соединяющих точки γ и β .

Как уже отмечалось, минимальные затраты для перехода от одной точки к другой в одной среде однородности достигаются на траектории, предписывающей двигаться по прямой, соединяющей эти точки, с постоянной скоростью. Поэтому $\mathcal{F}(\gamma, \beta, T)$ можно сузить до пространства, элементы которого не содержат соседние пары, лежащие в одной среде. Такое сужение не повлияет на значения $D(\gamma, \beta, T)$ и $D(\gamma, \beta)$.

Отметим, далее, что значение $T^* = T^*(\gamma, \beta)$, при котором достигается $\inf$ в (1.35), также может быть не единственным. В этом случае под $T^* = T^*(\gamma, \beta)$ мы будем понимать минимальное из оптимальных T , а максимальное значение обозначим через T^{**} . Траектория $f^{**} = f^{**}(\gamma, \beta)$, соответствующая T , минимизирующему (1.35), тоже может быть не единственной (см. ниже).

Если цепь $X(y, n)$ эргодична, то, как уже отмечалось, $\Lambda^{(0)} \equiv 0$, и “сидение в нуле” не увеличивает значение функционала $L(f)$. Поэтому, если в этом случае оптимальная траектория $f^{**}(\gamma, \beta)$ проходит через точку $\beta' = 0$, то $D(\gamma, \beta, T^*) = D(\gamma, \beta, T)$ при всех $T \geq T^*$, и $T^{**} = \infty$. Если $T^{**} < \infty$, то мера Лебега множества значений β , для которых $T^* < T^{**}$, равна 0.

Для $f \in \mathcal{F}$ мы обозначим через $l(f)$ число “узлов” $(t_k, \beta(k))$ функции f (см. определение класса $\mathcal{F}$).

Нам понадобятся также следующие два свойства траекторий f , дополняющие свойства (i), (ii):

- (iii) *соседние отрезки $[\beta(k-1), \beta(k)]$, $[\beta(k), \beta(k+1)]$ лежат в разных средах однородности;*
- (iv) *траектория не содержит более двух точек $\beta(k)$, $0 \leq k \leq l$, равных 0, причем если таких точек две, то они соседствуют (если таких точек две и $\beta(k) = 0$, то либо $\beta(k-1) = 0$, либо $\beta(k+1) = 0$).*

Свойства оптимальных траекторий и функций $D(\gamma, \beta, T)$, $D(\gamma, \beta)$ описываются в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1.4. *Пусть выполнены условия (R), (M). Тогда*

I. *Функция $D(\gamma, \beta, T)$ полунепрерывна снизу:*

$$\liminf_{(\gamma', \beta', T') \rightarrow (\gamma, \beta, T)} D(\gamma', \beta', T') \geq D(\gamma, \beta, T),$$

и непрерывна справа по T :

$$\lim_{T' \downarrow T} D(\gamma, \beta, T') = D(\gamma, \beta, T).$$

II. *Функция $D(\gamma, \beta)$ конечна и непрерывна для всех $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$; функция $D(0, \beta)$ линейна вдоль любого вектора $\beta \in \mathbb{R}^{2+}$:*

$$D(0, t\beta) = tD(0, \beta), \quad t \geq 0.$$

III. Оптимальная траектория $f^* = f^*(\gamma, \beta, T)$ всегда может быть выбрана в суженном пространстве $\mathcal{F}_0$, удовлетворяющем свойствам (i), (ii) (см. выше). Кроме того, оптимальные траектории обладают свойствами (iii), (iv).

IV. Для любых $\gamma, \gamma', \beta \in \mathbb{R}^{2+}$, $0 \leq T' \leq T$ выполняется

$$D(\gamma, \beta, T) \leq D(\gamma, \gamma', T') + D(\gamma', \beta, T - T');$$

если же точка (T', γ') лежит на оптимальной траектории $f^*(\gamma, \beta, T)$, то

$$D(\gamma, \beta, T) = D(\gamma, \gamma', T') + D(\gamma', \beta, T - T').$$

V. Для любых $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$, $T \geq 0$ можно выбрать оптимальную траекторию $f^* = f^*(\gamma, \beta, T)$ так, чтобы $l(f^*) \leq 7$.

VI. Для любых $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$ можно выбрать оптимальные траектории $f^{**}(\gamma, \beta)$, $f^{**}(\gamma, 0)$, $f^{**}(0, \beta)$ так, чтобы соответственно

$$l(f^{**}(\gamma, \beta)) \leq 4, \quad l(f^{**}(\gamma, 0)) \leq 2, \quad l(f^{**}(0, \beta)) \leq 2.$$

VII. При выполнении условия (E) для любого $\gamma \in \mathbb{R}^{2+}$ выполняется $D(\gamma, 0) = 0$, $T^* = T^*(\gamma, 0)$ равно времени достижения нуля из точки γ при движении сначала со скоростью a до границы Γ (пусть это будет $\Gamma^{(i)}$), а затем вдоль границы $\Gamma^{(i)}$ со скоростью $a^{(i)}$ до нуля. Для любых $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$ выполняется $T^*(\gamma, \beta) \leq T^*(\gamma, 0) + T^*(0, \beta)$; если при этом оптимальная траектория $f^*(\gamma, \beta)$ проходит через 0, то верно $T^*(\gamma, \beta) = T^*(\gamma, 0) + T^*(0, \beta)$.

Отметим, что для утверждений, касающихся геометрии оптимальных траекторий и их вероятностей, условие (M_2) существенно. Геометрия наиболее вероятных траекторий и асимптотика вероятностей в принципе больших уклонов в $\mathbb{R}^{2+}$ могут быть совершенно другими, если, скажем, разрешить распределениям $\xi(y)$ при $y \in \Gamma(\bullet, N) \cup \Gamma(N, \bullet)$ иметь “более толстые хвосты”, чем в условии (M_2) (более подробные комментарии и примеры по этому поводу применительно к одномерному случаю см. в [4], [11], [12]).

В дополнение к свойству VI можно заметить, что для $\beta \in \mathbb{R}^{2+}$ справедливо

$$D(0, \beta) = \min_{i=1,2,3} D_i(0, \beta), \quad (1.36)$$

где

$$D_3(\gamma, \beta) = \inf_{T>0} T \Lambda^{(3)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right)$$

и для $i = 1, 2$

$$D_i(0, \beta) = \min_{\beta' \in \Gamma^{(i)}} \{\alpha^{(i)} \beta'_i + D(\beta - \beta')\}, \quad \alpha^{(i)} = \min_{T>0} T \Lambda^{(i)}\left(\left(\frac{1}{T}, 0\right)\right). \quad (1.37)$$

Заметим, что из результатов [16] следует представление

$$\alpha^{(i)} = \sup\{t : E(e^{t\zeta^{(i)}}; \tau^{(i)} < \infty) \leq 1\}, \quad i = 1, 2. \quad (1.38)$$

Если же $\beta \in \Gamma$, $\beta \neq 0$, то $D(0, \beta) = \min_{i=1,2} D_i(0, \beta)$, где функции $D_i(\gamma, \beta)$, $i = 1, 2$, определены выше.

Таким образом, оптимальная траектория $f^{**}(0, \beta)$ либо есть отрезок, соединяющий точки $0, \beta$, либо состоит из двух линейных кусков, и в этом случае первый кусок идет либо по $\Gamma^{(1)}$, либо по $\Gamma^{(2)}$. Оптимальная траектория $f^{**}(\gamma, 0)$ выглядит аналогичным образом.

Опишем теперь, как выглядит оптимальная траектория $f^{**}(\gamma, \beta)$ в случае, когда $\gamma, \beta \in (\mathbb{R}^{2+})$. В этом случае справедливо $D(\gamma, \beta) = \min_{1 \leq i \leq 5} D_i(\gamma, \beta)$, где функция $D_3(\gamma, \beta)$ определена выше; для $i = 1, 2$

$$D_i(\gamma, \beta) = \min\{D(\gamma' - \gamma) + \alpha^{(i)}(\gamma''_i - \beta_i(1)) + D(\beta - \beta(2))\},$$

где минимум берется по всем $\gamma', \gamma'' \in \Gamma^{(i)}$; для $i = 4, 5$

$$D_i(\gamma, \beta) = \min\{D(\gamma' - \gamma) + \alpha^{(i-2)}(\gamma''_{i-2} - \gamma'_{i-2}) + \alpha^{(i-2)*}(\gamma''_{(i-2)*} - \gamma'_{(i-2)*}) + D(\beta - \gamma'')\},$$

где минимум берется по всем $\gamma' \in \Gamma^{(i-2)}$, $\gamma'' \in \Gamma^{((i-2)*)}$, $i^* \in \{1, 2\}$, $i^* - i - 1 = 0 \pmod{2}$.

Таким образом, оптимальная траектория, ведущая из точки $\gamma \in (\mathbb{R}^{2+})$ в точку $\beta \in (\mathbb{R}^{2+})$, либо

- (а) отрезок, соединяющий эти две точки, либо
- (б) состоит из 3 линейных кусков, и в этом случае первый линейный кусок соединяет точку γ с границей Γ , второй линейный кусок идет либо по $\Gamma^{(1)}$, либо по $\Gamma^{(2)}$, и третий линейный кусок соединяет границу с точкой β , либо
- (в) состоит из 4 линейных кусков, и в этом случае первый линейный кусок соединяет точку γ с участком границы $\Gamma^{(i)}$ (i равно либо 1, либо 2), второй линейный кусок идет по $\Gamma^{(i)}$ и соединяет точки $\beta(1)$ и $\beta(2) = 0$, третий линейный кусок соединяет точки $\beta(2) = 0$ и $\beta(3)$ и идет по $\Gamma^{(i*)}$, и, наконец, четвертый линейный кусок траектории соединяет точки $\beta(3)$ и β .

В заключение отметим, что геометрии оптимальных траекторий $f^*(\gamma, \beta, T)$ при $T < T^*$, $T = T^*$ и $T > T^*$ существенно различны. Ломаная в $\mathbb{R}^{2+}$, построенная по точкам $\beta(0), \dots, \beta(l)$, отвечающим оптимальной траектории f^{**} , не содержит самопересечений и состоит, вообще говоря, из меньшего числа линейных кусков, чем ломаная, отвечающая $f^*(\gamma, \beta, T)$ при $T \neq T^*$. В §3 для эргодического случая мы приведем формулы для функции $T^*(0, \beta)$.

Очевидно, что оптимальные траектории суть наиболее вероятные траектории, поэтому сказанное выше дает возможность установить принцип больших уклонений в $\mathbb{R}^{2+}$ (см. п. 1.7) и существование так называемых условных жидкостных пределов (см. п. 1.8).

1.7. Другие основные результаты. Принцип больших уклонений в $\mathbb{R}^{2+}$.

Для цепи Маркова $X(n) = X(y, n)$ мы ввели в предыдущих разделах условия (R) и (M) и определили функцию $D(\gamma, \beta, T)$, $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$, $T \geq 0$. Везде ниже мы будем, как и прежде, следовать соглашению: $x, y \in \mathbb{Z}^{2+}$ для целочисленных цепей при замене $\Delta(x)$ на точку x ; для нерешетчатых цепей число $\Delta > 0$ произвольно.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть выполнены условия (R), (M) и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{y}{s} = \gamma, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{n}{s} = T. \quad (1.39)$$

Если $T = 0$, то мы будем дополнительно предполагать, что n/s стремится к 0 достаточно медленно. Тогда

1)

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, n) \in sF) \leq - \inf_{\beta \in F} D(\gamma, \beta, T)$$

для всех замкнутых множеств $F \subseteq \mathbb{R}^{2+}$;

2)

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, n) \in sG) \geq - \inf_{\beta \in G} D(\gamma, \beta, T)$$

для всех открытых множеств $G \subseteq \mathbb{R}^{2+}$;

3) для любого $K < \infty$ найдется $C < \infty$ такое, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(|X(y, n)| \geq sC) \leq -K;$$

4) если $T > 0$, $n/s - T$ стремится к 0 достаточно медленно или в точке $t = T$ функция $D(\gamma, \beta, t)$ непрерывна по t , или $T = 0$, n/s стремится к 0 достаточно медленно и в точке $t = 0$ функция $D(\gamma, \beta, t)$ непрерывна по t , то для y, x, T таких, что выполнено (1.39) и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{x}{s} = \beta,$$

справедливо

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, n) \in \Delta(x)) = -D(\gamma, \beta, T). \quad (1.40)$$

Слова “ $n/s - T$ стремится к 0 достаточно медленно” означают, что $\lim_{s \rightarrow \infty} n/s = T$ и для некоторой функции $\delta = \delta(s) > 0$, $\delta(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, выполнено неравенство $n/s - T \geq \delta(s)$ при всех достаточно больших s .

Утверждение 4) теоремы 1.5 можно называть интегро-локальным принципом больших уклонений; утверждения 1), 2) дают принцип больших уклонений в его обычной форме. Если бы соотношение (1.40) было доказано для всех γ, β, T таких, что в некоторой окрестности этих точек функция $D(\cdot, \cdot, \cdot)$ конечна, то из него и из 3) вытекал бы принцип больших уклонений. Однако нам не удалось доказать, что функция $D(\gamma, \beta, T)$ непрерывна по T во всех таких точках (скорее всего, это не так); поэтому в теореме 1.5 нам пришлось формулировать как обычный принцип больших уклонений, так и интегро-локальный принцип.

В качестве следствия из теоремы 1.5 можно получить принцип больших уклонений для вероятности $P_n(y, U)$ того, что траектория $\vec{X}(n)$ хоть раз за время n попадет в измеримое множество U . Обозначим

$$\eta(y, n, U) = \sum_{k=1}^n I(X(y, k) \in U)$$

число попаданий траектории $\vec{X}(n)$ в множество U . Очевидно, что

$$P_n(y, U) = \mathbf{P}(\eta(y, n, U) > 0).$$

Определим функцию

$$D^-(\gamma, \beta, T) = \inf_{0 \leq T' \leq T} D(\gamma, \beta, T').$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия (R), (M), (1.21), (1.22). Если $T = 0$, то мы будем дополнительно предполагать, что n/s стремится к 0 достаточно медленно. Тогда

- 1) если функция $D(\gamma, \beta, t)$ непрерывна по t в точке $t = T' \in [0, T]$ такой, что

$$D^-(\gamma, \beta, T) = D(\gamma, \beta, T'),$$

то

$$\ln P_n(y, \Delta(x)) \sim \ln E\eta(y, n, \Delta(x)) \sim -sD^-(\gamma, \beta, T);$$

- 2) если измеримое множество $U \subseteq \mathbb{R}^{2+}$ таково, что

$$0 < \inf_{\beta \in [U]} D^-(\gamma, \beta, T) = \inf_{\beta \in (U)} D^-(\gamma, \beta, T) < \infty,$$

где $[U]$, (U) суть соответственно замыкание и внутренность множества U , то

$$\ln P_n(y, sU) \sim \ln E\eta(y, n, sU) \sim -s \inf_{\beta \in U} D^-(\gamma, \beta, T).$$

Аналогичный результат для последовательности сумм $S(n)$ (одна однородная среда) был получен в [16].

Как хорошо известно (см., например, [4], [26]), обозримые условия эргодичности многомерной цепи Маркова, скажем, в $\mathbb{R}^{d+}$, можно сформулировать лишь при $d \leq 3$. В еще большей степени это относится к результатам, касающимся вероятностей больших отклонений. Как мы видели, уже в случае $d = 2$ наиболее вероятные траектории, определяющие основной вклад в вероятность $P(y, n, \Delta(x))$, могут иметь непростое устройство и состоять из 7 линейных участков. В случае $d = 3$ отыскание числа таких линейных элементов и самой структуры оптимальной траектории становится очень труднодоступным. Более того, тут, по аналогии с теоремами эргодичности, можно допустить уже в случае $d = 3$ существование оптимальных траекторий, содержащих бесконечное число прямолинейных кусков (спиральные возможности; ср. с [4]). В случае $d \geq 3$, видимо, можно доказать только существование предела для $\frac{1}{|x|} \ln P(y, n, \Delta(x))$; возможность же описания этого предела в форме, подобной той, которая присутствует в случае $d = 2$, остается невыясненной и весьма проблематичной (см. п. 1.9).

Обратимся к случаю *эргодической* цепи Маркова, когда выполнено условие (E). Здесь чаще всего мы будем использовать нормировку с помощью $s = |x| \rightarrow \infty$. Это оказывается более удобным при изучении вероятностей $P(y, n, \Delta(x))$ для эргодических цепей в случае, когда $n \gg |x|$ и порядок малости рассматриваемой вероятности определяется по $|x|$. В том случае, когда n и $|x|$ одного порядка, можно осуществлять нормировку и с помощью n .

Как будет показано ниже, функция $D(0, \beta)$ будет *функционалом действия* для стационарного распределения π , отвечающего эргодической цепи $X(n)$. В этом случае (см. теорему 1.4) функция $D(0, \beta)$ непрерывна по β во всех точках $\mathbb{R}^{2+}$ и линейна вдоль любого луча $\{\alpha = \beta t : \beta \in \mathbb{R}^{2+}, t \geq 0\}$.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть выполнены условия (R), (M), (E) и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x/|x| \rightarrow \beta$. Тогда

1)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \pi(\Delta(x)) = -D(0, \beta); \quad (1.41)$$

2) для любого $K < \infty$ найдется $C < \infty$ такое, что

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \pi(\{x \in \mathbb{R}^{2+} : |x| \geq C\}) \leq -K.$$

Из теоремы 1.6 следует принцип больших уклонений для меры π в его обычной форме:

для всех замкнутых множеств $F \subseteq \mathbb{R}^{2+}$

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \pi(sF) \leq - \inf_{\beta \in F} D(0, \beta);$$

для всех открытых множеств $G \subseteq \mathbb{R}^{2+}$

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \pi(sG) \geq - \inf_{\beta \in G} D(0, \beta).$$

Основное утверждение теоремы 1.6 сохранится, если условия (M_1) и (M_2) , входящее в (M) , заменить на более широкие условия (M_1^+) , $(M_2^{(0)})$ соответственно. Это можно извлечь из результатов §3 (теоремы 3.1–3.4), где для 0-однородных эргодических цепей рассматривается более трудная задача о точной асимптотике стационарного распределения $\pi(\Delta(x))$. В настоящей работе теорема 1.6 получена как следствие теоремы 1.5, где условия (M_1) , (M_2) , входящие в условие (M) , существенны.

Обратимся теперь к “переходным явлениям”, касающимся асимптотики

$$\frac{1}{|x|} \ln P(X(y, n, \Delta(x)))$$

и вопроса о том, при каких $n_0 = n_0(y, x)$ эта асимптотика совпадает с асимптотикой (1.41) для $\pi(\Delta(x))$. Отметим прежде, что с ростом времени $T \sim n/|x|$ рано или поздно впервые наступит такой момент $T^{(0)} = T^{(0)}(\gamma, \beta)$, что точка $\beta_0 = 0$ при $T \geq T_0$ будет принадлежать оптимальной траектории $f^*(\gamma, \beta, T)$ (если запретить заход в точку $\{0\}$, то $L(f)$ для таких траекторий с ростом T будет сходиться к ∞). Далее, очевидно, что при увеличении $T > T^{(0)}$ цена оптимальной траектории не будет меняться:

$$D(\gamma, \beta, T) = D(\gamma, \beta, T^{(0)}) = D(0, \beta) \quad \text{при } T \geq T^{(0)},$$

а сама оптимальная траектория f^* будет меняться лишь за счет увеличения времени $T - T^{(0)}$ “сидения” в точке $\{0\}$. Введем в рассмотрение константу

$$T^{(0)} = T^{(0)}(\gamma, \beta) = \inf \left\{ T > 0 : \inf_{T' > T} \{D(\gamma, \beta, T') = D(0, T)\} \right\}. \quad (1.42)$$

В силу непрерывности справа функции $D(\gamma, \beta, T)$ по T (теорема 1.4) выполняется $D(\gamma, \beta, T^{(0)}) = D(0, \beta)$. Если оптимальная траектория $f^{**}(\gamma, \beta)$ проходит через $\beta_0 = 0$, то верно $T^{(0)}(\gamma, \beta) = T^{(1)}(\gamma, \beta)$, где $T^{(1)}(\gamma, \beta) \equiv T^*(\gamma, 0) + T^*(0, \beta)$ (в этом случае $T^*(\gamma, \beta) = T^{(1)}(\gamma, \beta)$). В общем случае можно утверждать только, что $T^{(1)}(\gamma, \beta) \geq T^*(\gamma, \beta)$ и при $T \geq T^{(1)}(\gamma, \beta)$ выполняется неравенство $D(\gamma, \beta, T) \leq D(0, \beta)$ (последнее неравенство следует из того, что можно построить траекторию $f \in \mathcal{F}(\gamma, \beta, T)$, для которой $L(f) = D(\gamma, 0) + D(0, \beta) = D(0, \beta)$).

“Как правило”, выполняется равенство $T^{(0)}(\gamma, \beta) = T^{(1)}(\gamma, \beta)$, однако пример, рассмотренный ниже, показывает, что возможна ситуация, когда $D(\gamma, \beta, T^{(0)}) < D(0, \beta)$, что влечет $T^{(0)}(\gamma, \beta) > T^{(1)}(\gamma, \beta)$.

Для построения примера, в котором $T^{(0)} > T^{(1)}$, рассмотрим строго выпуклую функцию уклонений $\Lambda(\alpha) = \Lambda^{(3)}(\alpha)$, и при этом пусть $a_i = E\xi_i < 0$, $i = 1, 2$. Пусть $\beta \in \mathbb{R}^{2+}$ таково, что

$$D(0, \beta) = D_3(0, \beta) = \Lambda^{(3)}(\beta),$$

т.е. $\inf$ в (1.37) достигается при $i = 3$ и при этом $T^*(0, \gamma) = 1$. Выберем далее $\gamma = -a \equiv (-a_1, -a_2)$, так что $D(\gamma, 0) = \Lambda^{(3)}(-\gamma) = 0$, $T^*(\gamma, 0) = 1$. В этом случае $T^{(1)} = 1 + 1 = 2$. Можно рассмотреть траекторию f , которая имеет вид $(0, \gamma), (2, \beta)$. Поэтому

$$D(\gamma, \beta, 2) \leq L(f) = 2\Lambda^{(3)}\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right).$$

Поскольку в силу строгой выпуклости верно

$$2\Lambda^{(3)}\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) < \Lambda^{(3)}(\beta) + \Lambda^{(3)}(-\gamma) = D(0, \beta),$$

то пример, в котором $T^{(0)} > T^{(1)}$, построен.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть выполнены условия (R), (M), (E) и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \beta, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{y}{|x|} = \gamma, \quad \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{n}{|x|} \geq T^{(0)} + \delta,$$

где $T^{(0)} = T^*(\gamma, 0) + T^*(0, \beta)$, $\delta > 0$ — произвольное. Тогда

1)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P(X(y, n) \in \Delta(x)) = -D(0, \beta);$$

2) для любого $K < \infty$ найдется $C < \infty$ такое, что

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P(|X(y, n)| \geq |x|C) \leq -K.$$

Отметим, что при наличии равномерности в утверждении 1) из него следует утверждение 2).

Разумеется, из теоремы 1.7 следует принцип больших уклонений для распределения $P(y, n, A) = P(X(y, n) \in A)$ в его обычной форме: при выполнении соотношений

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{y}{s} = \gamma, \quad \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{n}{s} > T^{(0)}$$

для всех замкнутых множеств $F \subseteq \mathbb{R}^{2+}$

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(y, n) \in sF) \leq - \inf_{\beta \in F} D(0, \beta);$$

для всех открытых множеств $G \subseteq \mathbb{R}^{2+}$

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(y, n) \in sG) \geq - \inf_{\beta \in G} D(0, \beta).$$

1.8. Условные жидкостные пределы. Термин “жидкостный предел” часто используется при изучении вопросов эргодичности цепей Маркова $X(y, n)$ в $\mathbb{R}^{d+}$. Он описывает поведение траектории цепи $X(y, k)$, $k = 0, 1, \dots$, стартовой в удаленной точке y . Как и прежде, доопределим $X(y, u)$ для всех вещественных $u \geq 0$ линейно непрерывным образом. Пусть $y/|y| \rightarrow \gamma$ при $|y| \rightarrow \infty$. Если процесс

$$x_{|y|}(y, t) = \frac{1}{|y|} X(y, t|y|)$$

(здесь нормирующий множитель s выбран равным $|y|$) сходится в подходящем смысле к предельному процессу $x(\gamma, t)$ (например, $P(\max_{0 \leq t \leq T} |x_{|y|}(y, t) - x(\gamma, t)| > \varepsilon) \rightarrow 0$), то процесс $x(\gamma, t)$ называют *жидкостным пределом* для $x_{|y|}(y, t)$. При этом если $x(y, t) = 0$ при всех достаточно больших $t \geq t_0 = t_0(\gamma)$, то цепь $X(y, n)$ будет эргодической. В случае $X(n) \in \mathbb{R}^{2+}$ при выполнении условия (Е) жидкостный предел $x(\gamma, t)$ состоит из не более чем двух кусков (см., например, [4]). Как уже отмечалось, первый начинается в точке γ и имеет направление, совпадающее с $a = E\xi$. После соприкосновения с границей $\Gamma^{(i)}$ траектория движется вдоль границы со скоростью $a^{(i)}$ до точки $\beta = 0$.

Нечто аналогичное имеет место и при изучении вероятностей больших уклонений и поведения траектории

$$x_s(y, t) = \frac{1}{s} X(y, ts), \quad 0 \leq t \leq T,$$

при $s \rightarrow \infty$, $n/s \rightarrow T$ и при условии $X(y, n) \in \Delta(x)$. Будем считать для определенности, что выполнено (1.22), т.е. $\lim_{s \rightarrow \infty} x/s = \beta$, $\lim_{s \rightarrow \infty} y/s = \gamma$, и при этом выполнено утверждение части 4) теоремы 1.5:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(y, n) \in \Delta(x)) = -D(\gamma, \beta, T).$$

Тогда предельную для $x_s(y, t)$ траекторию $x(\gamma, t)$, $0 \leq t \leq T$, при условии $X(y, n) \in \Delta(x)$ можно представить как (вообще говоря, случайную) траекторию, соединяющую точки γ и β и состоящую из конечного числа непрерывных участков (например, линейных функций), каждый из которых принадлежит одной из 4 однородных сред, описанных выше: границам $\Gamma^{(1)} = \Gamma(\bullet, 0)$, $\Gamma^{(2)} = \Gamma(0, \bullet)$, внутренности $(\mathbb{R}^{2+})$ и началу координат $\Gamma^{(0)} = \{0\}$. Будем называть этот случайный процесс *условным жидкостным пределом*, отличая его тем самым от “безусловного” жидкостного предела, описанного выше.

Количество непрерывных кусков предельной траектории зависит от точек γ, β , от числа T и от элементарного исхода (в том случае, когда предельная функция не является детерминированной с вероятностью 1). При этом оказывается, что множество предельных траекторий можно отождествить в известном смысле с множеством оптимальных траекторий $\{f^*(\gamma, \beta, T)\}$, соединяющих точки γ и β за время T (для них $L(f^*) = D(\gamma, \beta, T)$).

Чтобы сформулировать точное утверждение, касающееся условных жидкостных пределов, введем некоторые обозначения.

Введем в рассмотрение расширение $\overline{\mathcal{F}}$ пространства $\mathcal{F}$, полученное возможной заменой линейных участков функции $f \in \mathcal{F}$ на интервалах (u_k, u_{k+1}) (см. определение $\mathcal{F}$) на абсолютно непрерывные функции со значениями в $(\mathbb{R}^{2+})$, если $f(\frac{u_k+u_{k+1}}{2}) \in (\mathbb{R}^{2+})$, и со значениями в $\Gamma^{(i)}$, если $f(\frac{u_k+u_{k+1}}{2}) \in \Gamma^{(i)}$; $i = 0, 1, 2$. На это пространство $\overline{\mathcal{F}}$ естественным образом распространяется введенная метрика ρ . Введем в рассмотрение множество $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*(\gamma, \beta, T) \subseteq \overline{\mathcal{F}}$, построенное по оптимальным траекториям $f^*(\gamma, \beta, T)$ следующим образом. Мы включаем в $\mathcal{F}^*$ не только траекторию f^* , прямуюлинейную на интервалах (u_k, u_{k+1}) , но и все траектории $f \in \overline{\mathcal{F}}$, для которых

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}} \Lambda^{(j_k)}(f'(t)) dt = (u_{k+1} - u_k) \Lambda^{(j_k)}(v_k), \quad f(u_k + 0) = f^*(u_k + 0), \quad (1.43)$$

где

$$v_k = \frac{f^*(u_{k+1} - 0) - f^*(u_k + 0)}{u_{k+1} - u_k}.$$

Если функция $\Lambda^{(j_k)}$ строго выпукла в точке v_k , то решение уравнения (1.43) относительно f единственно, $f'(t) = v_k$. Неединственность возможна при выполнении условий вида (1.10) и при достаточно больших v_k .

Поведение элементов множества $\mathcal{F}^*$ в точках разрыва u_k , характеризуемое множествами F_k (см. выше), остается тем же, что и для f^* . Очевидно поэтому, что

$$L(f) = L(f^*) = D(\gamma, \beta, T)$$

для любого $f \in \mathcal{F}^*$ (при естественной модификации определения $L(f)$ для функций f из $\overline{\mathcal{F}}$).

Во многих случаях множество $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*(\gamma, \beta, T)$ состоит только из элементов множества $\{f^*(\gamma, \beta, T)\}$ (когда v_k есть точки строгой выпуклости функции $\Lambda^{(j_k)}$ для всех $0 \leq k \leq r$; как уже отмечалось, оптимальная траектория $f^*(\gamma, \beta, T)$ не всегда единственна).

Обозначим

$$U_\varepsilon(\mathcal{F}^*) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}^*} U_\varepsilon(f)$$

ε окрестность множества $\mathcal{F}^*$ в метрике ρ .

ТЕОРЕМА 1.8. Пусть выполнены условия (R), (M), (1.21), (1.22) и соотношение (1.40) из теоремы 1.5:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(y, n) \in \Delta(x)) = -D(\gamma, \beta, T),$$

причем $D(\gamma, \beta, T) < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех достаточно больших s выполняется

$$P(x_s \notin U_\varepsilon(\mathcal{F}^*) \mid X(y, n) \in \Delta(x)) \leq e^{-\delta(\varepsilon)s}. \quad (1.44)$$

Отметим, что множество $U_\varepsilon(\mathcal{F}^*)$ в (1.44) нельзя “радикально уменьшить”: если вместо него поместить $U_\varepsilon(\mathcal{F}^*) \setminus U_\varepsilon(f)$ для какого-нибудь $f \in \mathcal{F}^*$ (в случае, если $\mathcal{F}^*$ состоит более чем из одного элемента), то утверждение (1.44) перестанет быть верным.

1.9. Замечание о больших отклонениях для N -частично однородных цепей Маркова в положительном октанте $\mathbb{R}^{d+}$ пространства $\mathbb{R}^d$. Методы, которые использовались в §§ 1, 2, могут быть частично перенесены на случай пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$; в частности, могут быть доказаны аналоги теорем 1.2, 1.3. Однако в случае $d \geq 3$ не удастся получить аналога теоремы 1.4, в которой в явном виде описано строение оптимальных траекторий. Уже для $d = 3$ возможны ситуации, когда число $l(f)$ узлов для оптимальной траектории будет бесконечным. Таким образом, для случая $d \geq 3$ может быть получен лишь существенно более слабый результат, утверждающий только *существование принципа больших отклонений* (в его интегро-локальной форме) для N -частично однородных в $\mathbb{R}^{d+}$ цепей Маркова, без выяснения природы и вида правых частей в соответствующих равенствах, в то время, как в случае $d = 2$ получены явные формулы для этих правых частей в виде функционала действия $D(\gamma, \beta, T)$.

1.10. Библиографические замечания. Настоящая работа примыкает с одной стороны к работам [4], [11], [12] о вероятностях больших отклонений для одномерных цепей, а с другой – к работе [29] об аналогичных проблемах для цепей в положительном квадранте, но весьма частного вида. В [4], [11], [12] рассмотрены частично однородные цепи Маркова на прямой (или полупрямой) и для них весьма полно изучены вероятности больших отклонений с точки зрения как грубой, так и точной асимптотики. Многие из полученных результатов перенесены на более широкий класс асимптотически однородных (на прямой) цепей Маркова.

Для двумерного случая в [16] рассмотрены 0-частично однородные цепи в $\mathbb{Z}^{2+}$ весьма частного вида, для которых $-1 \leq \xi_i(y) \leq N$, $i = 1, 2$. Найдена грубая асимптотика вероятностей больших отклонений положения цепи в растущий момент n , однако она выражена в таких терминах, что невозможно понять природу этой асимптотики в общем случае.

Как уже отмечалось, цепи Маркова, изучаемые в настоящей работе, можно рассматривать как случайное блуждание в 4 однородных средах. Конечно же, простейшим блужданием является цепь Маркова “в одной однородной среде”, когда переходная вероятность $P(y, dx)$ зависит только от разности $x - y$ аргументов y, x . Это соответствует процессу суммирования независимых одинаково распределенных случайных величин (векторов). Вероятности больших отклонений для таких процессов изучены достаточно хорошо. Наиболее полное изложение для блужданий в фазовом пространстве $\mathbb{R}^d$ при выполнении условий Крамера содержится в [13]–[15]. Принцип больших отклонений в пространстве траекторий в одномерном случае установлен в [10], [42]. В [34] эти результаты были перенесены на многомерный случай. Для целого ряда задач в пространстве траекторий (для так называемых граничных задач) получена также и точная асимптотика [6], [33].

Блуждание в полупространстве $\Pi = \mathbb{R}^{1+} \times \mathbb{R}^{d-1}$ из $\mathbb{R}^d$, аналогичное индуцированным цепям $X^{(i)}$, $i = 1, 2$, введенным в п. 1.2, можно рассматривать как блуждание в 2 однородных средах. Для таких блужданий в $\mathbb{Z}^d$ со скачками в направлении границы, не превышающими 1, в [40] установлен принцип больших уклонений в фазовом пространстве Π . Для более общих двумерных блужданий в полупространстве результаты, аналогичные тем, что были описаны выше, можно без труда получить с помощью методов настоящей работы. Можно использовать результаты настоящей работы и непосредственно. Для этого следует сдвинуть стартовую точку y и квадрат $\Delta(x)$ вправо на достаточно большое расстояние так, чтобы влияние границы $\Gamma(N, \bullet)$ стало пренебрежимым (чтобы наиболее вероятная траектория $f^*(\gamma, \beta, T)$ не задевала границу $\Gamma^{(2)}$).

Конечно же, к цепям Маркова в двух однородных средах относятся и одномерные частично однородные цепи Маркова на полупрямой, рассмотренные в уже упоминавшихся работах [4], [11], [12].

Цепям Маркова в трех однородных средах соответствуют так называемые осциллирующие блуждания, когда переходная вероятность $P(y, dx)$ зависит только от $y - x$ и $I(y \in \Pi)$, где $I(y \in B)$ есть индикаторная функция множества B , Π – полупространство в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ (третья среда однородности располагается вдоль границы Π). Принцип больших уклонений для осциллирующего блуждания доказан в [22]. В [3] и [24] получен также принцип больших уклонений в пространстве траекторий для осциллирующих блужданий.

Сравнивая результаты названных работ, можно заметить, сколь существенно возрастают трудности при увеличении числа сред однородности. Именно с этим связано наше скептическое отношение, выраженное в п. 1.7, к возможности явного описания асимптотики вероятностей больших уклонений для блужданий в трехмерном октанте $\mathbb{R}^{3+}$, где число однородных сред достигает 8.

Существуют также общие результаты о вероятностях больших уклонений для цепей Маркова и марковских процессов, которые можно интерпретировать как блуждания в *неоднородной* среде. Но эти результаты относятся к существенно иной постановке задачи. В [43] рассматривается семейство марковских процессов $\{X_{(s)}(t), 0 \leq t \leq T\}$ в $\mathbb{R}^d$, заданных на *фиксированном* временном интервале $[0, T]$ и зависящих от параметра $s \rightarrow \infty$. Предполагается, что имеет место сходимость

$$G_{(s)}(t, y, \lambda) = \frac{1}{s} \ln \mathbb{E}(e^{\langle \lambda, X_{(s)}(t+1/s) - y \rangle} \mid X_{(s)}(t) = y) \rightarrow G_{(\infty)}(t, y, \lambda), \quad (1.45)$$

где $(t, y, \lambda) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, и что предел $G_{(\infty)}(t, y, \lambda)$ есть непрерывная ограниченная функция своих аргументов. Зависимость общего характера инфинитизимальной характеристики $G_{(\infty)}(t, y, \lambda)$ от пространственной переменной y можно интерпретировать как неоднородность среды. Для таких процессов устанавливается принцип больших уклонений для распределений

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{s}(X_{(s)}(u) - y) \in A \mid X_{(s)}(t) = y\right), \quad 0 \leq t \leq u \leq T$$

(предполагается, что $\frac{1}{s}(X_{(s)}(u) - X_{(s)}(t)) \rightarrow 0$ по вероятности при $s \rightarrow \infty$). Незначительные дополнительные предположения позволяют перенести эти результаты и на вероятности больших уклонений в пространстве траекторий. Отметим, что если мы

попытаемся свести к такой постановке задачи проблемы, рассматриваемые в настоящей работе, то в (1.45) получим разрывную по y функцию.

В [1] рассматривается задача, которую тоже можно отнести к проблематике блужданий в нескольких средах однородности. Там авторы представляют исходный процесс в области с границей как решение соответствующей проблемы Скорохода, и в качестве основного инструмента для отыскания функционала действия используются методы слабой сходимости и свойства регулярности для решения проблемы Скорохода.

Отметим, что ряд результатов §3 настоящей работы, касающихся точной асимптотики вероятностей больших уклонений для 0-частично однородных стационарных цепей Маркова в $\mathbb{R}^{2+}$, были анонсированы авторами несколько лет назад в [17], [18].

Методы, которые используются в §§ 1, 2, могут быть частично перенесены на случай пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Авторы планируют в следующей публикации доказать для случая $d \geq 3$ теоремы 1.2, 1.3, 1.5–1.8. Однако в случае $d \geq 3$ не удастся получить аналога теоремы 1.4, в которой описан вид оптимальных траекторий. Таким образом, для этого случая может быть получен существенно более слабый результат, чем для случая $d = 2$: перечисленные теоремы позволяют утверждать только *факт выполнения принципа больших уклонений (в его интегро-локальной форме) для N -частично однородных в $\mathbb{R}^{d+}$ цепей Маркова*, в то время как в случае $d = 2$ получены явные формулы для функционала действия $D(\gamma, \beta, T)$.

§2. Доказательства основных утверждений для N -частично однородных цепей

2.1. Доказательство лемм 1.1, 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Рассмотрим сначала случай, когда цепь $X(y, n)$ является нерешетчатой. Утверждение доказываемой леммы следует из четырех утверждений I–IV.

I. Для любых $\Delta > 0$, $b_2 < \infty$ найдутся $n_1 < \infty$ и $b_1 < \infty$ такие, что для всех $n \geq n_1$ выполняется

$$\inf_{|x-y| \leq 1, x_1 \geq b_1, x_2 \leq b_2} P(X(y, n) \in \Delta(x)) > 0.$$

II. Для любых $\Delta > 0$, $b_1 < \infty$ найдутся $n_2 < \infty$ и $b_2 < \infty$ такие, что для всех $n \geq n_2$ выполняется

$$\inf_{|x-y| \leq 1, x_1 \leq b_1, x_2 \geq b_2} P(X(y, n) \in \Delta(x)) > 0.$$

III. Для любого $\Delta > 0$ найдутся $n_3 < \infty$ и $b_3 < \infty$ такие, что для всех $n \geq n_3$ выполняется

$$\inf_{|x-y| \leq 1, x_i \geq b_3, i=1,2} P(X(y, n) \in \Delta(x)) > 0.$$

IV. Для любых $\Delta > 0$, $b_4 < \infty$ найдется $n_4 < \infty$ такое, что для всех $n \geq n_4$ выполняется

$$\inf_{|x-y| \leq 1, |x| \leq b_4} P(X(y, n) \in \Delta(x)) > 0.$$

Очевидно, что в утверждениях I–IV константу $\Delta > 0$ можно выбирать из интервала $(0, 1/2)$.

Докажем III. Убедимся, что это утверждение следует из утверждения

III⁽⁰⁾. Для любых $\Delta > 0$, $c < \infty$ найдется $n_3 = n_3(c) < \infty$ такое, что для всех $n \geq n_3$ выполняется

$$\inf_{|z| \leq c} \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(z)) > 0,$$

где $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$ и слагаемые независимы и имеют общее с ξ распределение.

Утверждение III⁽⁰⁾ доказано в лемме 5.2. Для доказательства импликации III⁽⁰⁾ $\rightarrow$ III обозначим

$$p = \min_{n_3 \leq n \leq 2n_3} \inf_{|z| \leq 1} \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(z)) > 0,$$

где $n_3 = n_3(1) < \infty$ выбрано в силу III⁽⁰⁾ для $c = 1$. Пусть, далее, $b < \infty$ таково, что

$$\sup_{y_1 \geq b, y_2 \geq b} \mathbf{P}\left(\min_{\substack{0 \leq k \leq 2n_3 \\ i=1,2}} S_i(k) + y_i \leq N + 1\right) \leq \frac{p}{2}.$$

Тогда в силу неравенства $\mathbf{P}(A \cap B) \geq \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(\overline{B})$ для $b_3 = b + \sqrt{2}$ справедливо

$$\min_{n_3 \leq n \leq 2n_3} \inf_{\substack{|x-y| \leq 1, \\ i=1,2}} \mathbf{P}\left(S(n) + y \in \Delta(x), \min_{\substack{0 \leq k \leq n \\ i=1,2}} (S_i(k) + y_i) \geq N + 1\right) \geq \frac{p}{2}.$$

Поэтому для $n \geq n_3$ и того же b_3 для $\Delta \in (0, 1/2)$ и $m = n + n_3 - [n/n_3]n_3$ справедливо

$$\begin{aligned} P(n) &\equiv \inf_{\substack{|x-y| \leq 1, \\ i=1,2}} \mathbf{P}\left(S(n) + y \in \Delta(x), \min_{\substack{0 \leq k \leq n \\ i=1,2}} (S_i(k) + y_i) \geq N + 1\right) \\ &\geq \left(\inf_{\substack{|x-y| \leq 1, \\ i=1,2}} \mathbf{P}\left(S(n_3) + y \in \Delta(x), \min_{\substack{0 \leq k \leq n_3 \\ i=1,2}} (S_i(k) + y_i) \geq N + 1\right) \right)^{[n/n_3]-1} \\ &\quad \times \inf_{\substack{|x-y| \leq 1, \\ i=1,2}} \mathbf{P}\left(S(m) + y \in \Delta(x), \min_{\substack{0 \leq k \leq m \\ i=1,2}} (S_i(k) + y_i) \geq N + 1\right) \\ &\geq \left(\frac{p}{2}\right)^{[n/n_3]} > 0. \end{aligned}$$

Заметим, далее, что

$$\begin{aligned} &\inf_{\substack{|x-y| \leq 1, \\ i=1,2}} \mathbf{P}(X(y, n) \in \Delta(x)) \\ &\geq \inf_{\substack{|x-y| \leq 1, \\ i=1,2}} \mathbf{P}\left(X(y, n) \in \Delta(x), \min_{\substack{0 \leq k \leq n \\ i=1,2}} X_i(k, y) \geq N + 1\right) = P(n) > 0. \end{aligned}$$

Утверждение III доказано.

Докажем утверждение I. Для этого рассмотрим утверждение

$I^{(0)}$. Для любых $\Delta > 0$ и $b_2 < \infty$ найдется $n_1 < \infty$ такое, что для всех $n \geq n_1$ выполняется

$$\inf_{|x-y| \leq 1, 0 \leq x_2 \leq b_2} P(X^{(1)}(y, n) \in \Delta(x)) > 0.$$

В свою очередь, для доказательства $I^{(0)}$ рассмотрим утверждение

$I^{(1)}$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{1+}$, $\Delta > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $n_1 < \infty$ такие, что для всех $n \geq n_1$ выполняется

$$\inf_{\substack{x', y' \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{1+} \\ |x-x'| \leq \delta, |y-y'| \leq \delta}} P(X^{(1)}(y, n) \in \Delta(x)) > 0.$$

Рассмотрим, далее, компакт

$$K(b_2) = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{1+}, x = (0, x_2), 0 \leq x_2 \leq b_2, |y - x| \leq 1\}.$$

Применяя утверждение $I^{(1)}$ к каждой паре $(x, y) \in K(b_2)$ и выбирая конечное подпокрытие, получаем доказательство $I^{(0)}$.

Для доказательства $I^{(1)}$ рассмотрим три утверждения.

$I_1^{(1)}$. Для любых $\Delta > 0$ и $x \in \{0\} \times \mathbb{R}^{1+}$ найдутся $n_1 < \infty$ и $x' \in \mathbb{R}^{1+} \times \{0\}$ такие, что

$$\inf_{x'' \in \mathbb{R}^{1+} \times \{0\}, |x' - x''| \leq \Delta/4} P(X^{(1)}(x'', n_1) \in \Delta(x)) > 0.$$

При $x_2 \leq N + 1$ это утверждение следует непосредственно из условия (R_2) . Если $x_2 > N + 1$, то воспользуемся очевидным неравенством для $\Delta_1 = \Delta/4$, $\tilde{x} = (0, N + 1)$:

$$\begin{aligned} P(X^{(1)}(x'', n_1 + m) \in \Delta(x)) \\ \geq P(X^{(1)}(x'', n_1) \in \Delta_1(\tilde{x})) \inf_{z \in \Delta_1(\tilde{x})} P(X^{(1)}(z, m) \in \Delta_1(x)). \end{aligned}$$

Первый сомножитель в правой части уже оценен. В силу лемм 5.2, 5.6 найдется $m < \infty$ такое, что

$$P(m) \equiv \inf_{z \in \Delta_1(\tilde{x})} P\left(S(m) + z \in \Delta_1(x), \min_{1 \leq k \leq m} S_2(k) + z_2 > N + 1\right) > 0.$$

Поскольку

$$\inf_{z \in \Delta_1(\tilde{x})} P(X^{(1)}(z, m) \in \Delta_1(x)) \geq P(m),$$

то $I_1^{(1)}$ доказано.

$I_2^{(1)}$. Для любых $\delta > 0$ и $y \in \{0\} \times \mathbb{R}^{1+}$ найдутся $n_2 < \infty$, $\varepsilon > 0$ и $B_1 \in \mathbb{R}^1$ такие, что для всякого $y' \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{1+}$, $|y - y'| < \varepsilon$, найдется $v(y') \in \mathbb{R}^1$, $|v(y')| \leq B_1$, такое, что

$$\inf_{y' \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{1+}, |y' - y| \leq \varepsilon} P(X^{(1)}(y', n_2) \in (v(y') - \delta, v(y') + \delta) \times \{0\}) > 0.$$

Это утверждение с помощью стандартных рассуждений на базе лемм 5.2, 5.6 (которые уже применялись для доказательства $I_1^{(1)}$) сводится к случаю $0 \leq y_2 \leq N + 1$. Поскольку утверждение $I_2^{(1)}$ в этом случае следует из условий (1.1), (R_1) , то оно доказано.

$I_3^{(1)}$. Для любых $\delta > 0$ и $V_1 < \infty$ найдется $n_3 < \infty$ такое, что для всех $n \geq n_3$

$$\inf_{v \in \mathbb{R}^1, |v| \leq V_1} P(X^{(1)}(0, n) \in (v - \delta, v + \delta) \times \{0\}) > 0.$$

Докажем это утверждение. В силу $I_1^{(1)}$ для $\Delta = 0.1$ и $x_2 = N + 0.5$ найдется $n_1 < \infty$ такое, что $p_1 \equiv P(X^{(1)}(0, n_1) \in \Delta(x)) > 0$ для $x = (x_1, N + 0.5)$. В силу $I_2^{(1)}$ для заданных $\delta > 0$ и $v \in \mathbb{R}^1, |v| \leq V$, найдутся $n_2 < \infty$ и $B_1 < \infty$ такие, что для всякого $y'_2 \in [N + 0.49, N + 0.51]$ найдется $y'_1 \in [-B_1, B_1]$ такое, что для $y' = (y'_1, y'_2)$ выполняется

$$p_2 \equiv \inf_{y'_2 \in [N + 0.49, N + 0.51]} P(X^{(1)}(y', n_2) \in (v - \delta, v + \delta) \times \{0\}) > 0.$$

Очевидно, что для расстояния между так построенными точками x и y' справедливо неравенство $|x - y'| \leq V_1 + B_1 + |x| + 0.2 \equiv M$. Далее, в силу утверждения $III^{(0)}$ для этого M и $\Delta = 0.1$ выберем $n_0 < \infty$ такое, что для всех $n > n_0$ выполняется $\inf_{|z| \leq M} P(S(n) \in \Delta(z)) > 0$. В силу леммы 5.6 из последнего неравенства следует для тех же n

$$p_0(n) \equiv \inf_{|z| \leq M, |z_2| \leq 0.2} P\left(S(n) \in \Delta(z), \min_{1 \leq k \leq n} S_2(k) > -0.2\right) > 0.$$

Пусть $n_3 = n_0 + n_1 + n_2$; для всех $n \geq n_3$ получили

$$\inf_{|v| \geq V_1} P(X^{(1)}(0, n) \in (v - \delta, v + \delta) \times \{0\}) \geq p_0(n)p_1p_2 > 0.$$

Утверждение $I_3^{(1)}$ доказано.

Поскольку из утверждений $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, I_3^{(1)}$ следует $I^{(1)}$, то оно доказано.

Утверждение I следует из утверждения $I^{(0)}$ (доказательство импликации $I^{(0)} \rightarrow I$ аналогично доказательству импликации $III^{(0)} \rightarrow III$). Утверждение I доказано.

В силу очевидной симметрии доказано и утверждение II. Утверждение IV следует из условия (R_2) . Лемма 1.1 в решетчатом случае доказана.

Поскольку в решетчатом случае доказательство аналогично (и значительно проще), то лемма 1.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2. Свойства выпуклости и полунепрерывности снизу функции уклонений $\Lambda(\alpha) = \Lambda^{(3)}(\alpha)$ известно (см., например, [15]). Для $j = 1, 2$ функция $\Lambda^{(j)}(\alpha)$ может быть представлена в виде

$$\Lambda^{(j)}(\alpha) = D^{(j)}((\alpha_j, 1)), \quad (2.1)$$

где

$$D^{(j)}(\alpha_j, u) = \inf_{v > 0} v \Lambda^{(j)}\left(\frac{\alpha}{v}, \frac{u}{v}\right), \quad j = 1, 2, \quad (2.2)$$

есть так называемая вторая функция уклонений, введенная и изученная в [16]. Поэтому свойства выпуклости и полунепрерывности функций $\Lambda^{(j)}(\alpha)$, $j = 1, 2$, следуют из выпуклости и полунепрерывности второй функции уклонений (см. [16]).

Существование функции $\Lambda_0(\alpha) = \Lambda_0^{(3)}(\alpha)$ и представление (1.19) следуют из леммы 5.1. Воспользуемся снова соотношениями (2.1), (2.2); для $j = 1, 2$ в (2.2) верно представление [16]:

$$D^{(j)}(\alpha_j, u) = \sup_{\lambda=(\lambda_1, \lambda_2) \in \Phi_1^{(i)}} \{\lambda_1 \alpha_j + \lambda_2 u\}.$$

Поэтому

$$p\Lambda^{(j)}\left(\frac{\alpha}{p}\right) = \sup_{\lambda \in \Phi_1^{(i)}} \{\lambda_1 \alpha_j + p\lambda_2\}, \quad j = 1, 2.$$

Устремляя $p \downarrow 0$, получаем представление (1.20) для функций $\Lambda_0^{(1)}(\alpha)$, $\Lambda_0^{(2)}(\alpha)$.

Свойства выпуклости и полунепрерывности функций $\Lambda_0(\alpha)$, $\Lambda_0^{(1)}(\alpha)$, $\Lambda_0^{(2)}(\alpha)$ следуют из представлений (1.19), (1.20). Наконец, утверждение 3 доказываемой леммы следует из теоремы 1.2 (см. также замечание, приведенное после формулировки теоремы 1.2). Лемма 1.2 доказана.

2.2. Доказательства теорем 1.2, 1.3. Ниже для упрощения изложения основные рассуждения настоящего параграфа мы проведем для целочисленных цепей $X(y, n)$. Замечания о том, как переносить полученные результаты на нерешетчатый случай будут помещены после доказательства теоремы 1.2.

Для доказательства теоремы 1.2 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Напомним, что константа $\Lambda^{(0)}$ определена формулой (1.18).

ЛЕММА 2.1. Пусть $T \geq 0$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $y, x \in \mathbb{Z}^{2+}$ таковы, что при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{y}{s} \rightarrow 0, \quad \frac{x}{s} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \frac{n}{s} \rightarrow T.$$

Тогда

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, n) = x) = -T\Lambda^{(0)}, \quad (2.3)$$

причем если $T = 0$, то для выполнения (2.3) необходимо предположить дополнительно, что отношение n/s сходится к 0 достаточно медленно (например, $n/s \geq c(|x| + |y|)/s$, $c = \text{const}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.1 найдется такое целое $k < \infty$, что

$$p \equiv \inf_{y, x \in \mathbb{Z}^{2+}, |y-x| \leq \sqrt{2}} \mathbf{P}(X(y, k) = x) > 0. \quad (2.4)$$

Поэтому $\mathbf{P}(X(0, m) = x) \geq p^{\lfloor |x| \rfloor}$ при $m = \lfloor |x| \rfloor k$. Таким образом, для заданных $y, x \in \mathbb{Z}^{2+}$, $x/s, y/s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, можно выбрать функцию $m = m(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $m \rightarrow \infty, m/s \rightarrow 0$, для которой

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(0, m) = x) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(0, m) = y) = 0, \quad (2.5)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(x, m) = 0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, m) = 0) = 0. \quad (2.6)$$

Построим функцию восстановления

$$H(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n \tau^{(0)}(i) \in B\right)$$

для независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин $\tau^{(0)}(i)$, определенных в п. 1.4. В силу того, что $\tau^{(0)}(i) \geq 1$, справедливо равенство $P(X(0, n) = 0) = H(\{n\})$. Поэтому в силу теоремы о больших отклонениях функции восстановления [16; теорема 5] верно соотношение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(0, n) = 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln H(\{n\}) = -T\Lambda^{(0)}. \quad (2.7)$$

Далее, воспользуемся легко проверяемыми неравенствами

$$\begin{aligned} P(X(0, n+2m) = 0) &\geq P(X(0, m) = y)P(X(y, n) = x)P(X(x, m) = 0), \\ P(X(y, n) = x) &\geq P(X(y, m) = 0)P(X(0, n-2m) = 0)P(X(0, m) = x), \quad n > 2m. \end{aligned}$$

Применяя к первому неравенству соотношение (2.7) (где n заменено на $n+2m$) и (2.5), (2.6), получаем оценку сверху

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(y, n) = x) \leq -T\Lambda^{(0)}.$$

Применяя ко второму неравенству соотношение (2.7) (где n заменено на $n-2m$) и (2.5), (2.6), получаем оценку снизу

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X(y, n) = x) \geq -T\Lambda^{(0)}.$$

Соотношение (2.3) доказано. При этом для справедливости оценки снизу потребовалось дополнительное ограничение $n > 2m$.

Лемма 2.1 доказана.

Напомним, что функции $\Lambda^{(1)}(\alpha, t)$, $\Lambda^{(1)}(\alpha)$ определены формулами (1.14), (1.17) соответственно; функция $\Lambda_0^{(1)}(\alpha)$ определена и изучена в лемме 1.2.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\beta = (\beta_1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma = (\gamma_1, 0) \in \mathbb{R}^2$, $T \geq 0$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $y, x \in \mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^{1+}$ таковы, что при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{y}{s} \rightarrow \gamma, \quad \frac{x}{s} \rightarrow \beta, \quad \frac{n}{s} \rightarrow T. \quad (2.8)$$

Тогда если $T > 0$, то

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X^{(1)}(y, n) = x) \leq -T\Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right); \quad (2.9)$$

если $T = 0$, то

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(X^{(1)}(y, n) = x) \leq -\Lambda_0^{(1)}(\beta - \gamma). \quad (2.10)$$

Предположим дополнительно, что при $T > 0$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

- а) функция $\Lambda^{(1)}(\alpha)$ непрерывна в точке $\alpha = (\beta - \gamma)/T$;
- б) $n/s \geq t(s)$, где $t(s) > T$ есть некоторая монотонная функция (зависящая от функций y, x, n), которая достаточно медленно сходится к T при $s \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X^{(1)}(y, n) = x) = -T \Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right). \quad (2.11)$$

Если $T = 0$ и отношение n/s стремится к 0 достаточно медленно, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X^{(1)}(y, n) = x) = -\Lambda_0^{(1)}(\beta - \gamma). \quad (2.12)$$

Оценки снизу для $n/s - T$, обеспечивающие требуемую медленную сходимость, содержатся в доказательстве настоящей леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью леммы 1.1 (см. доказательство леммы 2.1) можно свести изучение вероятностей $\mathbf{P}(X^{(1)}(y, n) = x)$ к изучению вероятностей

$$\mathbf{P}(X^{(1)}(y', n \pm m) = x') = \mathbf{P}(X^{(1)}(0, n \pm m) = x' - y'),$$

где $y' = (y_1, 0)$, $x' = (x_1, 0)$, $m = m(s) \equiv n_0([y_2] + [x_2] + 2)$ и константа $n_0 < \infty$ из леммы 1.1. Поэтому достаточно доказать все утверждения леммы 2.2 для частного случая $\gamma = (0, 0)$, $\beta = (\beta_1, 0)$, $y = (0, 0)$, $x = (x_1, 0) \in \mathbb{Z}^1 \times \{0\}$. Рассмотрим суммы

$$(Z_k^{(1)}, T_k^{(1)}) = \left(\sum_{j=1}^k \zeta^{(1)}(j), \sum_{j=1}^k \tau^{(1)}(j) \right),$$

введенные в п. 1.4, где $T_k^{(1)}$ есть момент k -го возвращения на ось иксов цепи $X^{(1)}(0, n)$, а $Z_k^{(1)}$ – приращение координаты $X_1^{(1)}$ за это время. Рассмотрим функцию восстановления

$$H^{(1)}(B, n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(Z_k^{(1)} \in B, T_k^{(1)} = n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(Z_k^{(1)} \in B, T_k^{(1)} = n), \quad B \subseteq \mathbb{R}^1,$$

и воспользуемся очевидным тождеством

$$\mathbf{P}(X^{(1)}(0, n) = x) = H^{(1)}(\{x_1\}, n), \quad x_1 \in \mathbb{Z}^1.$$

Докажем сначала оценки сверху для функции $H^{(1)}(\{x_1\}, n)$. В силу неравенства Чебышёва справедливо

$$H^{(1)}(\{x_1\}, n) \leq n \max_{1 \leq k \leq n} \mathbf{P}(Z_k^{(1)} = x_1, T_k^{(1)} = n) \leq n \max_{1 \leq k \leq n} e^{-k \Lambda^{(1)}((x_1/k, 0), n/k)}.$$

Поэтому для $p = k/n$, $\beta'_1 = x_1/s$, $T' = n/s$ справедливо

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} H^{(1)}(\{x_1\}, n) &\leq \exp \left\{ -s T' \min_{0 < p \leq 1} p \Lambda^{(1)}((\beta'_1/T' p, 0), 1/p) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -s T' \Lambda^{(1)}((\beta'_1/T', 0)) \right\} = \exp \left\{ -s T' \Lambda^{(1)}(\beta'/T') \right\}, \end{aligned}$$

где $\beta' = (\alpha'_1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Поскольку $T' \rightarrow T$, $\beta'/T' \rightarrow \beta/T$ при $s \rightarrow \infty$ и функция $\Lambda^{(1)}(\alpha)$ полунепрерывна снизу, то получаем

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln H^{(1)}(\{x_1\}, n) \leq -T \Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta}{T}\right).$$

Неравенства (2.9), (2.10) доказаны.

Докажем теперь оценки снизу для функции $H^{(1)}(\{x_1\}, n)$. Пусть $T > 0$ и при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{x_1}{s} \rightarrow \beta_1 \equiv \alpha_1 T, \quad \frac{n}{s} \rightarrow T.$$

Рассмотрим множество

$$\Lambda^{(1)} = \{(\alpha_1, t) \in \mathbb{R}^2 : \Lambda^{(1)}((\alpha_1, 0), t) < \infty\}.$$

В силу выпуклости функции $\Lambda^{(1)}((\alpha_1, 0), t)$ множество $\Lambda^{(1)}$ выпукло. В силу уже полученных оценок сверху и леммы 1.1 для некоторого $C < \infty$ “усеченный сектор”

$$\{(u, t) : t \geq \max\{1, C|u|\}\}$$

лежит в множестве $\Lambda^{(1)}$. Из этого следует, что внутренность $(\Lambda^{(1)})$ множества $\Lambda^{(1)}$ непуста и, разумеется, выпукла. Функция $\Lambda^{(1)}((\alpha_1, 0))$ выпукла (см. лемму 1.2), поэтому можно указать непустой интервал (α_1^-, α_1^+) , в котором эта функция конечна и вне которого она равна ∞ . Для вещественного c через $L(c)$ обозначим луч

$$L(c) = \{(u, t) = (ct, t) : t \geq 0\}.$$

Тогда, обращаясь к определению (1.17) функции $\Lambda^{(1)}((\alpha_1, 0))$, данному в п. 1.4, можно утверждать, что для $\alpha_1 \in (\alpha_1^-, \alpha_1^+)$ луч $L(\alpha_1)$ пересекает множество $(\Lambda^{(1)})$ по непустому “интервалу”

$$L_0(\alpha_1) = \{(u, t) = (\alpha_1 t, t) : t_-(\alpha_1) < t < t_+(\alpha_1)\},$$

а для $\alpha_1 \notin (\alpha_1^-, \alpha_1^+)$ луч $L(\alpha_1)$ не пересекает $(\Lambda^{(1)})$. Определение функции $\Lambda^{(1)}((\alpha_1, 0))$ можно переписать так:

$$\Lambda^{(1)}((\alpha_1, 0)) = \inf_{(u, t) \in L_0(\alpha_1)} \Lambda^{(1)}((u, 0), t)/t.$$

Поэтому для любого α_1 такого, что $\Lambda^{(1)}((\alpha_1, 0)) < \infty$, и любого $\delta > 0$ найдутся точка $(\bar{u}, \bar{t}) \in L_0(\alpha_1)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$V_\varepsilon(\bar{u}, \bar{t}) \equiv \{(u', t') : |(u', t') - (\bar{u}, \bar{t})| \leq \varepsilon\} \subseteq (\Lambda^{(1)}),$$

$$\sup_{(u', t') \in V_\varepsilon(\bar{u}, \bar{t})} |\Lambda^{(1)}((\beta_1, 0)) - \Lambda^{(1)}((u', 0), t')/t'| < \delta.$$

Иначе говоря, мы построили компакт $V_\varepsilon(\bar{u}, \bar{t})$, который лежит в открытом множестве $(\Lambda^{(1)})$ и для всех точек (u', t') которого функция $\Lambda^{(1)}((u', 0), t')/t'$ отличается от числа $\Lambda^{(1)}((\alpha_1, 0))$ менее чем на δ . При этом если $\alpha_1 \in (\alpha_1^-, \alpha_1^+)$, то точку $(\bar{u}, \bar{t})$ и положительное ε можно выбрать так, что луч $L(\alpha_1)$ пройдет через эту точку $(\bar{u}, \bar{t})$. Если же $\alpha_1 = \alpha_1^+$, то последнее условие выполнено быть не может, поскольку в этом случае луч $L(\alpha_1^+)$ не пересекает открытое множество $(\Lambda^{(1)})$, а только касается его “снизу”. В этом случае вместо множества $V_\varepsilon(\bar{u}, \bar{t})$ рассмотрим $\bar{V}_\varepsilon(\bar{u}, \bar{t})$, которое определяется

как выпуклая оболочка множества $V_\varepsilon(\bar{u}, \bar{t})$ и точки (u_0, t_0) , которая лежит на пересечении оси $L(\alpha_1^+)$ и множества $\Lambda^{(1)}$. Тогда любая точка (u', t') из этого множества, не равная точке (u_0, t_0) , лежит в открытом множестве $(\Lambda^{(1)})$.

Воспользуемся теперь неравенством

$$H^{(1)}(\{x_1\}, n) \geq \mathbb{P}(Z_k^{(1)} = x_1, T_k^{(1)} = n),$$

где в качестве k выберем $k = k(s) = [n/t]$. Тогда если $\beta_1 T = \alpha_1 \in (\alpha_1^-, \alpha_1^+)$, то для всех достаточно больших s точка $(z_1/k, n/k) \sim (\bar{u}, \bar{t})$ лежит в компакте $V_\varepsilon(\bar{u}, \bar{t})$, и в силу леммы 5.2 выполняется

$$\begin{aligned} \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln H^{(1)}(\{x_1\}, n) &\geq \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbb{P}(Z_k^{(1)} = x_1, T_k^{(1)} = n) \\ &\geq -T\Lambda^{(1)}((\bar{u}, 0), \bar{t}) \geq -T\Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta}{T}\right) - \delta. \end{aligned}$$

Таким образом, верна оценка снизу

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln H^{(1)}(\{x_1\}, n) \geq -T\Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta}{T}\right). \quad (2.13)$$

Если же $\alpha_1 = \alpha_1^+$ и $n/s - T > 0$ и стремится к 0 достаточно медленно, то для всех достаточно больших s точка $(x_1/k, n/k) \sim (u_0, t_0)$ лежит в компакте $\bar{V}_\varepsilon(\bar{u}, \bar{t})$ и при этом расстояние от этой точки до точки (u_0, t_0) стремится к 0 достаточно медленно; стандартные рассуждения с использованием леммы 5.2 показывают, что и в этом случае оценка (2.13) справедлива.

Мы доказали (2.11). Поскольку очевидно, что (2.12) следует из (2.11), то лемма 2.2 доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\beta = (\beta_1, 0), \gamma = (\gamma_1, 0) \in \Gamma^{(1)}$; $T > 0$; $n, m \in \{1, 2, \dots\}$; $y, x \in \mathbb{Z}^{2+}$ таковы, что при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{y}{s} \rightarrow \gamma, \quad \frac{x}{s} \rightarrow \beta, \quad \frac{n}{s} \rightarrow T, \quad \frac{m}{s} \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

Тогда

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbb{P}\left(X(y, n) = x, \min_{m \leq k \leq n-m} X_1(y, k) > N\right) \leq -T\Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right). \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай

$$\Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right) < \infty \quad (2.16)$$

и предположим, что для всех достаточно больших s вектор $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^{2+}$ удовлетворяет условию

$$y_2 > N. \quad (2.17)$$

Пусть константы β, γ, T и функции $n = n(s), x = x(s), y = y(s)$ удовлетворяют соотношениям (2.14), (2.16), (2.17) и фиксированы. Нам понадобятся следующие два утверждения I, II.

I. Для любых γ, β, T, n , удовлетворяющих (2.14), (2.16), найдется $K < \infty$ такое, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |X(y, k)| > sK \right) \leq -R,$$

$$\text{где } R = 2T\Lambda^{(1)} \left(\frac{\beta - \gamma}{T} \right).$$

II. Для любого $\delta > 0$ и для K из соотношения I найдутся вещественное $\varepsilon > 0$ и функция $m^* = m^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $m^* \rightarrow \infty$, $m^*/s \rightarrow 0$, такие, что для любых $\gamma', \beta' \in \mathbb{R}^{2+}$, $x' \in \mathbb{Z}^{2+}$, $m \geq m^*$, удовлетворяющих соотношениям

$$|\gamma'| \leq K, \quad \left| \frac{x'}{s} \right| \leq K, \quad \frac{x'}{s} \rightarrow \beta', \quad \frac{m}{s} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

выполняется

$$\begin{aligned} L_+ \equiv \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X(y, m) \in U_\varepsilon(\gamma'), X(y, n - m) = x', \min_{m \leq k \leq n - m} X_1(y, k) > N \right) \\ + \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X(x', m) = x \right) \leq -T\Lambda^{(1)} \left(\frac{\beta - \gamma}{T} \right) + \delta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из утверждений I, II выведем (2.15). В II построено открытое покрытие компакта $\{\gamma' : |\gamma'| \leq K\}$; выбирая конечное подпокрытие, получаем следующее утверждение.

II₁. Для любого $\delta > 0$ и для K из соотношения I найдется функция $m^* = m^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $m^* \rightarrow \infty$, $m^*/s \rightarrow 0$, такая, что для любых $\beta' \in \mathbb{R}^{2+}$, $x' \in \mathbb{Z}^{2+}$, $m \geq m^*$, удовлетворяющих соотношениям

$$\left| \frac{x'}{s} \right| \leq K, \quad \frac{x'}{s} \rightarrow \beta', \quad \frac{m}{s} \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

выполняется

$$\begin{aligned} \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(X(y, n - m) = x', \min_{m \leq k \leq n - m} X_1(y, k) > N \right) \\ + \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X(x', m) = x \right) \leq -T\Lambda^{(1)} \left(\frac{\beta - \gamma}{T} \right) + \delta. \end{aligned}$$

Выберем, далее, $x' \in \mathbb{Z}^{2+}$ таким образом, что

$$\begin{aligned} \max_{|x''| \leq sK} \left\{ \mathbf{P} \left(X(y, n - m) = x'', \min_{m \leq k \leq n - m} X_1(y, k) > N \right) \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X(x'', m) = x \right) \right\} \\ = \mathbf{P} \left(X(y, n - m) = x', \min_{m \leq k \leq n - m} X_1(y, k) > N \right) \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X(x', m) = x \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(X(y, n) = x, \min_{m \leq k \leq n - m} X_1(y, k) > N \right) \\ \leq (sK)^2 \mathbf{P} \left(X(y, n - m) = x', \min_{m \leq k \leq n - m} X_1(y, k) > N \right) \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X(x', m) = x \right), \end{aligned}$$

поэтому из II₁ следует

II₂. Для любого $\delta > 0$ и для K из соотношения I найдется функция $m^* = m^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $m^* \rightarrow \infty$, $m^*/s \rightarrow 0$, такая, что для любого $m \geq m^*$, удовлетворяющего при $s \rightarrow \infty$ соотношению $m/s \rightarrow 0$, выполняется

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbb{P} \left(X(y, n) = x, \min_{m \leq k \leq n-m} X_1(y, k) > N \right) \leq -T\Lambda^{(1)} \left(\frac{\beta - \gamma}{T} \right) + \delta.$$

Поскольку вероятность в левой части (2.15) не возрастает по m , то она оценивается выражением, которое получается, если в ней заменить m на $m + m^*$; в силу II₂ верхний предел логарифма этого нового выражения не больше чем $-T\Lambda^{(1)} \left(\frac{\beta - \gamma}{T} \right) + \delta$, где $\delta > 0$ произвольно. Неравенство (2.15) доказано.

Докажем теперь I. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |X(y, k)| > sK \right) &\leq n \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(|X(y, k)| > sK) \\ &\leq n \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^k |X(y, j) - X(y, j-1)| > sK \right), \end{aligned}$$

то в силу неравенства Чебышёва справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |X(y, k)| > sK \right) &\leq n \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(|X(y, k)| > sK) \\ &\leq n \max_{1 \leq k \leq n} e^{-k\bar{\Lambda}(sK/k)} \leq ne^{-s\bar{D}(K)}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Lambda}(u) = \sup_v \left\{ uv - \ln \sup_{y \in \mathbb{R}^{2+}} \mathbb{E} e^{v|\xi(y)|} \right\}, \quad \bar{D}(u) = \inf_{t > 0} t\bar{\Lambda}(u/t).$$

В силу условия (M) функция $\bar{D}(u)$ при $u \geq 0$ имеет вид $\bar{D}(u) = cu$, где $c > 0$. Выбирая $K = R/c$, получаем I.

Докажем утверждение II. Для этого фиксируем $\gamma', \beta \in \mathbb{R}^{2+}$, $x' \in \mathbb{Z}^{2+}$, удовлетворяющие (2.18), и оценим левую часть (2.19) с помощью неравенства

$$L_+ \leq L_+(1) + L_+(2) + L_+(3), \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} L_+(1) &= \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbb{P} \left(\frac{1}{s} X(y, m) \in U_\varepsilon(\gamma') \right), \\ L_+(2) &= \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \max_{\substack{y' \in \mathbb{Z}^{2+} \\ |y'/s - \gamma'| < \varepsilon}} \mathbb{P} \left(X(y', n - 2m) = x', \min_{1 \leq k \leq n-2m} X_1(y', k) > N \right), \\ L_+(3) &= \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbb{P} \left(\frac{1}{s} X(x', m) \in U_\varepsilon(\beta) \right). \end{aligned}$$

Необходимые оценки сверху для $L_+(i)$ в правой части (2.20) содержатся в следующем утверждении III.

III. Для некоторых $k_0 \in \{1, 2, \dots\}$ и $C < \infty$ и для любых $\delta > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ найдутся $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и функция $m^* = m^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $m^* \rightarrow \infty$, $m^*/s \rightarrow 0$, такие, что для любого $m \geq m^*$, $m/s \rightarrow 0$, и для $k = [k_0 s \varepsilon]$, $\tilde{x}' = (x'_1, [s\beta'_2] + N + 1)$ выполняется

$$L_+(1) \leq \delta + \varepsilon C + \max \left\{ -R, \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X^{(1)}(y, m + k) \in U_\varepsilon(\gamma') \right) \right\}; \quad (2.21)$$

$$L_+(2) \leq \delta + \varepsilon C + \max \left\{ -R, \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \min_{\substack{y' \in \mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^1 + \\ |y'/s - \gamma'| < \varepsilon}} \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X^{(1)}(y', n + k - 2m) = \tilde{x}' \right) \right\}; \quad (2.22)$$

$$L_+(3) \leq \delta + \varepsilon C + \max \left\{ -R, \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X^{(1)}(\tilde{x}', m + k) \in U_\varepsilon(\beta) \right) \right\}. \quad (2.23)$$

В силу леммы 2.2 и свойства полунепрерывности снизу функции $\Lambda^{(1)}(\alpha)$ можно выбрать число $\varepsilon_0 > 0$ таким малым, что для всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X^{(1)}(y, n + 3k) \in U_\varepsilon(\beta) \right) \leq -T \Lambda^{(1)} \left(\frac{\beta - \gamma}{T} \right) + \delta, \quad 3\varepsilon_0 C \leq \delta. \quad (2.24)$$

В силу III и (2.24) для произвольных $\delta > 0$ и выбранного в (2.24) ε_0 найдутся $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и функция $m^* = m^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $m^* \rightarrow \infty$, $m^*/s \rightarrow 0$, такие, что для любого $m \geq m^*$, $m/s \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} L_+(1) + L_+(2) + L_+(3) &\leq 3\delta + 3\varepsilon C + \max \left\{ -R, \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X^{(1)}(y, n + 3k) \in U_\varepsilon \right) \right\} \\ &\leq 3\delta + 3\varepsilon C + \max \left\{ -R, \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} X^{(1)}(y, n + 3k) \in U_\varepsilon(\beta) \right) \right\} \\ &\leq \max \left\{ -R, -T \Lambda^{(1)} \left(\frac{\beta - \gamma}{T} \right) \right\} + 5\delta. \end{aligned}$$

Утверждение II доказано.

Для доказательства III нам понадобится вспомогательное утверждение IV.

IV. Существуют $k_0 \in \{1, 2, \dots\}$ и $C < \infty$ такие, что для любых $K < \infty$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется функция $m^* = m^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $m^* \rightarrow \infty$, $m^*/s \rightarrow 0$, такая, что для любых $m \geq m^*$, $m/s \rightarrow 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$, $|\alpha| \leq K$, для $k = [k_0 s \varepsilon]$ выполняется: если $\alpha_2 \geq 0$, то

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{S(m+k)}{s} \in U_\varepsilon(\alpha), \min_{0 \leq i \leq m+k} S_2(i) \geq 0 \right) \geq -\delta - \varepsilon C - \Lambda_0(\alpha); \quad (2.25)$$

если $\alpha_2 \leq 0$, то

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{S(m+k)}{s} \in U_\varepsilon(\alpha), \min_{0 \leq i \leq m+k} S_2(i) \geq s\alpha_2 \right) \geq -\delta - \varepsilon C - \Lambda_0(\alpha). \quad (2.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ IV. Обозначим множество, состоящее из 9 ближайших к 0 точек решетки $\mathbb{Z}^2$, через

$$\Pi = \{z = (z_1, z_2) : z_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2\}.$$

В силу леммы 5.2 найдется целое k_0 такое, что

$$p_0 \equiv \min_{z \in \Pi} \mathbf{P}(S(k_0) = z) > 0. \quad (2.27)$$

Выберем C равным $-2 \ln p_0$. Таким образом, константы k_0, C в IV найдены.

Пусть, далее, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_2 \leq 0$. Для целых m, k справедливо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{S(m)}{s} \in U_{\varepsilon/4}(\alpha)\right) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2, |z/s - \alpha| < \varepsilon/4} \mathbf{P}\left(\frac{S(m)}{s} = z\right) \\ &\leq \frac{1}{M} \sum_{z \in \mathbb{Z}^4, |z/s - \alpha| < \varepsilon/2} \mathbf{P}\left(\frac{S(m)}{s} = z\right) \mathbf{P}\left(\left|\frac{S(k)}{s}\right| < \varepsilon/2, S_2(k) \geq s\alpha_2 - z_2\right) \\ &\leq \frac{1}{M} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S(m)}{s} - \alpha\right| < \varepsilon/4, \left|\frac{S(m+k) - S(m)}{s}\right| < \varepsilon/2; S_2(m+k) \geq s\alpha_2\right) \\ &\leq \frac{1}{M} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S(m+k)}{s} - \alpha\right| < \varepsilon; S_2(m+k) \geq s\alpha_2\right), \end{aligned}$$

где

$$M = \min_{z \in \mathbb{Z}^2, |z/s - \alpha| < \varepsilon/4} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S(k)}{s}\right| < \varepsilon/2, S_2(k) \geq s\alpha_2 - z_2\right).$$

В силу леммы 5.4 по заданным $K, \varepsilon/2, \delta > 0$ можно выбрать функцию m^* такую, что для любых $m \geq m^*, m/s \rightarrow 0, \alpha \in \mathbb{R}^2, |\alpha| \leq K$, выполняется

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S(m)}{s} \in U_{\varepsilon/2}\right) \geq -\delta - \Lambda_0(\alpha).$$

Далее можно выбрать $k = k_0[s\varepsilon/2]$; тогда в силу (2.27) верно

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln M \geq -\varepsilon C.$$

Получили оценку

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S(m+k)}{s} \in U_{\varepsilon}(\alpha), S_2(m+k) \geq s\alpha_2\right) \geq -\delta - \varepsilon C - \Lambda_0(\alpha).$$

Далее следует воспользоваться леммой 5.6. Утверждение IV для $\alpha_2 \leq 0$ доказано. Поскольку для $\alpha_2 \geq 0$ утверждение IV доказывается аналогично, то оно доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ III. В силу леммы 5.5 для $R = 2T\Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right)$ и любого $\delta > 0$ справедливо

$$L_+(1) \leq \delta - \min\{\Lambda_0(\gamma' - \gamma), R\}. \quad (2.28)$$

Рассмотрим случай

$$\Lambda_0(\gamma' - \gamma) \leq R. \quad (2.29)$$

В силу IV (здесь $\alpha_2 = \gamma'_2 - \gamma_2 = \gamma'_2 \geq 0$)

$$\begin{aligned} L_+(1) &\leq 2\delta + \varepsilon C + \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S(m+k)}{s} \in U_{\varepsilon/2}(\gamma' - \gamma), \min_{0 \leq i \leq m+k} S_2(i) \geq 0\right) \\ &\leq 2\delta + \varepsilon C + \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S(m+k)+y}{s} \in U_{\varepsilon}(\gamma'), \min_{0 \leq i \leq m+k} (S_2(i)+y) > N\right) \\ &\leq 2\delta + \varepsilon C + \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{s} X^{(1)}(y, m+k) \in U_{\varepsilon}(\gamma')\right). \end{aligned}$$

Неравенство (2.21) в III в случае (2.29) доказано. В альтернативном к (2.29) случае $\Lambda_0(\gamma' - \gamma) > R$ неравенство (2.21) следует непосредственно из (2.28); неравенство (2.21) доказано.

Поскольку остальные неравенства (2.22), (2.23) в III доказываются аналогично, то утверждение III доказано.

Таким образом, мы доказали лемму 2.3 при дополнительных предположениях (2.16), (2.17). В том случае, когда (2.16) не выполнено и $\Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right) = \infty$, это доказательство сохранится, если в этом доказательстве помещать вместо $T\Lambda^{(1)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right)$ любое положительное число, которое можно выбрать сколь угодно большим.

Если же условие (2.17) не выполнено, то в силу леммы 1.1 верно утверждение: *найдутся натуральное r и вещественное $C < \infty$ такие, что*

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(X(y, n) = x, \min_{m \leq k \leq n-m} X_1(y, k) > N\right) \\ &\leq C\mathbf{P}\left(X(\tilde{y}, n+r) = x, \min_{m+r \leq k \leq n-m+r} X_1(\tilde{y}, k) > N\right), \end{aligned}$$

где $\tilde{y} = (y_1, \max\{y_2, N+1\})$. Поскольку для $\tilde{y}$ условие (2.17) выполнено, то из доказанной для $\tilde{y}$ оценки сверху вытекает такая же оценка и для y . Лемма 2.3 доказана.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^{2+}$, $T > 0$, $n, m \in \{1, 2, \dots\}$, $y, x \in \mathbb{Z}^{2+}$ таковы, что при $s \rightarrow \infty$

$$\frac{y}{s} \rightarrow \gamma, \quad \frac{x}{s} \rightarrow \beta, \quad \frac{n}{s} \rightarrow T, \quad \frac{m}{s} \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(X(y, n) = x, \min_{m \leq k \leq n-m, i=1,2} X_i(y, k) > N\right) \leq -T\Lambda^{(3)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right). \quad (2.30)$$

Доказательство леммы 2.4 аналогично доказательству леммы 2.3 (и даже немного проще). Поэтому мы его опускаем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Оценки сверху в теореме 1.2 при $T > 0$, если заменить пределы $\lim$ на верхние пределы $\limsup$, справедливы без каких-либо дополнительных предположений. Мы приведем эту оценку в виде отдельного утверждения.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$, $T > 0$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $y, x \in \mathbb{Z}^{2+}$ таковы, что при $s \rightarrow \infty$ выполняется $y/s \rightarrow \gamma$, $x/s \rightarrow \beta$, $n/s \rightarrow T$. Тогда

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, n) = x, A(j)) \leq -T \Lambda^{(j)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right), \quad (2.31)$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{s} X(y, n) \in U_\varepsilon(\beta), A(j)\right) \leq -T \Lambda^{(j)}\left(\frac{\beta - \gamma}{T}\right). \quad (2.32)$$

Сформулируем теперь оценки сверху для верхних пределов при $T = 0$.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$, $y, x \in \mathbb{Z}^{2+}$ из леммы 2.5, $n \in \{1, 2, \dots\}$ таково, что при $s \rightarrow \infty$ выполняется $n \rightarrow \infty$, $n/s \rightarrow 0$. Тогда

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, n) = x, A(j)) \leq -\Lambda_0^{(j)}(\beta - \gamma), \quad (2.33)$$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{s} X(y, n) \in U_\varepsilon(\beta), A(j)\right) \leq -\Lambda_0^{(j)}(\beta - \gamma). \quad (2.34)$$

Таким образом, оценки сверху в утверждениях (1.26)–(1.29) теоремы 1.2, если в них пределы заменить на верхние пределы, следуют из лемм 2.5, 2.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.6. Используя стандартные рассуждения, можно доказать, что (2.34) эквивалентно следующему утверждению: найдется функция $\delta = \delta(s) > 0$, $\delta(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, такая, что для любой функции $\varepsilon = \varepsilon(s) \geq \delta(s)$, $\varepsilon(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, выполняется

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{s} X(y, n) \in U_\varepsilon(\beta), A(j)\right) \leq -\Lambda_0^{(j)}(\beta - \gamma). \quad (2.35)$$

Выберем теперь $x \in \mathbb{Z}^{2+}$, $|x - \beta| < s\varepsilon$, таким образом, что

$$\mathbf{P}(X(y, n) = x, A(j)) = \max_{x' \in \mathbb{Z}^{2+}, |x' - \beta| < s\varepsilon} \mathbf{P}(X(y, n) = x', A(j)).$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{s} X(y, n) \in U_\varepsilon(\beta), A(j)\right) \leq (2s\varepsilon)^2 \mathbf{P}(X(y, n) = x, A(j)),$$

поэтому (2.34) следует из (2.33). Поскольку очевидно, что (2.33) следует из (2.34), то мы показали, что утверждения (2.33), (2.34) эквивалентны.

Используя стандартные рассуждения и лемму 5.1, можно доказать, что (2.33) следует из утверждения (2.31) леммы 2.5. Лемма 2.6 доказана.

Доказательство леммы 2.5. Соотношения (2.31), (2.32) леммы 2.5 тоже эквивалентны (см. доказательство леммы 2.6). Поэтому нам достаточно доказать соотношение (2.31).

Для $j = 0$ соотношение (2.31) следует из леммы 2.1, для $j = 1$ – из леммы 2.3 (в силу симметрии, оценка сверху (2.31) верна и для $j = 2$), для $j = 3$ – из леммы 2.4. Лемма 2.5 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.2. Оценки снизу в утверждениях (1.26)–(1.29) теоремы 1.2, в которых пределы заменены на нижние пределы, доказываются единообразно; эти доказательства представляют собой набор стандартных приемов, которые неоднократно использовались при доказательстве лемм 1.1, 2.1, 2.2, поэтому мы их опускаем. Теорема 1.2 в решетчатом случае доказана.

В нерешетчатом случае все основные этапы доказательства сохраняются, если заменить события вида $\{X = x\}$ на события вида $\{X \in \Delta(x)\}$ и при этом использовать лемму 1.1 и технику интегро-локальных теорем, развитую в работах [13], [14], [16].

Доказательство теоремы 1.3. Оценки сверху для утверждений в теореме 1.3, в которых пределы заменены на верхние пределы, следуют непосредственно из теоремы 1.2, а доказательства оценок снизу для утверждений в теореме 1.3, в которых пределы заменены на нижние пределы, практически не отличаются от доказательства оценок снизу в теореме 1.2. Теорема 1.3 доказана.

2.3. Доказательство теоремы 1.4. III (доказательство утверждения III теоремы 1.4). Допустим, что график G_f функции f имеет самопересечение. Это означает, что для некоторых $0 \leq k < k + j \leq l$ точки

$$(t_k, \beta(k)), (t_{k+1}, \beta(k+1)), \dots, (t_{k+j}, \beta(k+j)) \quad (2.36)$$

обладают свойством $t_k = t_{k+1} = \dots = t_{k+j}$ и ломаная, построенная по точкам $\beta(k), \beta(k+1), \dots, \beta(k+j)$, имеет самопересечение, т.е. существует точка $\beta' \in \mathbb{R}^{2+}$, которая одновременно лежит на отрезках $[\beta(k), \beta(k+1)]$, $[\beta(k+j-1), \beta(k+j)]$. В этом случае построим новую траекторию f' , у которой участок (2.36) заменен на участок $(t_k, \beta(k)), (t_k, \beta'), (t_k, \beta(k+j))$. Очевидно, что стоимость новой траектории $L(f')$ меньше, чем $L(f)$. Поэтому траектория с самопересечением не может быть оптимальной. Мы доказали, что оптимальная траектория удовлетворяет свойству (i).

Условие (ii) исключает “фиктивные” точки $(t_k, \beta(k))$ траектории f , т.е. такие, удаление которых не меняет график G_f . Поскольку очевидно, что удаление таких “фиктивных” точек не меняет величину $L(f)$, то оптимальную траекторию можно выбрать без таких точек.

Свойство (iii) вытекает из свойства (ii) и из неравенства треугольника, которому удовлетворяют функции $\Lambda^{(j)}, \Lambda_0^{(j)}, j = 1, 2, 3$.

Свойство (iv) следует из неравенств согласованности, которые приведены в лемме 1.2. Утверждение III доказано.

V (доказательство утверждения V теоремы 1.4). Для целого $M \geq 1$ обозначим $\mathcal{F}_1^{(M)}(\gamma, \beta, T)$ класс функций $f \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих свойствам (i)–(iv) и таких, что $\beta(0) = \gamma, \beta(l) = \beta, t_l = T, l \leq M$.

Можно проверить, основываясь на уже доказанном утверждении III, что

$$D(\gamma, \beta, T) = \min_{M \geq 1} \inf_{f \in \mathcal{F}_1^{(M)}(\gamma, \beta, T)} L(f),$$

т.е. минимум в определении $D(\gamma, \beta, T)$ достигается на траекториях f из класса

$$\bigcup_{M \geq 1} \mathcal{F}_1^{(M)}(\gamma, \beta, T).$$

Для $\gamma, \beta \in \Gamma, T \geq 0$ введем класс $\mathcal{F}_2^{(M)}(\gamma, \beta, T)$ функций $f \in \mathcal{F}_1^{(M)}(\gamma, \beta, T)$, для которых выполнены новые свойства:

(v) траектория f содержит не более одного “нулевого” участка $(t_{k-1}, \beta(k-1)), (t_k, \beta(k))$, когда $t_k > t_{k-1}$, $\beta(k-1) = \beta(k)$; если такой участок есть, то $\beta(k-1) = \beta(k) \in \Gamma$, и если траектория проходит через 0, то $\beta(k-1) = \beta(k) = 0$, а если траектория не проходит через 0 и $\beta(k-1) = \beta(k) \in \Gamma^{(i)}$, то не существует двух соседних точек $\beta(j-1), \beta(j)$, $j \neq k$, лежащих на $\Gamma^{(i)}$;

(vi) траектория f имеет не более двух участков $(t_{k-1}, \beta(k-1)), (t_k, \beta(k))$, лежащих в среде $(\mathbb{R}^{2+})$, когда $\beta(k-1)$ и $\beta(k)$ лежат на разных множествах $\Gamma^{(1)} \setminus \{0\}, \Gamma^{(2)} \setminus \{0\}$; если же траектория имеет один участок положительной длины на $\Gamma^{(1)} \setminus \{0\}$ и один участок положительной длины на $\Gamma^{(2)} \setminus \{0\}$, то она имеет не более одного участка в среде $(\mathbb{R}^{2+})$.

Утверждение IV теоремы 1.4 будет следовать из утверждения: для $\gamma, \beta \in \Gamma, T \geq 0$

$$D(\gamma, \beta, T) = \min_{M \geq 1} \inf_{f \in \mathcal{F}_2^{(M)}(\gamma, \beta, T)} L(f) = \inf_{f \in \mathcal{F}_2^{(5)}(\gamma, \beta, T)} L(f). \quad (2.37)$$

Действительно, если $\gamma \in (\mathbb{R}^{2+})$, то следует добавить еще один участок от γ до границы Γ ; это же следует сделать, если $\beta \in (\mathbb{R}^{2+})$. Поэтому общее число узлов не превышает $1 + 5 + 1 = 7$. Нам осталось доказать (2.37).

Анализируя все траектории, лежащие в $\mathcal{F}_1^{(M)}(\gamma, \beta, T)$ для $\gamma, \beta \in \Gamma$, можно увидеть, что для $M > 5$ выполняется $\mathcal{F}_2^{(M)}(\gamma, \beta, T) \setminus \mathcal{F}_2^{(5)}(\gamma, \beta, T) = \emptyset$. Поэтому второе равенство в (2.37) установлено. Для доказательства первого равенства в (2.37) достаточно убедиться, что любую функцию $f \in \mathcal{F}_1^{(M)}(\gamma, \beta, T)$ для $\gamma, \beta \in \Gamma$ можно заменить на функцию $f' \in \mathcal{F}_2^{(M')}(\gamma, \beta, T)$ и при этом $L(f') \leq L(f)$. Покажем, как это можно сделать.

Для того чтобы добиться выполнения условия (v), рассмотрим все точки $\beta(k) \in \Gamma$, в которых траектория “сидит” положительное время, и выберем из них такую точку $\beta(k_0)$, для которой цена “сиденья” минимальна. Построим новую траекторию f' , которая “сидит” в единственной точке $\beta(k_0)$ время T_0 , где T_0 есть суммарное время “сидения” f во всех точках. Очевидно, далее, что если есть точка $\beta(k) = 0$, то стоит положить $\beta(k_0) = 0$, ибо цена “сидения” в 0 минимальна.

Если же $\beta(k_0) \in \Gamma^{(i)} \setminus \{0\}$, где $i = 1$ или 2 , то если на $\Gamma^{(i)} \setminus \{0\}$ есть еще две соседние точки $\beta(k-1), \beta(k)$, то поместим точку “сидения” в течение времени T_0 в точку $\beta(k-1)$. Заметим, далее, что в силу выпуклости функции $\Lambda^{(i)}(t)$ выгоднее двигаться от точки $\beta(k-1)$ в точку $\beta(k)$ в течение времени $T_0 + (t_k - t_{k-1})$ с постоянной скоростью, чем “сидеть” в точке $\beta(k-1)$ время T_0 , а затем двигаться от точки $\beta(k-1)$ в точку $\beta(k)$ в течение времени $t_k - t_{k-1}$ с постоянной скоростью. Прделав эти преобразования, мы построили функцию $f' \in \mathcal{F}_1^{(M')}(\gamma, \beta, T)$ (при этом параметр M мог измениться, перейдя в M') такую, что для нее выполнено условие (v) и $L(f') \leq L(f)$.

Далее, на примере функции $f \in \mathcal{F}_1^{(5)}(\gamma, 0, T)$ мы покажем, как построить, не увеличивая стоимости, функцию f' так, чтобы она удовлетворяла свойству (vi). Пусть функция $f \in \mathcal{F}_1^{(5)}(\gamma, 0, T)$ имеет вид

$$\gamma = \beta(0), \beta(1), \beta(4) \in \Gamma^{(2)} \setminus \{0\}, \quad \beta(2), \beta(3) \in \Gamma^{(1)} \setminus \{0\}, \quad \beta(5) = 0.$$

При этом пусть условие (v) выполнено, и поэтому $\beta(0) \neq \beta(1), \beta(2) \neq \beta(3)$. Введем новую траекторию $f' = f'_{\varepsilon, \delta}$ с узлами $(t'_k, \beta'(k))$, где $\beta'(0) = \gamma, \beta'(5) = 0, \beta'(1), \beta'(4) \in \Gamma^{(2)} \setminus \{0\}, \beta'(2), \beta'(3) \in \Gamma^{(1)} \setminus \{0\}$ и отрезки $[\beta(1), \beta(2)], [\beta'(1), \beta'(2)]$ и $[\beta(3), \beta(4)], [\beta'(3), \beta'(4)]$ параллельны; при этом $\varepsilon = \beta'_2(2)/\beta_2(2) - 1, \delta = \beta'_2(4)/\beta_2(4) - 1$; моменты t'_k выбирают так, чтобы скорости по каждому из отрезков не изменились (для этого следует положить $t'_k - t'_{k-1} = (t_k - t_{k-1})|\beta'(k) - \beta'(k-1)|/|\beta(k) - \beta(k-1)|$, $k = 1, 2, \dots, 5$). Нетрудно видеть, что время T' и стоимость $L(f')$ для новой траектории линейно зависят от ε, δ :

$$T' = T + A\varepsilon + B\delta, \quad L(f') = L(f) + a\varepsilon + b\delta.$$

Поэтому всегда можно выбрать линейную функцию $\varepsilon = c\delta$ и знак $(-1)^\alpha, \alpha \in \{0, 1\}$, аргумента $\delta = (-1)^\alpha|\delta|$ таким образом, чтобы

$$Ac(-1)^\alpha|\delta| + B(-1)^\alpha|\delta| = 0, \quad ac(-1)^\alpha|\delta| + b(-1)^\alpha|\delta| \leq 0.$$

Пусть $\Pi = [-1, 0]$, если $\alpha = 1$, $\Pi = [0, \infty)$, если $\alpha = 0$; мы построили семейство траекторий $\bar{f}_\delta \equiv f'_{c\delta, \delta} \in \mathcal{F}_5(\gamma, 0, T)$ такое, что $L(\bar{f}_\delta) \leq L(f)$ для любого $\delta \in \Pi$. Если перемещать параметр $\delta \in \Pi$, удаляя его от $\delta_0 = 0$, то мы “наткнемся” на значение параметра $\delta_1 \in \Pi$, в котором впервые либо $\beta'(1) = \beta(0)$, либо $\beta'(2) = \beta'(3)$, либо $\beta'(4) = 0$. Очевидно, что в любом случае можно построить в классе $\mathcal{F}_2^{(5)}(\gamma, 0, T)$ траекторию f^* , которая будет не “дороже” $\bar{f}_{\delta_1}: L(\bar{f}_{\delta_1}) \geq L(f^*)$.

Анализируя рассуждения, которые мы применили к функции $f \in \mathcal{F}_1^{(5)}(\gamma, 0, T)$, мы убеждаемся, что эти рассуждения применимы к любой функции $f \in \mathcal{F}_1^{(M)}(\gamma, \beta, T)$, у которой есть два участка, лежащие в $(\mathbb{R}^{2+})$, которые мы можем параллельно переносить. Прodelывая это, мы придем к такой конфигурации, когда двух таких участков нет.

Остается ситуация, когда у f есть два участка в среде $(\mathbb{R}^{2+})$, но мы не можем их параллельно перемещать. Это возможно лишь в конфигурации вида

$$(t_{k-1}, \beta(k-1)), \quad (t_k, \beta(k)), \quad (t_{k+1}, \beta(k+1)), \quad (t_{k+2}, \beta(k+2)),$$

где $\beta(k-1), \beta(k+2) \in \Gamma^{(1)} \setminus \{0\}, \beta(k) = \beta(k+1) \in \Gamma^{(2)} \setminus \{0\}, t_{k+1} - t_k > 0$. Поскольку функция f “сидит” в точке $\beta(k) = \beta(k+1) \in \Gamma^{(2)} \setminus \{0\}$ положительное время, то в силу свойства (v) она не имеет больше точек на множестве $\Gamma^{(2)}$. Очевидно, что такая функция не может лежать в классе $\mathcal{F}_2^{(M)}(\gamma, \beta, T)$ при $M \geq 6$. Утверждение V теоремы 1.4 доказано.

VI. Для доказательства части VI теоремы 1.4 заметим, что ломаная в $\mathbb{R}^{2+}$, построенная по точкам

$$\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(l), \tag{2.38}$$

отвечающим оптимальной траектории $f^{**} = f^{**}(\gamma, \beta)$, не может иметь самопересечений и, в частности, не может “сидеть” в какой-нибудь точке положительное время (естественно считать, что в ситуации $\beta(k-1) = \beta(k)$ есть самопересечение). Поэтому для $\gamma, \beta \in \Gamma, T \geq 0$ введем класс $\mathcal{F}_3^{(M)}(\gamma, \beta, T)$ функций $f \in \mathcal{F}_2^{(M)}(\gamma, \beta, T)$, для которых выполнено следующее свойство:

(vii) *ломаная в $\mathbb{R}^{2+}$, построенная по точкам (2.38), не имеет самопересечений.*

Анализируя все траектории, лежащие в $\mathcal{F}_3^{(5)}(\gamma, \beta, T)$ для $\gamma, \beta \in \Gamma$, можно увидеть, что выполняется $\mathcal{F}_3^{(5)}(\gamma, \beta, T) \setminus \mathcal{F}_3^{(4)}(\gamma, \beta, T) = \emptyset$.

Для $\gamma, \beta \in \Gamma, T \geq 0$ введем класс $\mathcal{F}_4^{(M)}(\gamma, \beta, T)$ функций $f \in \mathcal{F}_3^{(M)}(\gamma, \beta, T)$, для которых выполнено следующее свойство:

(viii) *траектория f не имеет трех последовательно лежащих участков*

$$(t_{k-1}, \beta(k-1)), \quad (t_k, \beta(k)), \quad k = m, m+1, m+2,$$

среди которых средний участок лежит в среде $(\mathbb{R}^{2+})$.

Анализируя все траектории, лежащие в $\mathcal{F}_4^{(5)}(\gamma, \beta, T)$ для $\gamma, \beta \in \Gamma$, можно увидеть, что выполняется $\mathcal{F}_4^{(5)}(\gamma, \beta, T) \setminus \mathcal{F}_4^{(2)}(\gamma, \beta, T) = \emptyset$.

Покажем теперь, что для $\gamma, \beta \in \Gamma$ можно выбрать оптимальную функцию f^{**} таким образом, что для нее будет выполнено условие (viii). Действительно, если для нее не выполнено условие (viii), то найдется последовательность

$$\beta(k-1) \in \Gamma^{(i)}, \quad \beta(k) \in \Gamma^{(i)} \setminus \{0\}, \quad \beta(k+1) \in \Gamma^{(i^*)} \setminus \{0\}, \quad \beta(k+2) \in \Gamma^{(i^*)}.$$

Заменим узлы $(t_k, \beta(k)), (t_{k+1}, \beta(k+1))$ на узлы $(t'_k, \beta'(k)), (t'_{k+1}, \beta'(k+1))$, которые лежат в тех же средах и при этом отрезки $[\beta(k), \beta(k+1)], [\beta'(k), \beta'(k+1)]$ параллельны и скорости движения на всех соответствующих участках не изменились. Новую функцию обозначим f'_ε , где $\varepsilon = |\beta'(k)|/|\beta(k)| - 1$. При этом справедливо $L(f'_\varepsilon) = L(f) + a\varepsilon$, $T' = T + A\varepsilon$, где константы a, A однозначно определены. Очевидно, что: $a = 0$, иначе мы сможем уменьшить стоимость $D(\gamma, \beta)$, что невозможно; $A = 0$, иначе мы сможем уменьшить $T = T^*(\gamma, \beta)$, что невозможно. Поэтому мы можем, не меняя $L(f)$ и T , изменять ε до тех пор, пока функция f'_ε не начнет удовлетворять условию (viii). Таким образом, при $\gamma, \beta \in \Gamma$ мы построили функцию $f = f^{**}(\gamma, \beta)$, для которой $l(f) \leq 2$. Часть VI теоремы 1.4 доказана.

IV. Утверждение IV теоремы 1.4 очевидно и не требует дополнительных доказательств.

I. Основываясь на уже доказанных утверждениях III–VI, докажем утверждение I. Выберем последовательность $(\gamma^{(n)}, \beta^{(n)}, T^{(n)}) \rightarrow (\gamma, \beta, T)$ такую, что

$$\liminf_{(\gamma', \beta', T') \rightarrow (\gamma, \beta, T)} D(\gamma', \beta', T') = \lim_{n \rightarrow \infty} D(\gamma^{(n)}, \beta^{(n)}, T^{(n)}).$$

Выберем, далее, в силу V функции $f^{(n)} = f^*(\gamma^{(n)}, \beta^{(n)}, T^{(n)})$ таким образом, что $M^{(n)} \equiv l(f^{(n)}) \leq 7$. Пусть $(t_k^{(n)}, \beta^{(n)}(k)), 0 \leq k \leq M^{(n)}$, — узлы, отвечающие функции $f^{(n)}$. Очевидно, что можно выбрать $M \leq 7$ и подпоследовательность $n' = n'_k$ такие, что $M^{(n')} = M$ и существуют пределы

$$t_k = \lim_{n' \rightarrow \infty} t_k^{(n')}, \quad \beta(k) = \lim_{n' \rightarrow \infty} \beta^{(n')}(k), \quad 0 \leq k \leq M.$$

Обозначим f' функцию, соответствующую узлам $(t_k, \beta(k))$, $0 \leq k \leq N$. Поскольку функции $\Lambda^{(i)}(\alpha)$ полунепрерывны снизу, то получаем

$$\liminf_{n' \rightarrow \infty} L(f^{(n')}) \geq L(f') \geq D(\gamma, \beta, T).$$

Полунепрерывность снизу функции $D(\gamma, \beta, T)$ доказана.

Для доказательства непрерывности справа функции $D(\gamma, \beta, T)$ аргумента T выберем траекторию $f = f^*(\gamma, \beta, T)$ с узлами $(t_k, \beta(k))$, $0 \leq k \leq M$, где $M = l(f) \leq 7$. Добавим еще один узел $(t_{M+1}, \beta(M+1)) = (T', \beta)$, где $T' \geq T$, и обозначим новую траекторию f' . Поскольку $L(f') = L(f) + (T' - T)\Lambda^{(j_{M+1})}(0)$, то $\lim_{T' \downarrow T} L(f') = D(\gamma, \beta, T)$. Поскольку $L(f') \geq D(\gamma, \beta, T')$, то получили $\limsup_{T' \downarrow T} D(\gamma, \beta, T') \leq D(\gamma, \beta, T)$. Последнее, вместе с полунепрерывностью снизу, дает требуемую непрерывность справа. Часть I теоремы 1.4 доказана.

II, VII. Поскольку доказательства частей II, VII следуют из уже доказанных частей I, III–VI (см. также дополнение к части VI), то теорема 1.4 доказана.

2.4. Доказательство теорем 1.5, 1.8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Представим положительный квадрант $\mathbb{R}^{2+}$ как объединение

$$\mathbb{R}^{2+} = \bigcup_{j=0}^3 \Gamma(j)$$

четырех непересекающихся множеств $\Gamma(j)$, $j = 0, 1, 2, 3$, где

$$\Gamma(j) = \begin{cases} [0, N]^2 & \text{при } j = 0; \\ \mathbb{R}^{2+} \setminus (\Gamma(0) \cup \mathbb{R}(\cdot, N)) & \text{при } j = 1; \\ \mathbb{R}^{2+} \setminus (\Gamma(0) \cup \mathbb{R}(N, \cdot)) & \text{при } j = 2; \\ \mathbb{R}(N, N) & \text{при } j = 3. \end{cases}$$

Условимся считать, что $\min\{i : i \in \emptyset\} = \max\{i : i \in \emptyset\} = \infty$. Для любого $s > 0$ и любой траектории $f \in \mathcal{F}$ с узлами $(t_0, \beta(0)), \dots, (t_l, \beta(l))$, $l = l(f)$, определим последовательность целых чисел

$$0 = m^{(s)}(0) < m^{(s)}(1) < \dots < m^{(s)}(r^{(s)}) = l \quad (2.39)$$

с помощью следующего алгоритма. Положим $m^{(s)}(0) = 0$. Если известны целые $m^{(s)}(1), \dots, m^{(s)}(k)$, то пусть

$$m^{(s)}(k+1) = \min\{m_1^{(s)}(k+1), m_2^{(s)}(k+1), m_3^{(s)}(k+1)\},$$

где

$$m_1^{(s)}(k+1) = \begin{cases} \max\{i : m^{(s)}(k) < i \leq l, s\beta(i) \in \Gamma(0)\} & \text{при } s\beta(m^{(s)}(k)) \in \Gamma(0); \\ \max\{i : m^{(s)}(k) < i \leq l, s\beta(i) \in \Gamma(1), \\ \quad s\beta(j) \notin \Gamma(2) \cup \Gamma(0) \text{ при всех } m^{(s)}(k) < j \leq i\} & \text{при } s\beta(m^{(s)}(k)) \in \Gamma(1); \\ \max\{i : m^{(s)}(k) < i \leq l, s\beta(i) \in \Gamma(2), \\ \quad s\beta(j) \notin \Gamma(1) \cup \Gamma(0) \text{ при всех } m^{(s)}(k) < j \leq i\} & \text{при } s\beta(m^{(s)}(k)) \in \Gamma(2); \\ \infty & \text{при } s\beta(m^{(s)}(k)) \in \Gamma(3); \end{cases}$$

$$m_2^{(s)}(k+1) = \begin{cases} \min\{i : m^{(s)}(k) < i \leq l, s\beta(i) \in \Gamma(1) \cup \Gamma(2)\} & \text{при } s\beta(m^{(s)}(k)) \in \Gamma(0); \\ \min\{i : m^{(s)}(k) < i \leq l, s\beta(i) \in \Gamma(2) \cup \Gamma(0)\} & \text{при } s\beta(m^{(s)}(k)) \in \Gamma(1); \\ \min\{i : m^{(s)}(k) < i \leq l, s\beta(i) \in \Gamma(1) \cup \Gamma(0)\} & \text{при } s\beta(m^{(s)}(k)) \in \Gamma(2); \\ \min\{i : m^{(s)}(k) < i \leq l, s\beta(i) \notin \Gamma(3)\} & \text{при } s\beta(m^{(s)}(k)) \in \Gamma(3); \end{cases}$$

$$m_3^{(s)}(k) = \max\{i : m^{(s)}(k) < i \leq l, s\beta(i) \in \Gamma(3)\}.$$

Числа (2.39) можно интерпретировать как номера шагов, на которых последовательность

$$s\beta(0), s\beta(1), \dots, s\beta(l), \quad l = l(f),$$

отвечающая траектории $sf \in \mathcal{F}$, меняет среду однородности (на последнем шаге $m^{(s)}(r^{(s)})$, впрочем, среда однородности может и не меняться). При этом $r^{(s)} = \max\{r : m^{(s)}(r) < \infty\}$, так что $1 \leq r^{(s)} \leq l$.

Для цепи Маркова $X(y, k)$, $0 \leq k \leq n$, $s > 0$, построим случайную траекторию $f^{(s)} \in \mathcal{F}$ с узлами

$$(t_k^{(s)}, \beta^{(s)}(k)) = \left(\frac{k}{s}, \frac{X(y, k)}{s} \right), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Для этой траектории $f^{(s)}$ определены случайное число $r^{(s)} \in \{1, 2, \dots, n\}$ и случайный набор (2.39) номеров, когда траектория $sf^{(s)}$ (вернее, цепь $X(y, 0), X(y, 1), \dots, X(y, n)$) меняет среду однородности.

Рассмотрим теперь класс траекторий

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(\gamma, \beta, T) = \bigcup_{M \geq 1} \mathcal{F}_2^{(M)}(\gamma, \beta, T),$$

где класс $\mathcal{F}_2^{(M)}(\gamma, \beta, T)$ был определен при доказательстве теоремы 1.4. Можно проверить, что для любой траектории $f \in \mathcal{F}_2$ и любого $s > 0$ последовательность номеров (2.39) имеет вид $0, 1, \dots, l$, $l = l(f)$; это означает, что траектория $sf \in \mathcal{F}_2$ на каждом шаге меняет среду однородности. Для траектории $f \in \mathcal{F}_2$ с узлами $(t_k, \beta(k))$, $0 \leq k \leq l$, и любых $\varepsilon > 0$, $s > 0$ определим множество $V_\varepsilon^{(s)}(f)$ таких траекторий $g \in \mathcal{F}$ с узлами $(u_k, \gamma(k))$, $0 \leq k \leq l(g)$, и последовательностями (2.39), что $u_k = k$, $r^{(s)} = l(f)$ и

$$\max_{0 \leq i \leq l(f)} |\gamma(m^{(s)}(i)) - \beta(i)| < \varepsilon, \quad \max_{0 \leq i \leq l(f)} \left| \frac{m^{(s)}(i)}{s} - t_i \right| < \varepsilon.$$

Непосредственно из теоремы 1.2 следует, что для любых $\delta > 0$, $R < \infty$, $f \in \mathcal{F}_2(\gamma, \beta, T)$ найдется $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ такое, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(f^{(s)} \in V_\varepsilon^{(s)}(f)) \leq \delta - \min\{D(\gamma, \beta, T), R\}. \quad (2.40)$$

Обозначим далее для $f \in \mathcal{F}$

$$\text{Var}(f) = \sum_{i=1}^{l(f)} |\beta(i) - \beta(i-1)|.$$

Это полная вариация траектории f . В силу наших условий для любого $R < \infty$ найдется $K < \infty$ такое, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(\text{Var}(f^{(s)}) > K) \leq -2 \min\{D(\gamma, \beta, T), R\}. \quad (2.41)$$

Для этого K найдется конечное число M функций $f_1, \dots, f_M \in \mathcal{F}_2(\gamma, \beta, T)$ таких, что для всех $s > 0$

$$\{X(y, n) = x, \text{Var}(f^{(s)} \leq K)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^M \{f^{(s)} \in V_{\varepsilon_i}^{(s)}(f_i)\}, \quad (2.42)$$

где $\varepsilon_i = \varepsilon(f_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$, и число $\varepsilon(f) > 0$ выбирается по f, δ, R так, что выполнено (2.40). Поэтому в силу (2.40), (2.41)

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, n) = x) \leq \delta - \min\{D(\gamma, \beta, T), R\}.$$

Оценка сверху в теореме 1.5 доказана.

Для получения оценки снизу заметим, что в силу теоремы 1.4 существует траектория $f^* \in \mathcal{F}_2^{(7)}(\gamma, \beta, T)$ с узлами $(t_0, \beta(0)), \dots, (t_l, \beta(l))$, $l \leq 7$, такая, что $L(f^*) = D(\gamma, \beta, T)$. Для функций $n_k = n_k(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $y(k) = y(k, s) \in \mathbb{Z}^{2+}$ таких, что $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_l = n$,

$$\frac{n_k}{s} \rightarrow t_k, \quad \frac{y(k)}{s} \rightarrow \beta(k), \quad 1 \leq k \leq l-1, \quad y(0) = y, \quad y(l) = x,$$

верно

$$\mathbf{P}(X(y, n) = x) \geq \prod_{k=1}^l \mathbf{P}(X(y(k-1), n_k - n_{k-1}) = y(k)).$$

Поэтому оценки снизу в теореме 1.5 следуют из теорем 1.2, 1.3. Теорема 1.5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.8. Поскольку

$$\mathbf{P}(x_s \notin U_\varepsilon(\mathcal{F}^*) \mid X(y, n) = \Delta(x)) = \frac{\mathbf{P}(x_s \notin U_\varepsilon(\mathcal{F}^*), X(y, n) = \Delta(x))}{\mathbf{P}(X(y, n) = \Delta(x))}$$

и в силу (1.40)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(X(y, n) = \Delta(x)) = -D(\gamma, \beta, T),$$

то достаточно доказать, что для некоторого $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ справедливо

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(x_s \notin U_\varepsilon(\mathcal{F}^*), X(y, n) = \Delta(x)) \leq -\delta(\varepsilon) - D(\gamma, \beta, T). \quad (2.43)$$

В силу (2.40) и (2.42) найдется конечный набор траекторий

$$f_1, \dots, f_M \in \mathcal{F}_2(\gamma, \beta, T) \setminus U_\varepsilon(\mathcal{F}^*)$$

таких, что выполнено включение

$$\{X(y, n) = x, x_s \notin U_\varepsilon(\mathcal{F}^*)\} \cap \{\text{Var}(f^{(s)}) \leq K\} \subseteq \bigcup_{k=1}^M V_{\varepsilon_k}^{(s)}(f_k),$$

где $\varepsilon_k = \varepsilon(f_k)$ и число $\varepsilon(f) > 0$ выбирается по f , δ , R так, что выполнено (2.40). Неравенство (2.43) следует из (2.40), (2.41). Теорема 1.8 доказана.

2.5. Доказательство теорем 1.6, 1.7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Убедимся, что теорема 1.6 является простым следствием теоремы 1.7. В силу теоремы 1.1 для любого $x \in \mathbb{Z}^{2+}$ при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X(0, n) = x) = \pi(\{x\}).$$

Поэтому мы можем выбрать последовательность $x = x(n)$ такую, что $|x| \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности достаточно медленно, так, что $n/|x| \geq T^*(0, \beta)$,

$$\mathbf{P}(X(0, n) = x) \sim \pi(\{x\}), \quad (2.44)$$

и при этом $x/|x| \sim \beta$. В силу теоремы 1.7 выполняется

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}(X(0, n) = x) = -D(0, \beta),$$

поэтому в силу (2.44) соотношение 1) теоремы 1.6 доказано. Поскольку утверждение 2) теоремы 1.6 следует из теоремы 1.1, то теорема 1.6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.7. В силу непрерывности функции $D(\gamma, \beta)$ (теорема 1.4) для произвольного $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\inf_{|\gamma'| \leq \varepsilon_0} D(\gamma', \beta) \geq D(0, \beta) - \delta. \quad (2.45)$$

Для этого ε_0 и любого $N < \infty$ справедливо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(y, n) = x) &\leq \mathbf{P}\left(X(y, n) = x, \min_{n-|x|N \leq k \leq n} |X(y, k)| \leq |x|\varepsilon_0\right) \\ &\quad + \mathbf{P}\left(\min_{n-|x|N \leq k \leq n} |X(y, k)| \geq |x|\varepsilon_0\right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Сформулируем далее два утверждения.

I. *Найдется $N_1 < \infty$ такое, что для всех $n \geq N_1|x|$ выполняется*

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}\left(\min_{n-|x|N_1 \leq k \leq n} |X(y, k)| \geq |x|\varepsilon_0\right) \leq -2D(0, \beta).$$

II. *Для любого $N_2 < \infty$ при $n \geq |x|N_2$ выполняется*

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}\left(X(y, n) = x, \min_{n-|x|N_2 \leq k \leq n} |X(y, k)| \leq |x|\varepsilon_0\right) \leq \delta - D(0, \beta).$$

Применяя к неравенству (2.46) утверждения I, II, получаем: для некоторого $N_1 < \infty$ для $n \geq |x|N_1$ выполняется

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}(X(y, n) = x) \leq -D(0, \beta).$$

Пусть теперь

$$\frac{n}{|x|} \rightarrow T, \quad T \geq T^{(0)}.$$

Из теоремы 1.5 и определения (1.42) следует нужная оценка сверху в утверждении 1) теоремы 1.7:

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}(X(y, n) = x) \leq -D(\gamma, \beta, T) \leq -D(0, \beta).$$

Докажем I и утверждение 2) теоремы 1.7. В силу теоремы 1.1 для любого $R < \infty$ найдется $K < \infty$ такое, что

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \max_{k \geq 1} \mathbf{P}(|X(0, k)| \geq |x|K) \leq -R - D(\gamma, 0).$$

Далее, выберем в силу теоремы 1.5 функцию $n_1 = n_1(|x|)$ такую, что $n_1/|x| \rightarrow T^*(0, \gamma)$ и

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}(X(0, n_1) = y) \geq -D(0, \gamma).$$

Поскольку

$$\max_{k \geq 1} \mathbf{P}(|X(0, n_1 + k)| \geq |x|K) \geq \mathbf{P}(X(0, n_1) = y) \max_{k \geq 1} \mathbf{P}(|X(y, k)| \geq |x|K),$$

то мы доказали, что

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \max_{k \geq 1} \mathbf{P}(|X(y, k)| \geq |x|K) \leq -R.$$

Утверждение 2) теоремы 1.7 получено.

Выберем далее $R = 2D(0, \beta)$. Получили

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \max_{k \geq 1} \mathbf{P}(|X(y, k)| \geq |x|K) \leq -2D(0, \beta). \quad (2.47)$$

Воспользуемся следующими неравенствами:

$$P_1(N) \leq P_2(N) + P_3(N) \leq P_2(N) + P_4(N), \quad (2.48)$$

где

$$\begin{aligned} P_1(N) &\equiv \mathbf{P}\left(\min_{n-|x|N \leq k \leq n} |X(y, k)| \geq |x|\varepsilon_0\right), \\ P_2(N) &\equiv \mathbf{P}\left(\max_{n-|x|N \leq k \leq n} |X(y, k)| \geq |x|K\right), \\ P_3(N) &\equiv \mathbf{P}\left(\min_{n-|x|N \leq k \leq n} |X(y, k)| \geq |x|\varepsilon_0, \max_{n-|x|N \leq k \leq n} |X(y, k)| \leq |x|K\right) \\ &\leq \sup_{|y'| \leq |x|K} \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq k \leq |x|N} |X(y', k)| \geq |x|\varepsilon_0, \max_{0 \leq k \leq |x|N} |X(y', k)| \leq |x|K\right) \\ &\equiv P_4(N). \end{aligned}$$

В силу теоремы 1.5 можно выбрать $N_0 < \infty$ и $\nu > 0$ таким образом, что

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P_4(N_0) \leq -\nu.$$

Заметим далее, что для любого $m \geq 1$

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P_4(mN_0) \leq m \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P_4(N_0) \leq -m\nu.$$

Поэтому, выбрав $N_1 = mN_0$, $m = \left\lceil \frac{2D(0, \beta)}{\nu} \right\rceil + 1$, мы получаем

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P_4(N_1) \leq -2D(0, \beta).$$

Далее, для этого N_1 верно

$$P_2(N_1) \leq |x|N_1 \max_{k \geq 1} \mathbf{P}(|X(y, k)| \geq |x|K),$$

поэтому в силу (2.47) получаем

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P_2(N_1) \leq -2D(0, \beta).$$

В силу (2.48) соотношение I доказано.

Докажем II. Легко видеть, что для любого $N_2 > 0$ при $n \geq |x|N_2$ выполняется

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(X(y, n) = x, \min_{n-|x|N_2 \leq k \leq n} |X(y, k)| \leq |x|\varepsilon_0\right) \\ & \leq |x|N_2 \max_{0 \leq k \leq |x|N_2, |y'| \leq |x|\varepsilon_0} \mathbf{P}(X(y', k) = x). \end{aligned}$$

Выберем для любого $s > 0$ функции $y^* = y^*(s) \in \mathbb{Z}^{2+}$ и $n^* = n^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$ таким образом, что

$$\mathbf{P}(X(y^*, k^*) = x) = \max_{0 \leq k \leq |x|N_2, |y'| \leq |x|\varepsilon_0} \mathbf{P}(X(y', k) = x)$$

и при этом $k^*/|x| \rightarrow T$, $y^*/|x| \rightarrow \gamma^*$. Тогда в силу теоремы 1.5 и (2.45) верно

$$\begin{aligned} & \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}\left(X(y, n) = x, \min_{n-|x|N_2 \leq k \leq n} |X(y, k)| \leq |x|\varepsilon_0\right) \\ & \leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}(X(y^*, k^*) = x) \leq - \inf_{|\gamma'| \leq \varepsilon_0} D(\gamma', \beta) \leq \delta - D(0, \beta). \end{aligned}$$

Утверждение II доказано.

Получим оценки снизу в утверждении 1) теоремы 1.7. Пусть задана функция $n = n(|x|) \geq |x|(T^{(0)}(\gamma, \beta) + \delta)$, и пусть

$$L_- \equiv \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln \mathbf{P}(X(y, n) = x).$$

Пусть x_k таково, что для $n_k = n(|x_k|)$ выполняется $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{|x_k|} = T$, $T^{(0)} + \delta \leq T \leq \infty$, $L_- = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_k|} \ln \mathbf{P}(X(y, n_k) = x_k)$. Если $T < \infty$, то в силу теоремы 1.5 получаем, что $L_- \geq -D(\gamma, \beta, T) \geq -D(0, \beta)$. Если $T = \infty$, то выберем целые m_1, m_2, m_3 , $m_1 + m_2 + m_3 = n_k$, таким образом, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_1}{|x_k|} = T^*(\gamma, 0)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_3}{|x_k|} = T^*(0, \beta)$. Легко видеть, что

$$\mathbf{P}(X(y, n_k) = x) \geq \mathbf{P}(X(y, m_1) = 0) \cdot \mathbf{P}(X(0, m_2) = 0) \cdot \mathbf{P}(X(0, m_3) = x).$$

Оценка снизу для первого и третьего сомножителей следует из теоремы 1.5, а второй сомножитель в силу теоремы 1.1 удовлетворяет соотношению

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X(0, m_2) = 0) = \pi(\{0\}) > 0.$$

Поскольку $D(\gamma, 0) = 0$, то мы получили оценку снизу

$$L_- \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|x_k|} \ln \mathbf{P}(X(y, n_k) = x_k) \geq -D(0, \beta).$$

Оценка снизу в утверждении 1) теоремы 1.7 доказана. Теорема 1.7 доказана.

§ 3. Основные утверждения о логарифмической и точной асимптотиках для больших уклонений 0-частично однородных эргодических цепей

3.1. Основные обозначения и условия. В настоящем параграфе будем рассматривать 0-частично однородные эргодические цепи Маркова $X(y, n)$. Для них в соответствии с определением, данным в п. 1.1, переходная вероятность $P(y, dx)$ в области $\{x_1 > 0, y_1 > 0\}$ зависит лишь от $x_2, y_2, x_1 - y_1$, а в области $\{x_2 > 0, y_2 > 0\}$ — лишь от $x_1, y_1, x_2 - y_2$. Ясно, что если обе точки x и y лежат во внутренности $(\mathbb{R}^{2+})$ положительного квадранта, то переходная вероятность $P(y, dx)$ для 0-частично однородной цепи зависит только от $y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$.

Как уже отмечалось в п. 1.1, хорошо известным примером 0-частично однородных цепей является случайное блуждание $X(n)$, определяемое соотношением

$$X(y, n+1) = (X(y, n) + \xi^{(n)})^+$$

или его модификациями, где $y^+ = (y_1^+, y_2^+)$, $t^+ = \max\{t, 0\}$, $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ независимы и распределены, как ξ .

Нам понадобятся условия на изучаемые цепи, близкие к тем, которые были введены ранее в § 1. Мы по-прежнему будем предполагать выполненными условия невырожденности и равномерной интегрируемости (1.1), (1.2) и условие достижимости (R), состоящее в выполнении (R_1) , (R_2) (см. п. 1.2). Цепи, рассматриваемые в настоящем параграфе, будут предполагаться *эргодическими*, т.е. удовлетворяющими условию (E) п. 1.2.

Моментные условия будут несколько отличаться от условий, рассмотренных ранее. Основным моментным условием, при котором доказаны теоремы о логарифмической асимптотике 0-частично однородных цепей, будет условие (M^+) , состоящее в одновременном выполнении условий (M_1^+) , $(M_2^{(0)})$ (см. п. 1.3). Условие (M^+) означает, что функция $\bar{\varphi}(\lambda) \equiv \sup_{y \in \mathbb{R}^{2+}} E e^{\langle \lambda, \xi(y) \rangle}$ конечна при некотором λ из внутренней $(\mathbb{R}^{2+})$ квадранта $\mathbb{R}^{2+}$ и для любого λ из множества $\Phi_1 = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 : E e^{\langle \lambda, \xi \rangle} \leq 1\}$. Условие (M^+) слабее, чем каждое из условий (M) , $(M^{(0)})$, которые использовались в теоремах о логарифмической асимптотике N -частично однородных цепей в §§ 1, 2.

Итак, в настоящем параграфе рассматриваются 0-частично однородные в $\mathbb{R}^{2+}$ цепи Маркова $X(y, n)$, для которых выполнены условия (R), (M^+) , (E).

3.2. Теоремы о логарифмической асимптотике. Для формулирования основной теоремы о логарифмической асимптотике стационарного распределения цепи X нам понадобится функция $D(\gamma, \beta)$, введенная и изученная в § 1 (см. (1.35)). Первую и вторую функции уклонений, отвечающие случайному вектору ξ с преобразованием Лапласа $\varphi(\lambda) = E e^{\langle \lambda, \xi \rangle}$, мы обозначили соответственно через

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - \ln \varphi(\lambda)\} \quad \text{и} \quad D(\alpha) = \inf_{T>0} T \Lambda(\alpha/T).$$

Пусть

$$\varphi^{(i)}(t) = E(e^{t\zeta^{(i)}}; \tau^{(i)} < \infty), \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

где пара $(\tau^{(i)}, \zeta^{(i)})$, соответствующая циклу по возвращению на ось $\{x_2 = 0\}$ при $i = 1$ и на ось $\{x_1 = 0\}$ при $i = 2$ для индуцированной цепи $X^{(i)}(y, n)$, была введена в п. 1.4. В п. 1.6 были введены константы (формулы (1.37), (1.38))

$$\alpha^{(i)} = \sup\{t : \varphi^{(i)}(t) \leq 1\}, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

Можно показать (лемма 4.8), что из условия (M^+) следует, что для некоторого $\delta > 0$ выполняется

$$\varphi^{(i)}(\delta) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

В силу условия (E) либо $P(\tau^{(i)} < \infty) < 1$, либо $P(\tau^{(i)} < \infty) = 1$, $E\zeta^{(i)} < 0$, $i = 1, 2$ (см. п. 1.2). Поэтому константы $\alpha^{(i)}$ положительны:

$$\alpha^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Функция $D(\gamma, \beta)$, определенная в (1.35), для $\gamma = 0$ может быть представлена в виде (см. (1.36)):

$$D(0, \beta) = \min_{i=1,2,3} D_i(0, \beta), \quad (3.4)$$

где

$$D_i(0, \beta) = \inf_{\beta' \in \Gamma^{(i)}} \{\alpha^{(i)} \beta'_i + D(\beta - \beta')\}, \quad i = 1, 2, \quad D_3(0, \beta) = D(\beta).$$

Как уже отмечалось в теореме 1.4 (это видно и из представления (3.4)), функция $D(0, \beta)$ неотрицательна, непрерывна и линейна вдоль любого луча $\{\beta = t\omega : t > 0, \omega \in \Omega\}$, где

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^{2+} : |\omega| = 1\}.$$

Условимся единичные векторы из $\mathbb{R}^{2+}$ обозначать символом $\omega = (\omega_1, \omega_2)$; в частности, обозначим $\omega(1) = (1, 0)$, $\omega(2) = (0, 1)$ два “крайних” вектора из множества Ω .

Как уже отмечено ранее в п. 1.6, в эргодическом случае верно $D(\gamma, 0) = 0$ для любого $\gamma \in \mathbb{R}^{2+}$. Ниже нам понадобится только функция $D(0, \beta)$, и в рамках настоящего параграфа мы будем пользоваться представлением (3.4) этой функции. Как уже отмечалось, оно согласуется с первоначальным определением функции $D(\gamma, \beta)$ (§1). Из (3.3) и (3.4) следует, что при выполнении условия эргодичности (E) верно неравенство $\inf_{\omega \in \Omega} D(0, \omega) > 0$, т.е. функция $D(0, \beta)$ положительна во всех точках β квадранта $\mathbb{R}^{2+}$, кроме точки $\beta = 0$.

Напомним, что через $\pi = \pi(B)$ мы обозначаем единственное инвариантное (предельное) распределение, отвечающее эргодической цепи $X(y, n)$ (см. теорему 1.1).

Везде ниже мы будем, как и прежде, следовать соглашению: $x, y \in \mathbb{Z}^{2+}$ для целочисленных цепей при замене $\Delta(x)$ на точку x ; для нерешетчатых цепей число $\Delta > 0$ произвольно.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия (R), (M^+) , (E). Тогда

1)

$$\frac{1}{|x|} \ln \pi(\Delta(x)) = -D(0, \beta)(1 + \varepsilon(\Delta, x)), \quad (3.5)$$

где

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sup_{\frac{x}{|x|} \in \Omega} |\varepsilon(\Delta, x)| = 0;$$

2) для любого $K < \infty$ найдется $C < \infty$ такое, что

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \pi(\{x \in \mathbb{R}^{2+} : |x| \geq C\}) \leq -K.$$

Таким образом, в теореме 3.1 получено утверждение теоремы 1.6 для эргодической 0-частично однородной цепи X при более слабом моментном условии. Изложим кратко основную идею доказательства теоремы 3.1. Оно отличается от доказательства теоремы 1.6, которое существенно опирается на теорему 1.2 (по этой причине в теореме 1.6 используется более сильное, чем (M^+) , моментное условие (M) , существенное для теоремы 1.2).

В основе доказательства лежит известная формула (см., например, [4; с. 32]).

$$\pi(\Delta(x)) = \int_{\Gamma} H_{\Gamma}(y, \Delta(x)) \pi(dy), \quad (3.6)$$

где через Γ мы обозначили, как и прежде, границу квадранта $\mathbb{R}^{2+}$,

$$H_G(y, B) = P(X(y, 1) \in B) + \sum_{k=2}^{\infty} P(X(y, k) \in B, X(y, m) \notin G, m = 1, \dots, k-1)$$

есть “табу”-функция восстановления с “запрещенным множеством” $G \subseteq \mathbb{R}^{2+}$. Отправляясь от (3.6), с помощью результатов работ [7], [8], [16] можно показать, что асимптотика $H_{\Gamma}(y, \Delta(x))$ в широких предположениях совпадает с точностью до постоянного множителя с асимптотикой $H(\Delta(x) - y)$, где

$$H(B) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(*k)}(B)$$

есть “обычная” функция восстановления, отвечающая случайному вектору ξ с распределением F . Поэтому

$$\ln \pi(\Delta(x)) \sim \ln I(\Delta(x))$$

при $|x| \rightarrow \infty$, где

$$I(\Delta(x)) = \int_{\Gamma} H(\Delta(x) - y) \pi(dy). \quad (3.7)$$

В силу результатов работы [16] известна логарифмическая асимптотика функции $H(\Delta(x) - y)$ в (3.7) при $x \rightarrow \infty$, $y \in \Gamma$, $y/|x| \rightarrow y_0$:

$$\frac{1}{|x|} \ln H(\Delta(x) - y) = -D\left(\frac{x}{|x|} - y_0\right) + o(1). \quad (3.8)$$

Стало быть, для отыскания асимптотики $\ln I(\Delta(x))$ нам достаточно знать, кроме (3.8), логарифмическую асимптотику меры $\pi(\Delta(y) \cap \Gamma)$ в случае, когда $y \in \Gamma$, $|y| \rightarrow \infty$.

Введем две меры на $\mathbb{R}^{1+}$:

$$\pi^{(1)}(A) = \pi(A \times \{0\}), \quad \pi^{(2)}(A) = \pi(\{0\} \times A), \quad A \subseteq \mathbb{R}^{1+}.$$

Тогда задача сводится к отысканию асимптотики при $v \rightarrow \infty$

$$\ln \pi^{(i)}(\Delta(v)), \quad i = 1, 2, \quad \Delta(v) = [v, v + \Delta]. \quad (3.9)$$

Для решения задачи (3.9) введем для $y \in \mathbb{R}^{2+}$, $i = 1, 2$ случайный момент

$$\eta^{(i)}(y) = \inf\{n \geq 1 : X(y, n) \in \Gamma^{(i)}\}$$

первого прихода цепи на часть $\Gamma^{(i)} = \{x : x_i \geq 0, x_{i^*} = 0\}$ границы Γ , где, напомним, $i^* \in \{1, 2\}$, $i^* - i = 1 \pmod{2}$. Пусть $i = 1$. Построим однородную во времени одномерную цепь Маркова $S^{(1)}(v, n) \in [0, \infty)$, стартовую в точке $v \in [0, \infty)$, положив для $v > 0$

$$S^{(1)}(v, 1) =_D X_1(v\omega(1), \eta^{(1)}(v\omega(1)))I_{\{\eta^{(2)}(v\omega(1)) > \eta^{(1)}(v\omega(1))\}}.$$

Это есть приращение координаты X_1 цепи $X(v\omega(1), n)$ (стартовой в точке $v\omega(1)$) на цикле по возвращению на ось $\Gamma^{(1)}$ по тем элементарным исходам, для которых траектория на цикле не коснулась оси $\Gamma^{(2)}$. Нетрудно видеть, что при $v \rightarrow \infty$ для любого множества $V \subseteq (0, \infty)$ выполняется

$$\mathbf{P}(S^{(1)}(v, 1) - v \in B, \eta^{(2)}(v\omega(1)) > \eta^{(1)}(v\omega(1))) \rightarrow \mathbf{P}(\zeta^{(1)} \in B, \tau^{(1)} < \infty).$$

Распределение скачка из нуля $S^{(1)}(0, 1)$ определим равенством:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S^{(1)}(0, 1) \in B) \\ &= c_1 \int_{\Gamma^{(1)}} \mathbf{P}(X_1(v\omega(2), \eta^{(1)}(v\omega(2))) \in B, \eta^{(2)}(v\omega(2)) > \eta^{(1)}(v\omega(2))) \pi^{(2)}(dv), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где константа c_1 выбрана так, что $\mathbf{P}(S^{(1)}(0, 1) \in \mathbb{R}^{1+}) = 1$:

$$\frac{1}{c_1} = \int_{\Gamma^{(1)}} \mathbf{P}(\eta^{(2)}(v\omega(2)) > \eta^{(1)}(v\omega(2))) \pi^{(2)}(dv).$$

Так построенная цепь эргодична (лемма 4.6), и отвечающее ей стационарное распределение $m^{(1)}$ с точностью до положительного множителя совпадает с мерой $\pi^{(1)}$ (лемма 4.7):

$$\pi^{(1)}(A) = b_1 m^{(1)}(A), \quad A \subseteq (0, \infty). \quad (3.11)$$

Совершенно аналогично выполняется построение асимптотически однородной эргодической цепи $S^{(2)}(v, n) \in [0, \infty)$, стационарное распределение $m^{(2)}$ которой совпадает с мерой $\pi^{(2)}$ с точностью до константы:

$$\pi^{(2)}(A) = b_2 m^{(2)}(A), \quad A \subseteq (0, \infty). \quad (3.12)$$

Как будет показано в лемме 5.9 (в частном случае, когда $\mathbf{P}(\tau^{(i)} < \infty) = 1$ для $i = 1, 2$, можно воспользоваться результатами работы [11]), при $v \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\ln m^{(i)}([v, \infty)) \sim -v \bar{\lambda}^{(i)}, \quad \bar{\lambda}^{(i)} = \min\{\alpha^{(i)}, \gamma^{(i)}\},$$

и константа $\gamma^{(i)}$ определяет логарифмическую асимптотику хвоста распределения скачка $S(0, 1)$:

$$\ln \mathbf{P}(S^{(i)}(0, 1) \geq v) \sim \ln \mathbf{P}(S^{(i)}(0, 1) \in [v, v + \Delta)) \sim -v\gamma^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad v \rightarrow \infty.$$

Для отыскания значения $\gamma^{(i)}$ для $i = 1$ заметим, что в (3.10) под знаком интеграла снова стоят суммы табу-вероятностей: для $B \subseteq (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_1(v\omega(2), \eta^{(1)}(v\omega(2))) \in B, \eta^{(2)}(v\omega(2)) > \eta^{(1)}(v\omega(2))) \\ &= \mathbf{P}(X_1(v\omega(2), 1) \in B, X_2(v\omega(2), 1) = 0) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{P}(X_1(v\omega(2), 1) \in B, X_2(v\omega(2), 1) = 0, X(y, m) \in (\mathbb{R}^{2+}), m = 1, \dots, k-1). \end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь вновь результатами [7], [8], [16], мы получим, что с точностью до постоянного множителя вероятность $\mathbf{P}(S^{(1)}(0, 1) \in [v, v + \Delta))$ совпадает с интегралом

$$I^{(1)}(v) = \int_0^{\infty} H([v, v + \Delta) \times [-u, -\infty)) \pi^{(2)}(du).$$

Используя далее (3.8), получаем для $u \geq 0$

$$\frac{1}{v} \ln H([v, v + \Delta) \times [-uv, -\infty)) \sim -D(\omega(1) - u\omega(2)).$$

Поэтому

$$\gamma^{(1)} = \inf_{u \geq 0} \{u\bar{\lambda}^{(2)} + D(\omega(1) - u\omega(2))\}.$$

Таким образом, для $i = 1, 2$ значение $\gamma^{(i)}$ является функцией от значения $\bar{\lambda}^{(i*)}$ и имеет вид

$$\gamma^{(i)} = g^{(i)}(\bar{\lambda}^{(i*)}), \quad (3.13)$$

где непрерывная выпуклая функция $g^{(i)}(u)$ определена как преобразование Лежандра над функцией $h^{(i)}(v) \equiv D(\omega(i) - v\omega(i^*))$:

$$g^{(i)}(u) = \inf_{v \geq 0} \{uv + h^{(i)}(v)\}.$$

Получаем систему уравнений для переменных $\bar{\lambda}^{(1)}, \bar{\lambda}^{(2)}$:

$$\begin{cases} \bar{\lambda}^{(1)} = \min\{\alpha^{(1)}, g^{(1)}(\bar{\lambda}^{(2)})\}, \\ \bar{\lambda}^{(2)} = \min\{\alpha^{(2)}, g^{(2)}(\bar{\lambda}^{(1)})\}. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^{(1)}, \bar{\lambda}^{(2)}) \in \mathbb{R}^{2+}$, причем можно доказать, что это решение имеет вид (лемма 4.4)

$$(\bar{\lambda}^{(1)}, \bar{\lambda}^{(2)}) = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}), \quad \lambda^{(i)} = \min\{\alpha^{(i)}, g^{(i)}(\alpha^{(i*)})\}, \quad i = 1, 2. \quad (3.14)$$

Таким образом, проблема отыскания логарифмической асимптотики мер $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}$ решена.

Возвращаясь к (3.7), (3.8), получаем при $|x| \rightarrow \infty$

$$\ln \pi(\Delta(x)) \sim -\overline{D}(0, x) \equiv \min_{i=0,1,2} \overline{D}_i(0, x),$$

где

$$\overline{D}_i(0, \beta) = \inf_{\beta' \in \Gamma(i)} \{\lambda^{(i)} \beta'_i + D(\beta - \beta')\}, \quad i = 1, 2, \quad \overline{D}_0(0, \beta) = D(\beta). \quad (3.15)$$

Остается заметить, что (лемма 4.4) $\overline{D}(0, \beta) = D(0, \beta)$, где функция $D(0, \beta)$ определена в (3.4) (см. также (1.36)).

Рассмотрим теперь логарифмическую асимптотику *достационарных распределений* $P(X(0, n) \in \Delta(x))$. Как и в п. 1.7, обратимся к изучению переходных явлений, т.е. вопроса о том, при каких $n_0 = n_0(x)$ асимптотика $\frac{1}{|x|} \ln P(X(0, n) \in \Delta(x))$ совпадает с асимптотикой (3.5) для $\pi(\Delta(x))$.

В п. 1.6 для точек $\gamma, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$ была введена наряду с функцией $D(\gamma, \beta)$ функция $T^*(\gamma, \beta)$, которой при $\gamma = 0$ можно дать такую интерпретацию (см. теорему 1.7): число $T^*(0, \beta)$ есть *минимальное из таких $T > 0$, для которых*

$$\frac{1}{s} \ln P(X(0, [Ts]) \in \Delta(s\beta)) \sim \frac{1}{s} \ln \pi(\Delta(s\beta)) \sim -D(0, \beta) \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Отметим еще, что $T^*(0, t\beta) = tT^*(0, \beta)$ для $t \geq 0, \beta \in \mathbb{R}^{2+}$.

Ниже, после формулировки теоремы 3.2, мы приведем формулы, описывающие значения функции $T^*(0, \beta)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия (R), (M⁺), (E). Тогда для $\beta \in \Omega$ и $x \in \mathbb{R}^{2+}$, удовлетворяющих при $|x| \rightarrow \infty$ соотношению $x/|x| \rightarrow \beta$, для $n \geq (T^{(0)}(0, \beta) + \delta)|x|$, где $\delta > 0$ произвольно, выполняется

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P(X(0, n) \in \Delta(x)) = -D(0, \beta).$$

Отметим, что в теореме 1.7 получено более сильное, чем в теореме 3.2, утверждение (при более сильном моментном условии): для любых $\gamma, \beta = x/|x|$ найдется такое $T^{(0)} = T^{(0)}(\gamma, \beta) < \infty$, что для всех $n > |x|(T^{(0)} + \delta)$ выполняется

$$\ln P(X(|x|\gamma, n) \in \Delta(x)) \sim \ln \pi(\Delta(x)). \quad (3.16)$$

В условиях теоремы 3.2 такой результат, вообще говоря, не верен, о чем свидетельствует следующий пример. Пусть распределение вектора ξ таково, что $\varphi(\lambda) = \infty$ при $\lambda \notin \mathbb{R}^{2+}$. Тогда $\Lambda(-\alpha) = 0$ при $\alpha \in \mathbb{R}^{2+}$, и если выбрать $\gamma = (-1, -1)$, $\beta = x/|x| = \gamma/2^{1/2}$, то получаем

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} \ln P(X(|x|\gamma, n) \in \Delta(x)) = 0$$

для любого $T < \infty$ при $n = |x|T$. Следовательно, для таких γ, β соотношение (3.16) не верно.

Доказательство оценки сверху в теореме 3.2 основано на теореме 3.1 и неравенстве (см. лемму 5.10(I))

$$\max_{n \geq 1} \mathbf{P}(X(y, n) \in A) \leq \frac{1}{\pi(\{0\})} \pi(A).$$

Поскольку доказательство оценки снизу в теореме 3.2 стандартно, то мы не будем на нем останавливаться.

Приведем теперь формулы для функции $T^*(0, \beta)$. Для этого обозначим $T^{(3)}(\beta)$ такое $T \geq 0$, для которого достигается $\inf$ в определении второй функции уклонений $D(\beta) = D^{(3)}(\beta)$:

$$\inf_{T > 0} T \Lambda^{(3)}(\beta/T) = T^{(3)}(\beta) \Lambda^{(3)}(\beta/T^{(3)}(\beta)).$$

Определим далее аналогичным образом два числа $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$:

$$\inf_{T > 0} T \Lambda^{(i)}((1/T, 0), 1/T) = T^{(i)} \Lambda^{(i)}((1/T^{(i)}, 0), 1/T^{(i)}), \quad i = 1, 2.$$

Обратимся теперь к определению (3.4) функции $D(0, \beta)$ и рассмотрим прежде те β , для которых $\min$ в (3.4) достигается для единственного $i \in \{1, 2, 3\}$. Если это i равно 3, то положим

$$T^*(0, \beta) = T^{(3)}(\beta) \equiv T_3^*(0, \beta); \quad (3.17)$$

если это i принадлежит множеству $\{1, 2\}$, то пусть

$$T^*(0, \beta) = u_i T^{(i)} + T^{(3)}(\beta - u_i \omega(i)) \equiv T_i^*(0, \beta), \quad (3.18)$$

где $u_i = u_i(\beta) \geq 0$ таково, что

$$D_i(0, \beta) = u_i \alpha^{(i)} + D(\beta - u_i \omega(i)).$$

Если же $\min$ в (3.4) достигается на более чем одном значении i , то следует в качестве $T^*(0, \beta)$ выбрать минимальное из значений, определенных формулами (3.17), (3.18). Из полученных соотношений для $T^*(0, \beta)$ следует, что эта функция непрерывна на открытом множестве всех β , для которых $\min$ в (3.4) достигается на единственном значении $i = 1, 2, 3$. Кроме того, каждая из функций $T^*(0, \beta)$ в формулах (3.17), (3.18) равномерно ограничена на Ω , поэтому выполняется

$$\sup_{\beta \in \Omega} T^*(0, \beta) < \infty.$$

Обозначим

$$\overline{T}^{(3)} = \sup_{\omega \in \Omega} T^{(3)}(\omega), \quad \widehat{T} = \max\{\overline{T}^{(3)}, T^{(1)}, T^{(2)}\}.$$

Поскольку

$$D(\beta) \geq D_i(0, \beta) \geq u_i \alpha^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

то верно $u_i \leq D(\beta)/\alpha^{(i)}$, $i = 1, 2$. Поэтому для $\beta \in \Omega$ выполняется

$$\begin{aligned} T_i^*(0, \beta) &\leq T^{(i)} u_i + \overline{T}^{(3)} |\beta - u_i \omega(i)| \leq \widehat{T} (|\beta| + 2u_i) \leq \widehat{T} (1 + 2D(\beta)/\alpha^{(i)}), \\ T_3^*(0, \beta) &\leq \overline{T}^{(3)} \leq T_i^*(0, \beta), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Поскольку $T^*(0, \beta) \leq \max_{i=1,2,3} T_i^*(0, \beta)$, то доказана следующая оценка для $T^*(0, \beta)$ при $\beta \in \Omega$:

$$T^*(0, \beta) \leq \widehat{T} \max_{i=1,2} \{1 + 2D(\beta)/\alpha^{(i)}\}.$$

3.3. Теоремы о точной асимптотике. При изучении точной асимптотики $\pi(\Delta(x))$ и $P(X(y, n) \in \Delta(x))$ мы везде будем предполагать выполненным условие

(А) В нерешетчатом случае распределение F случайного вектора ξ имеет ненулевую абсолютно непрерывную компоненту.

Это условие, как и условие невырожденности и равномерной интегрируемости, без необходимости нигде оговаривать не будем.

Известно, что вторая функция уклонений представляется в виде (см. [16])

$$D(\alpha) = \sup_{\lambda \in \Phi_1} \langle \lambda, \alpha \rangle = \langle \mu(\alpha), \alpha \rangle, \quad (3.19)$$

где вектор $\mu(\alpha) = (\mu_1(\alpha), \mu_2(\alpha))$ лежит на границе выпуклого множества $\Phi_1 = \{\lambda \in \mathbb{R}^2 : \varphi(\lambda) \leq 1\}$. Обозначим

$$\mu_j^{(i)} = \mu_j(\omega(i)), \quad i, j = 1, 2; \quad (3.20)$$

заметим, что $D(\omega(i)) = \mu_i^{(i)}$, $i = 1, 2$. Введем в рассмотрение для $i = 1, 2$ вектор

$$\bar{\mu}(\omega(i)) = \mu_i^{(i)} \omega(i) I_{\{\mu_{i*}^{(i)} \geq 0\}}.$$

Если, скажем, вектор $\mu(\omega(1))$ лежит в верхней полуплоскости, то он с необходимостью лежит в положительном квадранте $\mathbb{R}^{2+}$, и в этом случае вектор $\bar{\mu}(\omega(1))$ есть проекция $\mu(\omega(1))$ на ось $\Gamma^{(1)}$; в противном случае $\bar{\mu}(\omega(1)) = 0$.

Усилим моментное условие (M^+) , добавив к нему условие

(M₃) Для некоторого $\delta > 0$

$$\bar{\varphi}(\lambda) < \infty$$

для всех $\lambda \in B_\delta$, где $B_\delta = U_\delta(\Phi_1 \cup \{\bar{\mu}(\omega(1))\} \cup \{\bar{\mu}(\omega(2))\})$, и $U_\delta(B)$ есть δ -окрестность множества B .

Условие (M^+) , дополненное условием (M₃), назовем $(\bar{M}^+)$.

Итак, в настоящем пункте 0-частично однородная цепь Маркова $X(y, n)$ удовлетворяет условиям (R), (A), $(\bar{M}^+)$, (E).

Для $i \in \{1, 2\}$ введем в рассмотрение параметр

$$\theta^{(i)} = (\alpha^{(i)}, \lambda^{(i)}, \gamma^{(i)}, \varphi^{(i)}(\alpha^{(i)}), \mu_i^{(i)}, \mu_{i*}^{(i)}) \in \mathbb{R}^6,$$

координаты которого определены соответственно формулами (3.2), (3.14), (3.13), (3.1), (3.20) и который лежит в некоторой допустимой области пространства $\mathbb{R}^6$. Обозначим

$$\theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \mathbb{R}^{12}.$$

Введем в рассмотрение множества

$$\begin{aligned} a(i) &= \{\theta : \alpha^{(i)} < \min\{\gamma^{(i)}, \mu_i^{(i)}\}\}, & b(i) &= \{\theta : \lambda^{(i*)} > \mu_{i*}^{(i)}, \varphi^{(i)}(\alpha^{(i)}) < 1\}, \\ A(i) &= a(i) \cup \{\theta : \alpha^{(i)} > \gamma^{(i)}\} \cap a(i^*), & B(i) &= b(i) \cup \{\theta : \lambda^{(i*)} < \mu_{i*}^{(i)}\} \cap b(i^*). \end{aligned}$$

Ниже будет показано, что множества $A(1)$ и $B(1)$ не пересекаются, а их объединение $A(1) \cup B(1)$ “почти” совпадает с областью допустимых значений в $\mathbb{R}^{12}$ параметра θ . Это же верно для множеств $A(2)$, $B(2)$. Везде ниже в настоящем параграфе мы будем предполагать, что *параметр θ лежит в области $(A(1) \cup B(1)) \cap (A(2) \cup B(2))$* .

Перепишем представление (3.6) в виде

$$\pi(\Delta(x)) = \pi_0(\Delta(x)) + \pi_1(\Delta(x)) + \pi_2(\Delta(x)), \quad (3.21)$$

где слагаемые соответствуют разбиению области интегрирования Γ в (3.7) на три части $\Gamma^{(0)} = \{0\}$, $(\Gamma^{(1)})$ и $(\Gamma^{(2)})$, где $(\Gamma^{(i)}) = \{x : x_i > 0, x_{i^*} = 0\}, i = 1, 2$.

Логарифмическую асимптотику слагаемого $\pi_i(\Delta(x))$ в (3.21) будет определять функция $\overline{D}_i(0, \beta)$, введенная в (3.15), $i = 0, 1, 2$.

Число $\varkappa(i) \in \{0, 1/2, 3/2\}$, которое будет определять степенной член в точной асимптотике слагаемого $\pi_i(\Delta(x))$ в (3.21), определим так:

$$\varkappa(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \in A(i), i \in \{1, 2\}; \\ 3/2, & \text{если } \theta \in B(i), i \in \{1, 2\}; \\ 1/2, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

“Внутренность” множества Ω обозначим $(\Omega) = \{\omega \in (\mathbb{R}^{2+}) : |\omega| = 1\}$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть выполнены условия (R), (A), $(\overline{M}^+)$, (E). Тогда

I. При $s \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \pi([s, \infty) \times \{0\}) &= \frac{C^{(1)}}{s^{\varkappa(1)}} e^{-s\lambda^{(1)}} (1 + o(1)), \\ \pi(\{0\} \times [s, \infty)) &= \frac{C^{(2)}}{s^{\varkappa(2)}} e^{-s\lambda^{(2)}} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где $C^{(i)} > 0$, $i = 1, 2$.

II. Для $\omega \in (\Omega)$ и $x \in \mathbb{R}^{2+}$, удовлетворяющих соотношению

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = \omega,$$

верно представление

$$\pi(\Delta(x)) = \Delta^2 \sum_{i=0}^2 \left(\frac{1}{|x|^{\varkappa(i)}} e^{-|x|\overline{D}_i(0, x/|x|)} (C^{(i)}(\omega) + \varepsilon^{(i)}(\Delta, x)) \right),$$

где функции $C^{(i)}(\omega)$ непрерывны и положительны на (Ω) , $i = 0, 1, 2$;

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{|x| \rightarrow \infty, x/|x| \rightarrow \omega} \sum_{i=0}^2 |\varepsilon^{(i)}(\Delta, x)| = 0.$$

Заметим, что в утверждении II теоремы 3.3 нам не удалось получить точное асимптотическое представление для $\pi(\Delta(x))$ в случае $x/|x| \rightarrow \omega^{(i)}$, $i = 1, 2$ (напомним: $\omega(1) = (1, 0)$, $\omega(2) = (0, 1)$). Мы не знаем, имеет ли место непрерывность

$$\lim_{\omega \in (\Omega), \omega \rightarrow \omega^{(i)}} C^{(i)}(\omega) = C^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

где константы $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ из утверждения I и функции $C^{(1)}(\omega)$, $C^{(2)}(\omega)$ из утверждения II. Если этой непрерывности нет, то тогда, скорее всего, этот пробел связан с объективными обстоятельствами и в рамках рассматриваемых методов при $x/|x| \rightarrow \omega(i)$ нам не удастся получить точное асимптотическое представление для $\pi(\Delta(x))$ (а только с точностью до числового множителя).

Обратимся теперь к задаче изучения переходных явлений: для каких значений $n = n(x)$ последовательности $\pi(\Delta(x))$ и $P(X(0, n) \in \Delta(x))$ будут асимптотически эквивалентны? Напомним, что функция $T^*(0, \beta)$, введенная в п. 1.6, описана в п. 3.2.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть выполнены условия (R), (A), $(\overline{M}^+)$, (E). Пусть $\delta > 0$ произвольно. Тогда

I. Для $n = n(s) \geq (T^*(0, \omega(1)) + \delta)s$ выполняется

$$P(X(0, n) \in [s, \infty) \times \{0\}) = \pi([s, \infty) \times \{0\})(1 + o(1));$$

для $n = n(s) \geq (T^*(0, \omega(2)) + \delta)s$ выполняется

$$P(X(0, n) \in \{0\} \times [s, \infty)) = \pi(\{0\} \times [s, \infty))(1 + o(1)).$$

II. Для любых $\omega \in (\Omega)$ и $x \in \mathbb{R}^{2+}$ таких, что $x/|x| \rightarrow \omega$, для $n = n(|x|) \geq (T^*(0, \omega) + \delta)|x|$ выполняется

$$P(X(0, n) \in \Delta(x)) = \pi(\Delta(x))(1 + o(1)).$$

Ниже мы приводим краткие “нестрогие” объяснения схемы доказательства теорем 3.3, 3.4. Они позволят понять идею доказательств, приведенных в §4, и прояснить природу довольно сложных характеристик, которые присутствуют в ответе.

Отправной точкой доказательства является представление (3.21). Важнейшим этапом отыскания асимптотики $\pi(\Delta(x))$ является задача о точной асимптотике мер $\pi^{(i)}([v, \infty))$ при $v \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$, или, что то же самое, стационарных мер $m^{(i)}([v, \infty))$ цепей $S^{(i)}(v, n)$, введенных в п. 3.2. Покажем, как это делается.

Введем в рассмотрение две “обычные” функции восстановления для $A \subseteq \mathbb{R}^1$, $i \in \{1, 2\}$

$$H^{(i)}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z_n^{(i)} \in A, T_n^{(i)} < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_i^{(i)}(0, T_n^{(i)}) \in A), \quad (3.22)$$

где $Z_0^{(i)} = 0$, $T_0^{(i)} = 0$ и для $n = 1, 2, \dots$ случайные величины $Z_n^{(i)}$, $T_n^{(i)}$, введенные в п. 1.4, имеют вид

$$Z_n^{(i)} = \sum_{k=1}^n \zeta^{(i)}(k), \quad T_n^{(i)} = \sum_{k=1}^n \tau_k^{(i)}.$$

Пусть $i = 1$. Построим два несобственных распределения $\overline{G}^{(1)}$, $\overline{G}_1^{(1)}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$. Первое есть распределение координаты X_1 цепи $X(t^{(2)}\omega(2), n)$, которая стартует в случайной точке $t^{(2)}\omega(2)$ ($t^{(2)}$ имеет распределение $m^{(2)}(dv)$), в момент первого прихода этой цепи на ось $\Gamma^{(1)}$ на тех элементарных событиях, для которых цепь до этого момента не касалась оси $\Gamma^{(1)}$:

$$\overline{G}^{(1)}(V) = \int_0^\infty P(X_1(v\omega(2)), \eta^{(1)}(v\omega(2)) \in V, \eta^{(2)}(v\omega(2)) > \eta^{(1)}(v\omega(2))) m^{(2)}(dv).$$

Для введения второго распределения нам понадобится случайный момент

$$\tau^{(1)}(y) = \inf \left\{ n \geq 1 : X_2^{(1)}(y, n) = 0, \min_{1 \leq m \leq n} X_1^{(1)}(y, m) \leq 0 \right\}, \quad y \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{1+}.$$

Это есть момент первого после попадания в полуплоскость $\{x_1 \leq 0\}$ прихода на ось $\{x_2 = 0\}$ цепи $X^{(1)}(y, n)$. Второе распределение определим так:

$$\overline{G}_1^{(1)}(V) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X_1^{(1)}(v\omega(1), \tau^{(1)}(v\omega(1))) \in V) \overline{G}^{(1)}(dv).$$

Это есть распределение координаты $X_1^{(1)}$ цепи $X^{(1)}(\overline{\zeta}^{(1)}\omega(1), n)$, которая стартует в случайной точке $\overline{\zeta}^{(1)}\omega(1)$ ($\overline{\zeta}^{(1)}$ имеет распределение $\overline{G}^{(1)}(dv)$), в момент прихода этой цепи на ось $\{x_2 = 0\}$ в первый раз после того, как эта цепь побывала в левой полуплоскости.

Для так построенных распределений $\overline{G}^{(1)}, \overline{G}_1^{(1)}$ верно представление (лемма 4.11)

$$m^{(1)}([v, \infty)) = H^{(1)} * (\overline{G}^{(1)} - \overline{G}_1^{(1)})([v, \infty)). \quad (3.23)$$

Совершенно аналогично определяется для $i = 2$ пара распределений $\overline{G}^{(2)}, \overline{G}_1^{(2)}$, для которой справедлива формула

$$m^{(2)}([v, \infty)) = H^{(2)} * (\overline{G}^{(2)} - \overline{G}_1^{(2)})([v, \infty)). \quad (3.24)$$

Из соотношений (3.23), (3.24) и формул (3.11), (3.12) вытекает асимптотическая формула: при $v \rightarrow \infty$

$$\pi^{(i)}([v, \infty)) \sim c_1^{(i)} H^{(i)}([v, \infty)) + c_2^{(i)} (\overline{G}^{(i)} - \overline{G}_1^{(i)})([v, \infty)). \quad (3.25)$$

Таким образом, для отыскания точной асимптотики (3.23), (3.24) нам нужно знать асимптотику правого хвоста функций восстановления $H^{(i)}$ и правого хвоста меры $V^{(i)} \equiv \overline{G}^{(i)} - \overline{G}_1^{(i)}$. Заметим, что последняя задача усложняется тем, что в определении распределений $\overline{G}^{(i)}, \overline{G}_1^{(i)}$ занята мера $\pi^{(i*)} = b_i m^{(i*)}$, так что правая часть (3.23) зависит от $\pi^{(2)}$, а правая часть (3.24) зависит от $\pi^{(1)}$. Поэтому соотношения (3.23), (3.24) являются системой из двух уравнений (аналогичная ситуация была в п. 3.2, когда мы получали логарифмическую асимптотику).

Из результатов работы [36] мы можем получить асимптотику правого хвоста распределения $\zeta^{(i)}$ в виде

$$\mathbf{P}(\zeta^{(i)} \geq v, \tau^{(i)} < \infty) \sim \frac{c_i}{v^{-3/2}} e^{-v\mu_i^{(i)}}, \quad i = 1, 2.$$

Из этого соотношения в силу результата работы [16] получаем (лемма 4.10)

$$H^{(i)}([v, \infty)) \sim c_i \begin{cases} e^{-v\alpha^{(i)}}, & \text{если } \alpha^{(i)} < \mu_i^{(i)}; \\ \frac{1}{v^{3/2}} e^{-v\alpha^{(i)}}, & \text{если } \varphi^{(i)}(\alpha^{(i)}) < 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

В силу теоремы 3.1 нам известна логарифмическая асимптотика правого хвоста меры $V^{(i)}$ в виде

$$V^{(i)}([v, \infty)) \leq e^{-v\gamma^{(i)}(1+o(1))}, \quad i = 1, 2,$$

где константы $\gamma^{(i)} = g^{(i)}(\lambda^{(i)})$ введены в п. 3.2.

Пусть $i \in \{1, 2\}$. Если выполнено неравенство $\lambda^{(i*)} > \mu_{i*}^{(i)} \equiv \mu_{i*}(\omega(i))$, то с помощью результатов работ [35], [36] можно доказать, что

$$V^{(i)}([v, \infty)) \sim \frac{c_i}{v^{3/2}} e^{-vD(\omega(i))}, \quad (3.27)$$

где константа c_i положительна.

Важным обстоятельством, позволяющим найти асимптотику правых частей (3.23), (3.24), является следующий факт (лемма 4.4):

$$\text{либо } \alpha^{(1)} = \lambda^{(1)}, \quad \text{либо } \alpha^{(2)} = \lambda^{(2)}.$$

Предположим для определенности, что

$$\alpha^{(1)} = \lambda^{(1)}. \quad (3.28)$$

Поскольку (см. определение (3.13) и первое равенство в (3.14))

$$\lambda^{(1)} = \min\{\alpha^{(1)}, \gamma^{(1)}\} = \min\{\alpha^{(1)}, g^{(1)}(\lambda^{(2)})\},$$

то равенство (3.28) распадается на три непересекающиеся ситуации:

$$\alpha^{(1)} < \gamma^{(1)}, \quad (3.29)$$

$$\alpha^{(1)} = \gamma^{(1)}, \lambda^{(2)} > \mu_2^{(1)}, \quad (3.30)$$

$$\alpha^{(1)} = \gamma^{(1)}, \lambda^{(2)} \leq \mu_2^{(1)}. \quad (3.31)$$

Поскольку $\gamma^{(1)} \leq D(\omega(1))$ (см. определение (3.13)), то в ситуации (3.29) выполняется неравенство $\alpha^{(1)} < D(\omega(1))$; следовательно, соотношение (3.27) и первое соотношение в (3.26) позволяют получить точную асимптотику в правой части (3.25), где главную роль играет первое слагаемое. В ситуации (3.30) всегда выполняется равенство $\alpha^{(1)} = \gamma^{(1)} = D(\omega(1))$, поэтому (3.27) и второе соотношение в (3.26) позволяют получить точную асимптотику в правой части (3.25), где первое и второе слагаемые имеют один порядок. Чтобы понять, “сколь мала” ситуация (3.31), введем параметр

$$\bar{\gamma}^{(1)} = \bar{g}^{(1)}(\lambda^{(2)}), \quad \bar{g}^{(1)}(u) = \inf_{v \in \mathbb{R}^1} \{uv + D((1, -v))\}.$$

В ситуации (3.30) выполняется неравенство $\alpha^{(1)} > \bar{\gamma}^{(1)}$, а в ситуации (3.31) – равенство $\alpha^{(1)} = \bar{\gamma}^{(1)}$. Поскольку “неохваченная ситуация” (3.31) реализуется на многообразии размерности 1 в пространстве $\mathbb{R}^3$ (в котором лежат параметры $\alpha^{(1)}, \gamma^{(1)}, \bar{\gamma}^{(1)}$), то можно считать ее “событием” нулевой меры Лебега. Это дает право сказать, что в случае (3.28) для “почти всех” значений рассматриваемых параметров нам удалось

отыскать точную асимптотику меры $\pi^{(1)}([v, \infty))$. Знание этой асимптотики позволяет для “почти всех” значений соответствующих параметров получить точную асимптотику для меры $V^{(2)}([v, \infty))$ (которая зависит от меры $\pi^{(1)}$); применяя эту формулу и (3.26) к соотношению (3.25), получаем точную асимптотику меры $\pi^{(2)}([v, \infty))$.

Наиболее трудный этап в отыскании точной асимптотики меры $\pi(\Delta(x))$ осуществлен.

Поясним коротко, как изучается точная асимптотика для $P(X(0, n) \in \Delta(x))$. Тут, как и ранее, основную трудность представляет получение оценки сверху. Если для получения оценки сверху в логарифмической асимптотике нам достаточно применить неравенство (см. лемму 5.10(I) и доказательство теоремы 3.2)

$$\max_{n \geq 1} P(X(0, n) \in A) \leq \frac{1}{\pi(\{0\})} \pi(A),$$

то здесь следует воспользоваться более точным неравенством (лемма 5.10(II))

$$\max_{n \geq 1} P(X(0, n) \in \Delta(x)) \leq (1 + \delta(x)) \pi(\Delta(x)),$$

где $\delta(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Оценка сверху для вероятности $P(X(0, n) \in \Delta(x))$ в форме

$$P(X(0, n) \in \Delta(x)) \leq \pi(\Delta(x))(1 + o(1))$$

получена.

Если же, нестрого говоря, в представлениях, которые мы использовали для нахождения $\pi(\Delta(x))$, вместо функций восстановления взять “неполные” функции восстановления, в которых суммирование ведется до уровня $N = C|x|$, то полученные выражения при подходящем выборе этого C окажутся оценками снизу для $P(X(0, n) \in \Delta(x))$. Выбирая далее уровень $C|x|$ (и, следовательно, параметр $n \geq (T^* + \delta)|x|$) достаточно большим, мы добиваемся того, что асимптотики “неполных” и “полных” функций восстановления совпадут. Для этих n оценка снизу для вероятности $P(X(0, n) \in \Delta(x))$ асимптотически совпадает с оценкой сверху.

§ 4. Доказательство теорем о больших отклонениях 0-частично однородных эргодических цепей

4.1. Доказательство теорем 3.1, 3.2. В этом пункте и в пп. 4.2, 4.3 будем считать, что условия (R), (M⁺), (E) выполнены.

Для множества $G \subseteq \mathbb{R}^{2+}$ (как правило, это будет граница Γ или ее часть) введем в рассмотрение для цепи $X(y, n)$ функцию восстановления с “запрещенным множеством G ” (ср. с (3.6)):

$$\overline{H}_G(y, A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X(y, k) \in A, X(y, m) \notin G \text{ при всех } m \in \{1, 2, \dots, k\}), \quad A \subseteq \mathbb{R}^{2+}.$$

Заметим, что если $A \cap G = \emptyset$, то $\overline{H}_G(y, A) = H_G(y, A)$, где функция $H_G(y, A)$ введена в (3.6).

В том случае, когда начальное положение цепи $\nu = X(\nu, 0)$ случайно и имеет в $\mathbb{R}^{2+}$ распределение $m(dy)$ (возможно, несобственное), мы будем использовать обозначение

$$\overline{H}_G(\nu, A) = \int_{\mathbb{R}^{2+}} \overline{H}_G(y, A) m(dy).$$

Наряду с двумя мерами $\pi^{(1)} = \pi^{(1)}(A)$, $\pi^{(2)} = \pi^{(2)}(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^{1+}$, определенными в п. 3.2, введем три меры: для $A \subseteq \mathbb{R}^{2+}$

$$\pi_0^{(0)}(A) = \pi(A \cap \{0\}), \quad \pi_0^{(1)}(A) = \pi(A \cap ((0, \infty) \times \{0\})), \quad \pi_0^{(2)}(A) = \pi(A \cap (\{0\} \times (0, \infty))).$$

Это проекции стационарной меры π на части $\{0\}$, $(\Gamma^{(1)})$, $(\Gamma^{(2)})$ границы Γ соответственно. Случайные векторы с распределениями $\pi_0^{(0)}$, $\pi_0^{(1)}$, $\pi_0^{(2)}$ обозначим $\nu_0^{(0)}$, $\nu_0^{(1)}$, $\nu_0^{(2)}$ соответственно.

В предложенных обозначениях справедлива следующая формула ([4], ср. с (3.6)): для любого $x \in (\mathbb{R}^{2+})$

$$\pi(\Delta(x)) = \sum_{k=0}^2 \overline{H}_{\Gamma}(\nu_0^{(k)}, \Delta(x)). \quad (4.1)$$

В том случае, когда точка x лежит на границе $(\Gamma^{(i)})$, к правой части (4.1) прибавится еще одно слагаемое $\pi^{(i)}([x_i, x_i + \Delta))$. Поэтому для любого $x \in \mathbb{R}^{2+}$, $|x| > 0$, верна формула

$$\pi(\Delta(x)) = \sum_{k=0}^2 \overline{H}_{\Gamma}(\nu_0^{(k)}, \Delta(x)) + \sum_{k=1}^2 I_{\{x_{k*}=0\}} \pi^{(k)}([x_k, x_k + \Delta)), \quad (4.2)$$

где I_A есть индикатор множества A .

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся леммы 4.1, 4.2, которые мы сформулируем ниже, а докажем в п. 4.2.

ЛЕММА 4.1.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \pi^{(i)}([s, s + \Delta)) = -\lambda^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

где константы $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ определены формулой (3.14), причем

$$0 < \lambda^{(i)} \leq D(\omega(i)), \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

ЛЕММА 4.2.

$$\lim_{y, x \in \mathbb{R}^{2+}, |x-y| \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x-y|} \ln \overline{H}_{\Gamma}(y, \Delta(x)) + D\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Обратимся к формуле (4.2) и оценим каждое из пяти слагаемых, входящих в правую часть этой формулы.

Непосредственно из лемм 4.1, 4.2 следует, что при $|x| \rightarrow \infty$ выполняется

$$\frac{1}{|x|} \ln \overline{H}_\Gamma(\nu_0^{(k)}, \Delta(x)) \sim -\overline{D}_k\left(0, \frac{x}{|x|}\right), \quad k = 0, 1, 2,$$

где функции $\overline{D}_k(0, \beta)$ определены в (3.15). В том случае, когда в правую часть формулы (4.2) входит ненулевое слагаемое $\pi^{(k)}([x_k, x_k + \Delta])$, вектор x имеет вид $x = |x|\omega(k)$; в этом случае в силу (4.4) справедливо

$$\overline{D}_k\left(0, \frac{x}{|x|}\right) = \inf_{0 \leq u} \{u\lambda^{(k)} + D(\omega(k)(1-u))\} = \inf_{0 \leq u \leq 1} \{u\lambda^{(k)} + D(\omega(k)(1-u))\} = \lambda^{(k)}.$$

Поэтому слагаемое $\pi^{(k)}([x_k, x_k + \Delta])$ не влияет на асимптотику логарифма суммы в правой части (4.2). Мы доказали часть I теоремы 3.1.

Поскольку часть II теоремы 3.1 следует из теоремы 1.1, то теорема 3.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. В силу леммы 5.10 оценка сверху для верхнего предела в утверждении теоремы 3.2 следует из теоремы 3.1. Поскольку доказательства оценок снизу для соответствующих нижних пределов стандартны (см., например, доказательство оценок снизу в теореме 1.2) и не требует привлечения дополнительных идей, то мы их опускаем. Теорема 3.2 доказана.

4.2. Доказательство лемм 4.1, 4.2. Нам понадобятся утверждения, которые мы сформулируем в настоящем пункте и докажем в п. 4.3.

Будем говорить, что функция $B = B(u): \mathbb{R}^{1+} \rightarrow \mathbb{R}^{1+}$ удовлетворяет условию (B), если она *выпукла вверх, равномерно ограничена на $\mathbb{R}^{1+}$ и не равна тождественно 0*.

ЛЕММА 4.3. Пусть функции $B^{(1)}(u)$, $B^{(2)}(u)$ удовлетворяют условию (B) и

$$\max\{B^{(1)}(0), B^{(2)}(0)\} > 0.$$

Тогда система уравнений относительно неизвестного $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2+}$:

$$\begin{cases} x_1 = B^{(1)}(x_2), \\ x_2 = B^{(2)}(x_1), \end{cases} \quad (4.5)$$

имеет единственное $v \in \mathbb{R}^{2+}$ решение $(x^{(1)}, x^{(2)})$, которое к тому же лежит в $(\mathbb{R}^{2+})$.

Введем теперь пару функций (см. п. 3.1)

$$G^{(i)}(u) = \min\{\alpha^{(i)}, g^{(i)}(u)\}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$g^{(i)}(u) = \min_{v \geq 0} \{uv + D(\omega(i) - v\omega(i^*))\},$$

числа $\alpha^{(i)}$ были введены в п. 3.1.

ЛЕММА 4.4. Система уравнений (4.5) для функций $B^{(i)} = G^{(i)}$, $i = 1, 2$, имеет в $\mathbb{R}^{2+}$ единственное решение $(x^{(1)}, x^{(2)})$. При этом

$$(x^{(1)}, x^{(2)}) = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}), \quad (4.6)$$

$$0 < \lambda^{(i)} \leq \alpha^{(i)} \leq D(\omega(i)), \quad i = 1, 2, \quad (4.7)$$

где числа $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ определены в (3.14):

$$\lambda^{(i)} = G^{(i)}(\alpha^{(i*)}), \quad i = 1, 2.$$

Кроме того, выполняются равенства

$$\min_{i=1,2} (\alpha^{(i)} - \lambda^{(i)}) = 0, \quad (4.8)$$

$$\overline{D}(0, \beta) = D(0, \beta), \quad \beta \in \mathbb{R}^{2+}, \quad (4.9)$$

где (см. определения (3.15), (3.4))

$$\overline{D}(0, \beta) = \min_{k=1,2,3} \overline{D}_k(0, \beta), \quad D(0, \beta) = \min_{k=0,1,2} D_k(0, \beta).$$

Для $i = 1, 2$ и $y \in \mathbb{R}^{2+}$ введем случайные моменты

$$\eta^{(i)}(y) = \inf\{n \geq 1 : X_{i*}(y, n) = 0\}$$

первого прихода цепи $X(y, n)$ на ось $\Gamma^{(i)}$.

Введем две пары функций $(f_1^+(\Delta), f_2^+(\Delta))$, $(f_1^-(\Delta), f_2^-(\Delta))$, отображающих $[0, \infty)$ в $[0, \infty]$, положив: для $i = 1, 2$

$$f_+^{(i)}(u, \Delta) = -\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sup_{\substack{|v-u| \leq \delta \\ v \geq 0}} \mathbf{P}(X_i(tv\omega(i^*), \eta^{(i)}(tv\omega(i^*))) \in [t, t + \Delta), \mathcal{A}^{(i)}(tv));$$

$$f_-^{(i)}(u, \Delta) = -\liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \inf_{\substack{|v-u| \leq \delta \\ v \geq 0}} \mathbf{P}(X_i(tv\omega(i^*), \eta^{(i)}(tv\omega(i^*))) \in [t, t + \Delta), \mathcal{A}^{(i)}(tv)),$$

где

$$\mathcal{A}^{(i)}(v) = \{\eta^{(i*)}(v\omega(i^*)) > \eta^{(i)}(v\omega(i^*))\}.$$

Как и прежде, будем считать, что в нерешетчатом случае $\Delta > 0$ произвольно. В решетчатом случае удобно считать, что в интервале $[t, t + \Delta)$ число $t \in \mathbb{Z}^1$ целочисленное, а $\Delta > 0$ произвольно. Этому соглашению будем следовать в оставшейся части настоящего параграфа.

Из определения видно, что для любого $\Delta > 0$

$$f_-^{(i)}(u, \Delta) \geq f_+^{(i)}(u, \Delta), \quad u \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.10)$$

ЛЕММА 4.5. Для $i = 1, 2$, $u \geq 0$, $\Delta > 0$ выполняется

$$f_-^{(i)}(u, \Delta) = f_+^{(i)}(u, \Delta) = D(\omega(i) - u\omega(i^*)).$$

Проведем теперь

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Зададим две тройки (см. п. 5.7):

$$(p_1, G_1^{(0)}, G_1), \quad (p_2, G_2^{(0)}, G_2),$$

положив для $i = 1, 2$:

$$p_i = P(\tau^{(i)} < \infty);$$

для $A \subseteq (0, \infty)$

$$G_i^{(0)}(A) = \frac{1}{\pi^{(i^*)}([0, \infty))} \int_0^\infty P(X_i(u\omega(i^*), \eta^{(i)}(u\omega(i^*))) \in A \mid \mathcal{A}^{(i)}(u)) \pi^{(i^*)}(du);$$

для $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$G_i(A) = P\left(\left(X_i^{(i)}(0, \tau^{(i)}), \min_{1 \leq j \leq \tau^{(i)}} X_i^{(i)}(0, j)\right) \in A \mid \tau^{(i)} < \infty\right).$$

Обозначим (см. п. 5.7) $(p, G^{(0)}, G)$ -цепь, отвечающую тройке $(p_i, G_i^{(0)}, G_i)$, через $S^{(i)}(v, n)$, $n = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2$. Воспользуемся следующими леммами.

ЛЕММА 4.6. *Тройки $(p_1, G_1^{(0)}, G_1)$, $(p_2, G_2^{(0)}, G_2)$ удовлетворяют условию (J), которое введено в п. 5.7.*

В силу условия (J) цепи $S_1(v, n)$, $S_2(v, n)$ эргодичны и имеют стационарные распределения, которые мы обозначим $m^{(1)}$, $m^{(2)}$ соответственно (см. п. 5.7).

ЛЕММА 4.7. *Для любого измеримого $A \subseteq (0, \infty)$ справедливо*

$$\pi^{(i)}(A) = \frac{\pi^{(i^*)}((0, \infty))}{m^{(i)}(\{0\})} m^{(i)}(A), \quad i = 1, 2.$$

В силу леммы 4.6 обе тройки удовлетворяют условию (J), поэтому в силу леммы 5.9 меры $m^{(i)}$ лежат в классе $\mathcal{M}_+$, который введен в п. 5.6. Поэтому в силу леммы 4.7 (это следует и из теоремы 1.1) $\pi^{(i)} \in \mathcal{M}_+$, $i = 1, 2$. Следовательно, можно ввести следующие обозначения (см. определения в п. 5.6 и соглашение о $\Delta > 0$, сделанное выше)

$$\beta_+^{(i)} \equiv \lambda_+(\pi^{(i)}), \quad \beta_-^{(i)}(\Delta) \equiv \lambda_-(\Delta, \pi^{(i)}), \quad i = 1, 2, \quad \Delta > 0.$$

Напомним, что выпуклые вверх неубывающие (удовлетворяющие условию (B)) функции $G^{(1)}(u)$, $G^{(2)}(u)$ были введены перед формулировкой леммы 4.4.

ЛЕММА 4.8. *Пара $(\beta_+^{(1)}, \beta_+^{(2)})$ удовлетворяет системе неравенств*

$$\begin{cases} \beta_+^{(1)} \geq G^{(1)}(\beta_+^{(2)}), \\ \beta_+^{(2)} \geq G^{(2)}(\beta_+^{(1)}); \end{cases} \quad (4.11)$$

пара $(\beta_-^{(1)}(\Delta), \beta_-^{(2)}(\Delta))$ удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} \beta_-^{(1)}(\Delta) \leq G^{(1)}(\beta_-^{(2)}(\Delta)), \\ \beta_-^{(2)}(\Delta) \leq G^{(2)}(\beta_-^{(1)}(\Delta)). \end{cases} \quad (4.12)$$

Продолжим доказательство леммы 4.1. Построим две непрерывные кривые в $\mathbb{R}^{2+}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{(1)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2+} : x_2 \geq 0, x_1 = G^{(1)}(x_2)\}, \\ \mathcal{G}^{(2)} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2+} : x_1 \geq 0, x_2 = G^{(2)}(x_1)\}.\end{aligned}$$

Совокупность решений $x = (x_1, x_2)$ системы неравенств (4.12) составляет выпуклое множество, ограниченное кривыми $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}$. Это множество назовем Λ_- . Поскольку в силу леммы 4.8 точка $(\beta_-^{(1)}(\Delta), \beta_-^{(2)}(\Delta))$ удовлетворяет этой системе неравенств, то она лежит в множестве Λ_- . Кривые $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}$ пересекаются в единственной точке $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$ (см. доказательство леммы 4.3), которая лежит “правее и выше” всех точек из множества Λ_- . Поэтому для любого $\Delta > 0$ выполняется $\lambda_-^{(i)}(\Delta, \pi^{(i)}) \equiv \beta_-^{(i)}(\Delta) \leq \lambda_-^{(i)}(\Delta)$, $i = 1, 2$.

Совокупность решений $x = (x_1, x_2)$ системы неравенств (4.11) составляет множество, состоящее из точек $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2+}$, ограниченных снизу кривой $\mathcal{G}^{(2)}$ и слева кривой $\mathcal{G}^{(1)}$. Назовем его Λ_+ . В силу леммы 4.8 точка $(\beta_+^{(1)}, \beta_+^{(2)})$ удовлетворяет этой системе и лежит в множестве Λ_+ . Как мы уже отмечали, кривые $\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(2)}$ пересекаются в единственной точке $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$. Поэтому выполняется $\beta_+^{(1)} \geq \lambda^{(1)}, \beta_+^{(2)} \geq \lambda^{(2)}$. Мы доказали, что для всех $\Delta > 0$ выполняется $\beta_+^{(1)} \geq \beta_-^{(1)}(\Delta), \beta_+^{(2)} \geq \beta_-^{(2)}(\Delta)$.

Поскольку по определению для любого $\Delta > 0$ справедливы обратные неравенства, то мы доказали, что $\lambda(\pi^{(i)}) = \beta_+^{(i)} = \beta_-^{(i)}(\Delta) = \lambda^{(i)}$, $i = 1, 2$. Равенство (4.3) доказано.

Поскольку неравенства (4.4) следуют из леммы 4.4, то лемма 4.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.2. Оценка сверху в утверждении доказываемой леммы следует непосредственно из теоремы о больших отклонениях обычной функции восстановления (см. [16]). Поскольку оценка снизу получается с помощью стандартной техники теории больших отклонений (см., например, доказательства лемм 1.1, 1.2, 5.2, [7], [8], [16]), то лемма 4.2 доказана.

4.3. Доказательство лемм 4.3–4.8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.3. Рассмотрим две непрерывные кривые в $\mathbb{R}^{2+}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{(1)} &= \{x = (x_1, x_2) : x_2 \geq 0, x_1 = B^{(1)}(x_2)\}, \\ \mathcal{B}^{(2)} &= \{x = (x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 = B^{(2)}(x_1)\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что эти кривые пересекаются в единственной точке $(x^{(1)}, x^{(2)})$, которая лежит в $(\mathbb{R}^{2+})$. Лемма 4.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.4. В силу условия (M^+) для некоторого $\delta > 0$ справедливо включение $\{\lambda \in \mathbb{R}^{2+} : |\lambda| \leq \delta\} \subseteq \Phi_1$. Поэтому в силу известного представления для второй функции отклонений (3.19) и в силу условия (E) можно утверждать, что

$$\max \left\{ \inf_{u \in \mathbb{R}^1} D((1, u)), \inf_{u \in \mathbb{R}^1} D((u, 1)) \right\} > 0, \quad (4.13)$$

и для любого $\alpha \in (\mathbb{R}^{2+})$ верно

$$D(\alpha) > 0.$$

Поэтому функции $G^{(1)}(u)$, $G^{(2)}(u)$ удовлетворяют условию

$$\max\{G^{(1)}(0), G^{(2)}(0)\} > 0.$$

Пусть $i \in \{1, 2\}$. Функция $\bar{g}^{(i)}(u) = \sup_{v \in \mathbb{R}^1} \{uv - \bar{h}^{(i)}(v)\}$ является преобразованием Лежандра над функцией

$$\bar{h}^{(i)}(v) = \begin{cases} D(\omega(i) - v\omega(i^*)), & \text{если } v \geq 0; \\ \infty, & \text{если } v < 0; \end{cases}$$

и поэтому выпукла вниз. Поэтому функция $g^{(i)}(u) = -\bar{g}^{(i)}(-u)$ выпукла вверх, а функция $G^{(i)}(u) = \min\{\alpha^{(i)}, g^{(i)}(u)\}$ удовлетворяет свойству (В). Поэтому в силу леммы 4.3 система (4.5) для функций $B^{(i)} = G^{(i)}$, $i = 1, 2$, имеет в $\mathbb{R}^{2+}$ единственное решение $(x^{(1)}, x^{(2)})$ и $x^{(1)} > 0$, $x^{(2)} > 0$.

Докажем теперь неравенства (4.7). Левое неравенство в (4.7) следует из (4.6). Поскольку по определению выполняется неравенство $\lambda^{(i)} \leq \alpha^{(i)}$, то для доказательства правого неравенства в (4.7) достаточно доказать, что

$$\alpha^{(i)} \leq D(\omega(i)), \quad i = 1, 2. \quad (4.14)$$

Обозначим $F_i(A) = P(\zeta^{(i)} \in A, \tau^{(i)} < \infty)$ для $i = 1, 2$. Из определения $\alpha^{(i)}$ следует, что (см. обозначения в п. 5.6 и неравенство (5.10))

$$\alpha^{(i)} \leq \lambda_+(F_i) \leq \lambda_-(\Delta, F_i), \quad i = 1, 2.$$

Поэтому нам достаточно доказать, что найдется $\Delta_0 > 0$ такое, что для $\Delta \geq \Delta_0$ выполняется $\lambda_-(\Delta, F_i) \leq D(\omega(i))$ для $i = 1, 2$. Последнее эквивалентно неравенству

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln F_i([t, t + \Delta)) \geq -D(\omega(i)), \quad i = 1, 2.$$

Поскольку получение этой оценки снизу на базе теоремы 2 в [14] и леммы 5.2 стандартно, то неравенство (4.14) доказано. Неравенства (4.7) доказаны.

Убедимся теперь, что верно утверждение (4.6). Отметим прежде, что $G^{(i)}(u) \leq \alpha^{(i)}$, $i = 1, 2$, поэтому точка $(x^{(1)}, x^{(2)})$ лежит в множестве

$$\{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1 \leq \alpha^{(1)}, 0 < x_2 \leq \alpha^{(2)}\}.$$

Предположим, что

$$x^{(1)} < \alpha^{(1)}, \quad x^{(2)} < \alpha^{(2)}. \quad (4.15)$$

В этом случае для двух неотрицательных чисел u_1, u_2 верно

$$x^{(1)} = x^{(2)}u_2 + D((1, -u_2)), \quad (4.16)$$

$$x^{(2)} = x^{(1)}u_1 + D((-u_1, 1)). \quad (4.17)$$

Обозначим $r = u_1u_2$; возможны четыре случая: (а) $r = 0$, (б) $0 < r < 1$, (с) $r = 1$, (д) $1 < r < \infty$.

В случае (а) верно: либо $x^{(1)} = D(\omega(1))$, либо $x^{(2)} = D(\omega(2))$. Поэтому в силу правого неравенства в (4.7) либо $x^{(1)} \geq \alpha^{(1)}$, либо $x^{(2)} \geq \alpha^{(2)}$. Это противоречит (4.15), поэтому (а) невозможно.

В случае (б) умножим равенство (4.17) на u_2 и прибавим к равенству (4.16); получим (в силу известных свойств второй функции уклонений: $D(|t|\alpha) = |t|D(\alpha)$, $D(\alpha) + D(\beta) \geq D(\alpha + \beta)$)

$$\begin{aligned} x^{(1)}(1-r) &= D((1, -u_2)) + u_2 D((-u_1, 1)) \\ &= D((1, -u_2)) + D((-u_2 u_1, u_2)) \\ &\geq D((1-r), 1) = (1-r)D(\omega(1)). \end{aligned}$$

Мы получили неравенство $x^{(1)} \geq D(\omega(1))$. Вместе с правым неравенством в (4.7) это неравенство противоречит первому неравенству в (4.15). Поэтому случай (б) невозможен.

В случае (с), рассуждая аналогично предыдущему, получаем два равенства

$$D((1, -u_2)) + D((-1, u_2)) = 0, \quad D((u_1, -1)) + D((-u_1, 1)) = 0.$$

Эти равенства противоречат (4.13), поэтому случай (с) невозможен.

В случае (d) получаем $x^{(1)}(1-r) = D((1, -u_2)) + u_2 D((-u_1, 1)) \geq 0$. Поскольку слева стоит отрицательное число, то и случай (d) невозможен.

Таким образом, мы показали, что (4.15) невозможно. При этом мы доказали равенство (4.8).

Пусть теперь $\alpha^{(2)} = x^{(2)}$. Тогда, очевидно,

$$x^{(1)} = G^{(1)}(\alpha^{(2)}) = \min\{\alpha^{(1)}, g^{(1)}(\alpha^{(2)})\} = \lambda^{(1)}. \quad (4.18)$$

При этом выполнено неравенство $x^{(1)} \leq \alpha^{(1)}$ и функция $g^{(2)}(u)$ не убывает, поэтому $g^{(2)}(x^{(1)}) \leq g^{(2)}(\alpha^{(1)})$. В силу последнего верно

$$\alpha^{(2)} = \min\{\alpha^{(2)}, g^{(2)}(x^{(1)})\} = \min\{\alpha^{(2)}, g^{(2)}(\alpha^{(1)})\} = \lambda^{(2)}.$$

Поскольку $x^{(2)} = \alpha^{(2)}$, то мы доказали, что $x^{(2)} = \lambda^{(2)}$, что вместе с (4.18) дает (4.6). В силу симметрии это же верно, если $\alpha^{(1)} = x^{(1)}$. Мы доказали (4.6).

Докажем теперь (4.9). Сравнивая определения функций $\overline{D}_k(0, \beta)$, $D_k(0, \beta)$, видим, что очевидно неравенство $\overline{D}(0, \beta) \leq D(0, \beta)$ для $\beta \in \mathbb{R}^{2+}$. Поэтому достаточно убедиться, что верно обратное неравенство

$$\overline{D}(0, \beta) \geq D(0, \beta), \quad \beta \in \mathbb{R}^{2+}. \quad (4.19)$$

В силу (4.8) можно считать (для определенности), что $\alpha^{(1)} = \lambda^{(1)}$. Пусть $\overline{D}(0, \beta) = \overline{D}_0(0, \beta)$; тогда $\overline{D}(0, \beta) = D_0(0, \beta) \geq D(0, \beta)$ и (4.19) имеет место. Пусть $\overline{D}(0, \beta) = \overline{D}_1(0, \beta)$; тогда $\overline{D}(0, \beta) = D_1(0, \beta) \geq D(0, \beta)$ и (4.19) имеет место тоже.

Пусть, наконец, $\overline{D}(0, \beta) = \overline{D}_2(0, \beta)$. Это значит, что для некоторого $u_2 \geq 0$ выполняется $\overline{D}(0, \beta) = \lambda^{(2)}u_2 + D(\beta - u_2\omega(2))$. Если при этом $\alpha^{(2)} = \lambda^{(2)}$, то (4.19) имеет место тоже. Если же при этом $\alpha^{(2)} < \lambda^{(2)}$, то для некоторого $u_1 \geq 0$ выполняется $\lambda^{(2)} = \alpha^{(1)}u_1 + D(\omega(1) - u_1\omega(1))$. Поэтому

$$\begin{aligned} \overline{D}(0, \beta) &= \alpha^{(1)}u_1u_2 + D(\omega(1) - u_1\omega(1))u_2 + D(\beta - u_2\omega(2)) \\ &= \alpha^{(1)}u_1u_2 + D(\omega(1)u_2 - u_1u_2\omega(1)) + D(\beta - u_2\omega(2)) \\ &\geq \alpha^{(1)}u_1u_2 + D(\beta - u_1u_2\omega(1)) \geq D_1(0, \beta) \geq D(0, \beta). \end{aligned}$$

Неравенство (4.19) доказано. Соотношение (4.9) установлено; лемма 4.4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.6. Условия $(J_{(a)})$, $(J_{(b)})$ для троек $(p_1, G_1^{(0)}, G_1)$, $(p_2, G_2^{(0)}, G_2)$ (см. п. 5.7) проверяются очевидным образом. Проверка условия $(J_{(c)})$ основана на следующем утверждении.

ЛЕММА 4.9. *Найдутся константы $\delta > 0$, $C < \infty$, $\gamma > 0$ такие, что для $t \geq 0$, $i = 1, 2$*

$$\sup_{0 \leq u \leq \delta t} P(X_i(u\omega(i^*), \eta^{(i)}(u\omega(i^*))) > t, \eta_{i^*}(u\omega_{i^*}) > \eta_i(u\omega_{i^*})) < Ce^{-\gamma t}, \quad (4.20)$$

$$P(\zeta^{(i)} > t, \tau^{(i)} < \infty) \equiv P(X_i^{(i)}(0, \tau^{(i)}) > t, \tau^{(i)} < \infty) < Ce^{-\gamma t}; \quad (4.21)$$

если $E\xi_i < 0$, то

$$\sup_{0 \leq u \leq \infty} P(X_i(u\omega(i^*), \eta^{(i)}(u\omega(i^*))) > t, \eta^{(i^*)}(u\omega(i^*)) > \eta^{(i)}(u\omega(i^*))) < Ce^{-\gamma t}. \quad (4.22)$$

Докажем, опираясь на лемму 4.8, что условие $(J_{(c)})$ для троек $(p_1, G_1^{(0)}, G_1)$, $(p_2, G_2^{(0)}, G_2)$ выполнено. Из (4.21) следует, что для $i = 1, 2$ выполняется $G_{i1} \in \mathcal{M}_+$, где $G_{i1} = G_i(A \times (-\infty, \infty))$, $A \subseteq \mathbb{R}^1$. В силу наших условий либо $E\xi_1 < 0$, либо $E\xi_2 < 0$; пускай для определенности $E\xi_1 < 0$. Тогда в силу (4.22) верно $G_1^{(0)} \in \mathcal{M}_+$. Поэтому тройка $(p_1, G_1^{(0)}, G_1)$ удовлетворяет условию (J).

Далее, в силу теоремы 1.1

$$\pi^{(1)} \in \mathcal{M}_+, \quad \lambda_+(\pi^{(1)}) > 0. \quad (4.23)$$

Обращаясь далее к определению функции $G_2^{(0)}$, видим, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \ln G_2^{(0)}([t, \infty)) \leq - \inf_{u \geq 0} \{f_2^+(u) + u\lambda_+(\pi^{(1)})\}.$$

В силу (4.20), (4.23) правая часть последнего неравенства отрицательна, поэтому $G_2^{(0)} \in \mathcal{M}_+$. Мы доказали, что и тройка $(p_2, G_2^{(0)}, G_2)$ удовлетворяет условию (J). Лемма 4.6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.9. Пусть $E\xi_1 < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq u \leq \infty} P(X_1(u\omega(2), \eta^{(1)}(u\omega(2))) > t, \eta^{(2)}(u\omega(2)) > \eta^{(1)}(u\omega(2))) \\ & \leq \max \left\{ P\left(X_1(0, 1) \geq \frac{1}{3}t\right), P\left(X_1(\omega(2)) \geq \frac{1}{3}t\right) \right\} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\xi_1(1) + \dots + \xi_1(k) > \frac{1}{3}t\right) + \sup_{y \in \mathbb{R}^{2+}} P\left(X_1(y, 1) \geq \frac{1}{3}t\right). \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых в правой части последнего неравенства не больше, чем $Ce^{-\gamma t}$. Поэтому утверждение (4.22) для $i = 1$ доказано. В силу симметрии (4.22) доказано.

Обратимся к доказательству (4.20); если $E\xi_1 < 0$, то (4.20) следует из (4.22). Поэтому достаточно рассмотреть случай $E\xi_1 > 0$, $E\xi_2 < 0$. В этом случае для любого $T < \infty$ верно

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq u \leq \delta t} P(X_2(u\omega(1), \eta^{(2)}(u\omega(1))) > t, \eta^{(1)}(u\omega(1)) > \eta^{(2)}(u\omega(1))) \\ & \leq \sup_{0 \leq u \leq \delta t} P(X_2(u\omega(1), \eta^{(2)}(u\omega(1))) > t, \eta^{(2)}(u\omega(1)) \leq tT) \\ & + \sup_{0 \leq u \leq \delta t} P(\eta^{(1)}(u\omega(2)) > tT) \equiv A(t, \delta, T) + B(t, \delta, T). \end{aligned}$$

Поскольку для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} A(t, \delta, T) & \leq \max \left\{ P\left(X_1(0, 1) \geq \frac{1}{3}t\right), P\left(X_1(\omega(2), 1) \geq \frac{1}{3}t\right) \right\} \\ & + \sum_{k=1}^{tT} P\left(\xi_1(1) + \dots + \xi_1(k) > \frac{1}{3}t\right) + \sup_{y \in \mathbb{R}^{2+}} P\left(X_1(y, 1) \geq \frac{1}{3}t\right), \end{aligned}$$

то найдется $T_0 > 0$ такое, что $A(t, \delta, T_0) \leq Ce^{-\gamma t}$. Для этого T_0 справедливо

$$B(t, \delta, T_0) \leq \max \{ P(X_2(0, 1) + S_2([T_0 t] - 2) > 0), P(X_2(\omega(2)) + S_2([T_0 t] - 2) > -\delta t) \}.$$

Поэтому в силу условия $E\xi_2 < 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $B(t, \delta_0, T_0) \leq Ce^{-\gamma t}$. Утверждение (4.20) для $i = 1$ доказано.

В силу симметрии утверждение (4.20) верно и для $i = 2$. Поскольку утверждение (4.21) доказывается аналогичным образом, то лемма 4.9 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.7. Из результатов [4], [32] следует, что для любого $A \subseteq (0, \infty)$ справедлива формула

$$\pi^{(1)}(A) = \int_0^\infty \overline{H}_{\Gamma(2)}(u\omega(2), A \times \{0\}) \pi^{(2)}(du) \equiv H^{(1)}(\nu^{(2)}, A \times \{0\}),$$

где случайная величина $\nu^{(2)} \in \mathbb{R}^{1+}$ имеет распределение $\pi^{(2)}$. Введем последовательность случайных величин

$$\begin{aligned} \tau_1^{(1)}(u) &= \inf\{k \geq 1 : X_2(u\omega(2), k) = 0\}, \dots, \\ \tau_{j+1}^{(1)}(u) &= \inf\{k \geq 1 : X_2(u\omega(2), \tau_j^{(1)} + k) = 0\}, \dots \end{aligned}$$

и зададим суммы

$$T_j^{(1)}(u) = \sum_{k=1}^j \tau_k^{(1)}(u).$$

Определим новую функцию

$$\widehat{H}^{(1)}(u, A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1(u\omega(2), T_j^{(1)}(u)) \in A, X_1(u\omega(2), i) > 0, i = 1, \dots, T_j^{(1)}(u)).$$

Обращаясь далее к определению функции восстановления с запрещенным множеством $\Gamma^{(2)}$, получаем для $A \subseteq (0, \infty)$

$$\begin{aligned}
H_{\Gamma^{(2)}}(u\omega(2), A \times \{0\}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X(u\omega(2), k) \in A \times \{0\}, X_1(u\omega(2), i) > 0, i = 1, \dots, k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \mathbf{P}(X_1(u\omega(2), k) \in A, X_1(u\omega(2), i) > 0, i = 1, \dots, k, T_j^{(1)}(u) = k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \mathbf{P}(X_1(u\omega(2), k) \in A, X_1(u\omega(2), i) > 0, i = 1, \dots, k, T_j^{(1)}(u) = k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_1(u\omega(2), T_j^{(1)}(u)) \in A, X_1(u\omega(2), i) > 0, i = 1, \dots, T_j^{(1)}(u)) \\
&= \widehat{H}^{(1)}(u, A).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что для $A \subseteq (0, \infty)$ выполняется $H_{\Gamma^{(2)}}(u\omega(2), A \times \{0\}) = \widehat{H}^{(1)}(u, A)$, и, стало быть,

$$\pi^{(1)}(A) = \int_0^{\infty} \widehat{H}^{(1)}(u, A) \pi^{(2)}(du) \equiv \widetilde{H}^{(1)}(A). \quad (4.24)$$

Обратимся теперь к цепи $S_1(v, n)$; для нее в силу результатов [4], [32] вытекает, что справедливо следующее представление для стационарной меры:

$$\begin{aligned}
m^{(1)}(A) &= m^{(1)}(\{0\}) \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_1(0, j) \in A, S_1(0, l) > 0, l = 1, \dots, j) \\
&\equiv m^{(1)}(\{0\}) H_{\{0\}}^{(1)}(A),
\end{aligned}$$

где $A \subseteq (0, \infty)$. Анализируя далее определение $(p_1, G_1^{(0)}, G_1)$ -цепи, убеждаемся, что для любого $A \subseteq (0, \infty)$

$$\widetilde{H}^{(1)}(A) = \pi^{(2)}([0, \infty)) H_{\{0\}}^{(1)}(A).$$

Поэтому в силу (4.24), (4.18) верно

$$\pi^{(1)}(A) = \widetilde{H}^{(1)}(A) = \pi^{(2)}([0, \infty)) H_{\{0\}}^{(1)}(A) = \frac{\pi^{(2)}([0, \infty))}{m^{(1)}(\{0\})} m^{(1)}(A).$$

Поскольку в силу симметрии второе утверждение леммы 4.7 тоже справедливо, то лемма 4.7 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.8. В силу леммы 5.9 верно неравенство

$$\lambda_+(m^{(i)}) \geq \min\{\lambda_+(G_i^{(0)}), \alpha^{(i)}\}, \quad i = 1, 2.$$

В свою очередь, в силу определения функции $G_i^{(0)}$ верно неравенство

$$\lambda_+(G_i^{(0)}) \geq g^{(i)}(\lambda_+(m^{(i*)})).$$

Поэтому первая пара неравенств для $\beta_+^{(i)} = \lambda_+(m^{(i)}) = \lambda_+(\pi^{(i)})$ доказана. Поскольку вторая пара неравенств для $\beta_-^{(i)}(\Delta) = \lambda_-(\Delta, m^{(i)}) = \lambda_-(\Delta, \pi^{(i)})$ доказывается аналогично, то лемма 4.8 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.5. В силу (4.10) достаточно доказать два неравенства для $i = 1, 2, u \geq 0$:

$$-f_+^{(i)}(u, \Delta) \leq -D(\omega(i) - u\omega(i^*)), \quad (4.25)$$

$$-f_-^{(i)}(u, \Delta) \geq -D(\omega(i) - u\omega(i^*)). \quad (4.26)$$

Пусть $i = 1, \alpha = \omega(1) - u\omega(2)$. Используя стандартную технику применения экспоненциального неравенства Чебышёва (см. также леммы 5.1, 5.2), можно получить

$$-f_+^{(i)}(u, \Delta) \leq -\min\{\Lambda_1(\alpha), \Lambda_2(\alpha), \Lambda_3(\alpha)\},$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\alpha) &= \overline{\Lambda}_0(\alpha), \quad \overline{\Lambda}_0(\alpha) = \sup_{\lambda \in \Phi} \langle \lambda, \alpha \rangle, \\ \Lambda_2(\alpha) &= \inf_{\substack{u\omega(2) + \alpha' \in \mathbb{R}^{2+} \\ \alpha' + \alpha'' = \alpha}} \{\overline{\Lambda}_0(\alpha') + \overline{\Lambda}_0(\alpha'')\}, \\ \Lambda_3(\alpha) &= \inf_{\substack{u\omega(2) + \alpha' \in \mathbb{R}^{2+} \\ u\omega(2) + \alpha' + \beta \in \mathbb{R}^{2+} \\ \alpha' + \beta + \alpha'' = \alpha}} \{\overline{\Lambda}_0(\alpha') + D(\beta) + \overline{\Lambda}_0(\alpha'')\}. \end{aligned}$$

Сравнивая определения функций $\overline{\Lambda}_0(\alpha)$ и $D(\alpha)$ (см. (3.19)), убеждаемся, что $\overline{\Lambda}_0(\alpha) \geq D(\alpha)$, поэтому в силу неравенства $D(\alpha' + \alpha'') \leq D(\alpha') + D(\alpha'')$ получаем требуемое соотношение (4.25).

Поскольку второе неравенство (4.26) является оценкой снизу, которая доказывается стандартным образом, то лемма 4.5 доказана.

4.4. Доказательство теорем 3.3, 3.4. В настоящем пункте будем предполагать выполненными условия теорем 3.3, 3.4. Для $i \in \{1, 2\}$ были введены функции восстановления (см. (3.22)) $H^{(i)}(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^1$. Для описания асимптотики функций $H^{(i)}([t, \infty))$ положим $p^{(i)} = P(\tau^{(i)} < \infty)$, $l^{(i)} = [p^{(i)}]$ и введем следующие параметры для $i = 1, 2$:

$$a^{(i)} = \begin{cases} \frac{p^{(i)}}{1 - p^{(i)}}, & \text{если } p^{(i)} < 1; \\ 1, & \text{если } p^{(i)} = 1; \end{cases} \quad r^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha^{(i)} < D(\omega(i)); \\ \frac{3}{2}, & \text{если } \varphi^{(i)}(\alpha^{(i)}) < 1. \end{cases}$$

Следующее утверждение следует из результатов работы [16].

ЛЕММА 4.10. Для $i \in \{1, 2\}$ справедливо

$$H^{(i)}([t, \infty)) = \begin{cases} C^{(+i)} t^{-r^{(i)}} e^{-t\alpha^{(i)}} (1 + o(1)), & \text{если } t \rightarrow \infty; \\ a^{(i)} (C^{(-i)} |t|)^{l^{(i)}} (1 + o(1)), & \text{если } t \rightarrow -\infty; \end{cases}$$

где $C^{(+i)} > 0$, $C^{(-i)} > 0$.

Введем несобственный случайный вектор $\nu^{(i)} \in \Gamma^{(i)}$ с распределением $\pi_0^{(i)} = \pi(A \cap \Gamma^{(i)})$, $i = 1, 2$. Наряду с цепями $X(y, n)$, у которых начальное положение

у неслучайно, будем рассматривать цепи Маркова $X(\nu, n)$, у которых начальное положение $\nu = X(\nu, 0)$ случайно (скажем, $\nu = \nu^{(i)}$). Более точно, конечномерные распределения цепи $X(\nu, n)$ определим как

$$P(X(\nu, k) \in A_k, k = 0, 1, \dots, n) = \int_{\mathbb{R}^{2+}} P(X(y, k) \in A_k, k = 0, 1, \dots, n) P(\nu \in dy). \quad (4.27)$$

Условимся везде, где появляется цепь со случайным начальным положением, иметь в виду формулу (4.27).

Для $i = 1, 2$ и случайного начального положения ν введем случайные моменты

$$\eta^{(i)}(\nu) = \inf\{n \geq 1 : X_{i*}(\nu, n) = 0\}.$$

Тогда $\eta(\nu) = \min\{\eta^{(1)}(\nu), \eta^{(2)}(\nu)\}$ есть момент первого попадания на границу Γ блуждания $X(\nu, n)$, которое стартует в случайный момент ν .

Введем несобственную случайную величину

$$\bar{\zeta}^{(i)} = X_i(\nu^{(i*)}, \eta^{(i)}(\nu^{(i*)})) \bar{I}_{\{\eta^{(i*)}(\nu^{(i*)}) > \eta^{(i)}(\nu^{(i*)})\}},$$

где для события A функция $\bar{I}_A = \bar{I}_A(\omega)$ от элементарного исхода ω определяется как

$$\bar{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A; \\ \infty, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Таким образом, конечная часть величины $\bar{\zeta}^{(1)}$ есть значение координаты X_1 цепи $X(\nu^{(2)}, n)$ (которая стартует в случайной точке $\nu^{(2)}$) в момент первого прихода этой цепи на ось $\Gamma^{(1)}$ на тех элементарных событиях, для которых цепь до этого момента не касалась оси $\Gamma^{(2)}$.

Распределение несобственной случайной величины $\bar{\zeta}^{(i)}$ (ее “конечной части”) обозначим (см. также п. 3.3) $\bar{G}^{(i)}(A) = P(\bar{\zeta}^{(i)} \in A)$, $A \subseteq (0, \infty)$.

Для $i = 1, 2$ для цепи $X^{(i)}(\nu, n)$, которая стартует в случайной точке ν , введем случайный момент

$$\tau^{(i)}(\nu) = \inf\left\{n \geq 1 : X_{i*}^{(i)}(\nu, n) = 0, \min_{1 \leq m \leq n} X_i^{(i)}(\nu, m) \leq 0\right\}. \quad (4.28)$$

Это момент первого после попадания в полуплоскость $\{x_i \leq 0\}$ прихода на ось $\{x_{i*} = 0\}$ цепи $X^{(i)}(\nu, n)$.

Введем теперь новую случайную величину

$$\bar{\zeta}_1^{(i)} = X_i^{(i)}(\bar{\zeta}^{(i)}\omega(i), \tau^{(i)}(\bar{\zeta}^{(i)}\omega(i))) \bar{I}_{\{\tau^{(i)}(\bar{\zeta}^{(i)}\omega(i)) < \infty\}}.$$

Таким образом, конечная часть $\bar{\zeta}_1^{(1)}$ есть значение координаты $X_1^{(1)}$ цепи $X^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n)$ (которая стартует в случайной точке $\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1)$) в момент первого прихода этой цепи на ось $\{x_2 = 0\}$ после того, как эта цепь побывала в полуплоскости $\{x_1 \leq 0\}$.

Распределение случайной величины $\bar{\zeta}_1^{(i)}$ обозначим (см. также п. 3.3) $\bar{G}_1^{(i)}(A) = \mathbb{P}(\bar{\zeta}_1^{(i)} \in A)$.

Случайные величины $\bar{\zeta}, \bar{\zeta}_1^{(i)}$ играют важную роль в настоящем пункте, о чем свидетельствует лемма 4.11 (см. ниже).

Введем еще для $u > 0, A \subseteq (0, \infty)$ две функции

$$\begin{aligned}\bar{H}^{(1)}(u, A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X^{(1)}(u\omega(1), n) \in A \times \{0\}, \min_{1 \leq m \leq n} X_1^{(1)}(u\omega(1), m) > 0\right), \\ \bar{H}^{(2)}(u, A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X^{(2)}(u\omega(2), n) \in \{0\} \times A, \min_{1 \leq m \leq n} X_2^{(2)}(u\omega(2), m) > 0\right).\end{aligned}$$

ЛЕММА 4.11. Для $i = 1, 2, t > 0$ верны формулы

$$\begin{aligned}\pi^{(i)}([t, \infty)) &= \bar{G}^{(i)}([t, \infty)) + \bar{A}^{(i)}(t), \\ \pi^{(i)}([t, \infty)) &= \bar{G}^{(i)}([t, \infty)) - \bar{G}_1^{(i)}([t, \infty)) + A^{(i)}(t) - B^{(i)}(t),\end{aligned}\tag{4.29}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{A}^{(i)}(t) &= \mathbb{E}\bar{H}^{(i)}(\bar{\zeta}^{(i)}, [t, \infty)), \\ A^{(i)}(t) &= \mathbb{E}H^{(i)}([t - \bar{\zeta}^{(i)}, \infty)), \quad B^{(i)}(t) = \mathbb{E}H^{(i)}([t - \bar{\zeta}_1^{(i)}, \infty)).\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести для $i = 1$. В силу результатов [1] справедливо представление

$$\pi^{(1)}([t, \infty)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X(\nu^{(2)}, n) \in [t, \infty) \times \{0\}, \min_{1 \leq m \leq n} X_1(\nu^{(2)}, m) > 0\right),$$

поэтому можно записать

$$\begin{aligned}\pi^{(1)}([t, \infty)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left(X(\nu^{(2)}, n) \in [t, \infty) \times \{0\}, \right. \\ &\quad \left. \min_{1 \leq m \leq n} X_1(\nu^{(2)}, m) > 0, \eta^{(1)}(\nu^{(2)}) = k\right).\end{aligned}$$

Меняя далее порядок суммирования, получаем (см. (4.27))

$$\begin{aligned}\pi^{(1)}([t, \infty)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(X(\nu^{(2)}, n) \in [t, \infty) \times \{0\}, \right. \\ &\quad \left. \min_{1 \leq m \leq n} X_1(\nu^{(2)}, m) > 0, \eta^{(1)}(\nu^{(2)}) = k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}\left(X(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n-k) \in [t, \infty) \times \{0\}, \right. \\ &\quad \left. \min_{0 \leq m \leq n-k} X_1(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m) > 0, \eta^{(1)}(\nu^{(2)}) = k\right) \\ &= \sum_{n-k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n-k) \in [t, \infty) \times \{0\}, \right. \\ &\quad \left. \min_{0 \leq m \leq n-k} X_1(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m) > 0\right).\end{aligned}$$

Поскольку $\bar{\zeta}^{(1)} > 0$, то справедливо

$$\pi^{(1)}([t, \infty)) = \sum_{n-k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n-k) \in [t, \infty) \times \{0\}, \min_{1 \leq m \leq n-k} X_1(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m) > 0\right).$$

Заменяя индекс суммирования $n-k$ на n и выделяя первое слагаемое, получаем

$$\pi^{(1)}([t, \infty)) = \bar{G}^{(1)}([t, \infty)) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n) \in [t, \infty) \times \{0\}, \min_{1 \leq m \leq n} X_1(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m) > 0\right).$$

Заметим, что на множестве $\{\min_{1 \leq m \leq n} X_1(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m) > 0\}$ при $1 \leq m \leq n$ цепи $X(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m)$, $X^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m)$ совпадают по распределению, поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n) \in [t, \infty) \times \{0\}, \min_{1 \leq m \leq n} X_1(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m) > 0\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n) \in [t, \infty) \times \{0\}, \min_{1 \leq m \leq n} X_1^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m) > 0\right) \\ &= \bar{A}^{(1)}(t). \end{aligned}$$

Формула (4.29) доказана. При этом

$$\begin{aligned} \bar{A}^{(1)}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n) \in [t, \infty) \times \{0\}) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(X^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n) \in [t, \infty) \times \{0\}, \min_{1 \leq m \leq n} X_1^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), m) \leq 0\right) \\ &\equiv \tilde{A}^{(1)}(t) - \tilde{B}^{(1)}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, нам достаточно убедиться, что

$$\tilde{A}^{(1)}(t) = A^{(1)}(t), \quad \tilde{B}^{(1)}(t) = \bar{G}_1^{(1)}([t, \infty)) + B^{(1)}(t). \quad (4.30)$$

Для доказательства (4.30) заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{(1)}(0, n) \in [t, \infty) \times \{0\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X^{(1)}(0, n) \in [t, \infty) \times \{0\}, T_k^{(1)} = n).$$

Меняя порядок суммирования, получаем (функция $H^{(1)}(A)$ введена формулой (3.22))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{(1)}(0, n) \in [t, \infty) \times \{0\}) = H^{(1)}([t, \infty)).$$

Поэтому если случайный вектор $\nu = (\nu_1, 0)$ определяет начальное положение цепи $X^{(1)}(\nu, n)$ (случайная величина ν_1 не зависит от цепи $X^{(1)}(0, n)$), то

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X^{(1)}(\nu, n) \in [t, \infty) \times \{0\}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X^{(1)}(0, n) \in [t - \nu_1, \infty) \times \{0\}) = \mathbf{E}H^{(1)}([t - \nu_1, \infty)). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Для доказательства первого равенства в (4.30) достаточно воспользоваться формулой (4.31) для $\nu = \bar{\zeta}^{(1)}\omega(1)$ (см. также (4.27)).

Для доказательства второго равенства в (4.30) заметим, что (см. (4.28))

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{(1)}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n) \in [t, \infty) \times \{0\}, \tau^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1)) = k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\bar{X}^{(1)}(0, n - k) + \bar{\zeta}_1^{(1)}\omega(1) \in [t, \infty) \times \{0\}, \tau^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1)) = k), \end{aligned}$$

где цепь $\bar{X}^{(1)}(0, n - k)$ не зависит от случайных величин $\bar{\zeta}_1^{(1)}\omega(1)$, $\tau^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1))$ и по распределению совпадает с цепью $X^{(1)}(0, n - k)$. Меняя далее порядок суммирования, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{(1)}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(\bar{X}^{(1)}(0, n - k) + \bar{\zeta}_1^{(1)}\omega(1) \in [t, \infty) \times \{0\}, \tau^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1)) = k) \\ &= \sum_{n-k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\bar{X}^{(1)}(0, n - k) + \bar{\zeta}_1^{(1)}\omega(1) \in [t, \infty) \times \{0\}) \\ &= \mathbf{P}(\bar{X}^{(1)}(0, 0) + \bar{\zeta}_1^{(1)}\omega(1) \in [t, \infty) \times \{0\}) \\ &\quad + \sum_{n-k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\bar{X}^{(1)}(0, n - k) + \bar{\zeta}_1^{(1)}\omega(1) \in [t, \infty) \times \{0\}) \\ &= \bar{G}_1^{(1)}([t, \infty)) + \sum_{n-k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\bar{X}^{(1)}(0, n - k) + \bar{\zeta}_1^{(1)}\omega(1) \in [t, \infty) \times \{0\}). \end{aligned}$$

Применяя далее формулу (4.31), получаем второе равенство в (4.30). Лемма 4.11 доказана.

ЛЕММА 4.12. I. Если случайная величина ζ удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(\zeta \geq t) \leq e^{-t\gamma(1+o(1))}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.32)$$

и при этом $\alpha^{(i)} < \gamma$, то

$$\mathbf{E}H^{(i)}([t - \zeta]) = C^{(+i)}t^{-r(i)}a^{(i)}e^{-t\alpha^{(i)}}(1 + o(1)),$$

где константы $C^{(+i)}$, $r(i)$ из леммы 4.10,

$$a^{(i)} = \mathbf{E}e^{\alpha^{(i)}\zeta}.$$

II. Если случайная величина ζ удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(\zeta \geq t) = t^{-3/2}e^{-tD(\omega(i))}(C + o(1)), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.33)$$

и при этом $\alpha^{(i)} = D(\omega(i))$, $r(i) = 3/2$, $C \geq 0$, то

$$\mathbf{E}H^{(i)}([t - \zeta]) = t^{-3/2}(C^{(+i)}a^{(i)} + b^{(i)})e^{-t\alpha^{(i)}}(1 + o(1)),$$

где константа $C^{(+i)}$ из леммы 4.10,

$$a^{(i)} = \mathbf{E}e^{\alpha^{(i)}\zeta}, \quad b^{(i)} = C\alpha^{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{u\alpha^{(i)}} H^{(i)}([u, \infty)) du.$$

III. Если случайная величина $\zeta > 0$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(\zeta \geq t) = Ct^{-r}e^{-t\gamma}(1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.34)$$

и при этом $0 < \gamma < \alpha^{(i)}$, $r \in \{0, 3/2\}$, $C \geq 0$, то

$$\mathbf{E}\overline{H}^{(i)}(\zeta, [t, \infty)) = \mathbf{E}H^{(i)}([t - \zeta, \infty))(1 + o(1)) = t^{-r}e^{-t\gamma}(c^{(i)} + o(1)),$$

где

$$c^{(i)} = C\gamma \int_{-\infty}^{\infty} e^{u\gamma} H^{(i)}([u, \infty)) du.$$

Доказательство леммы 4.12 представляет из себя последовательность стандартных рассуждений, основанных на применении формулы *интегрирования по частям*. Поэтому мы его опускаем.

В п. 3.2 мы ввели (см. (3.6)) функцию восстановления $H_G(y, B)$ с “запрещенным множеством” G . Для $G = \Gamma$, $B = \Delta(x)$ получаем

$$H_\Gamma(y, \Delta(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X(y, n) \in \Delta(x), \eta(y) \geq n),$$

где, как и ранее, $\eta(y) = \min\{\eta^{(1)}(y), \eta^{(2)}(y)\}$ есть момент первого прихода на границу Γ цепи $X(y, n)$.

ЛЕММА 4.13. I.

$$H_{\Gamma}(y, \Delta(x)) = \frac{\Delta^2}{|x-y|^{1/2}} e^{-D(x-y)} \left(C\left(\frac{y}{|x-y|}, \frac{x}{|x-y|}\right) + \varepsilon(x, y, \Delta) \right),$$

где функция $C(u, v) \geq 0$ непрерывна и равномерно ограничена для всех $(u, v) \in \mathbb{R}^{2+} \times \mathbb{R}^{2+}$, причем положительна для всех пар (u, v) , которые не лежат одновременно на одной из полуосей $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$;

$$\lim_{\Delta \rightarrow \infty} \limsup_{|x-y| \rightarrow \infty} |\varepsilon(x, y, \Delta)| = 0.$$

II. Пусть $i \in \{1, 2\}$. Пусть случайный вектор $\bar{\xi}^{(i)} \in (\mathbb{R}^{2+})$ удовлетворяет условию: для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_{\lambda \in U_{\delta}(\mu(\omega(i))) \cup U_{\delta}(\bar{\mu}(\omega(i)))} \mathbb{E} e^{\langle \lambda, \bar{\xi} \rangle} < \infty, \quad (4.35)$$

где вектор $\bar{\mu}(\omega(i))$ определен перед формулировкой условия $(\bar{M}^+)$. Пусть $x \in (\mathbb{R}^{2+})$, $x/|x| \rightarrow \omega(i)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда

$$H_{\Gamma}(\bar{\xi}^{(i)}, \Delta(x)) = \frac{\Delta^2}{|x|^{3/2}} e^{-D(x)} (\bar{C}^{(i)} + \varepsilon^{(i)}(x, \Delta)),$$

где $\bar{C}^{(i)} > 0$,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |\varepsilon^{(i)}(x, \Delta)| = 0.$$

III. Пусть случайный вектор $\bar{\xi} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1+}$ удовлетворяет условию (4.35). Пусть $x \in (\mathbb{R}^{2+})$, $x/|x| \rightarrow \omega(1)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(X^{(1)}(\bar{\xi}, n) \in \Delta(x), \min_{0 \leq m \leq n} X_2^{(1)}(\bar{\xi}, n) > 0 \right) = \frac{\Delta^2}{|x|^{3/2}} e^{-D(x)} (\bar{C} + \varepsilon(x, \Delta)),$$

где $\bar{C} > 0$,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |\varepsilon(x, \Delta)| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.13. Утверждение части (I) леммы 4.13 следует непосредственно из результатов работ [7], [8]. Утверждения частей (II), (III) леммы 4.13 можно получить, повторяя доказательства леммы 9.1 (III) и теоремы 7.1 работы [36] (см. также [35]). Отметим еще, что в работах [35], [36] рассмотрен только нерешетчатый, наиболее трудный случай (в обозначениях настоящей работы случай, соответствующий условию (A)); как отмечено в [35], более простой решетчатый случай исследуется аналогичным образом, и все результаты работ [35], [36] верны и для решетчатого случая тоже. Лемма 4.13 доказана.

Приведем теперь условия, при которых случайные величины $\bar{\zeta}^{(i)}$, $\bar{\zeta}_1^{(i)}$ удовлетворяют условиям (4.32)–(4.34) из леммы 4.12.

ЛЕММА 4.14. Для $i = 1, 2$

- I. случайные величины $\bar{\zeta}^{(i)}$, $\bar{\zeta}_1^{(i)}$ всегда удовлетворяют условию (4.32), где $\gamma = \gamma^{(i)}$;
- II. если $\lambda^{(i^*)} > \mu_{i^*}(\omega(i))$, то величины $\bar{\zeta}^{(i)}$, $\bar{\zeta}_1^{(i)}$ удовлетворяют условию (4.33), где $C > 0$;
- III. если $\lambda^{(i^*)} < \mu_{i^*}(\omega(i))$ и

$$\pi^{(i^*)}([t, \infty)) = C^{(i^*)} t^{-r(i^*)} e^{-t\lambda^{(i^*)}} (1 + o(1)), \quad C^{(i^*)} > 0, \quad (4.36)$$

то величина $\bar{\zeta}^{(i)}$ удовлетворяет условию (4.34), где $\gamma = \gamma^{(i)}$, $r = r(i^*)$, $C > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.14 достаточно провести для $i = 1$.

I. В силу теоремы 3.1 несобственный случайный вектор $\nu^{(2)}$ удовлетворяет условию (4.32), где $\gamma = \lambda^{(2)}$. Используя стандартные рассуждения, которые применялись при отыскании грубой асимптотики (см., например, доказательство теоремы 3.1), можно показать, что и случайная величина $\bar{\zeta}^{(1)}$ удовлетворяет условию (4.32), где $\gamma = \gamma^{(1)}$.

Обозначим

$$\tau_0^{(1)} = \inf \{n \geq 1 : X_1^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n) \geq 0\}$$

момент первого прихода цепи $X_1^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), n)$ в полуплоскость $\{x_1 \leq 0\}$. Те же рассуждения позволяют утверждать, что случайная величина

$$\tilde{\zeta}^{(1)} = X_2^{(1)}(\bar{\zeta}^{(1)}\omega(1), \tau_0^{(1)}) \bar{I}_{\{\tau_0^{(1)} < \infty\}}$$

удовлетворяет условию (4.32), где $\gamma = \lambda^{(2)}$. Поэтому те же рассуждения позволяют утверждать, что случайная величина

$$\tilde{\zeta}_1^{(1)} = X_1^{(1)}(\tilde{\zeta}^{(1)}\omega(2), \eta^{(i^*)}(\tilde{\zeta}^{(1)}\omega(2))) \bar{I}_{\{\eta^{(i^*)}(\tilde{\zeta}^{(1)}\omega(2)) < \infty\}}$$

удовлетворяет условию (4.32), где $\gamma = \gamma^{(1)}$. Поскольку

$$P(\bar{\zeta}_1^{(1)} \geq t) \leq P(\tilde{\zeta}_1^{(1)} \geq t),$$

то и случайная величина $\bar{\zeta}_1^{(1)}$ удовлетворяет условию (4.32), где $\gamma = \gamma^{(1)}$. Часть I леммы 4.14 доказана.

II. Поскольку $\lambda^{(2)} > \mu_2(\omega(1))$, то в силу условия $(\bar{M}^+)$ и теоремы 3.1 случайный вектор

$$\bar{\xi} = \nu^{(2)}\omega(2) + X(\nu^{(2)}\omega(2), 1) \bar{I}_{\{X_1(\nu^{(2)}\omega(2), 1) > 0\}}$$

удовлетворяет условию (4.35) Поэтому в силу леммы 4.13 (II) случайная величина

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}^{(1)} &= X_1(\nu^{(2)}\omega(2), \eta^{(1)}(\nu^{(2)}\omega(2))) \bar{I}_{\{\eta^{(2)}(\nu^{(2)}\omega(2)) > \eta^{(1)}(\nu^{(2)}\omega(2))\}} \\ &= X_1(\bar{\xi}, \eta^{(1)}(\bar{\xi})) \bar{I}_{\{\eta^{(2)}(\bar{\xi}) > \eta^{(1)}(\bar{\xi})\}} + \bar{\xi}_1 \bar{I}_{\{\bar{\xi}_2 = 0\}} \end{aligned}$$

удовлетворяет условию (4.33).

Как мы уже отмечали, случайная величина $\tilde{\zeta}^{(1)}$ удовлетворяет условию (4.32), где $\gamma = \lambda^{(2)}$. Поэтому случайный вектор

$$\tilde{\xi} = X^{(1)}(\tilde{\zeta}^{(1)}, \tau_0^{(1)})$$

удовлетворяет условию (4.35). Применяя вновь лемму 4.13 (III), получаем, что случайная величина

$$\tilde{\zeta}_1^{(1)} = X_1^{(1)}(\tilde{\xi}, \eta^{(1)}(\tilde{\xi})) \bar{T}_{\{\eta^{(1)}(\tilde{\xi}) < \infty\}}$$

удовлетворяет условию (4.33). Часть II леммы 4.14 доказана.

III. Пусть $\lambda^{(2)} < \mu_2(\omega(1))$. В силу леммы 4.13 из условия (4.36) с помощью стандартных рассуждений можно вывести, что случайная величина $\tilde{\zeta}^{(1)}$ удовлетворяет условию (4.34) для $\gamma = \gamma^{(1)}$, $r = r(2)$, $C > 0$. Часть III леммы 4.14 доказана. Лемма 4.14 доказана.

С помощью лемм 4.10–4.14 проведем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3. I. В силу леммы 4.11 изучаемую вероятность для $i = 1, 2$ можно представить в виде

$$\pi^{(i)}([t, \infty)) = \bar{G}^{(1)}([t, \infty)) - \bar{G}_1^{(1)}([t, \infty)) + A^{(i)}(t) - B^{(i)}(t).$$

Пусть $\varkappa(i) = 0$. Тогда в силу леммы 4.14 (I) случайные величины $\tilde{\zeta}^{(i)}, \tilde{\zeta}_1^{(i)}$ удовлетворяют условию (4.32), где $\gamma = \gamma^{(i)}$. Поэтому в силу леммы 4.12 (I) известна асимптотика слагаемого $A^{(i)}(t) - B^{(i)}(t)$:

$$A^{(i)}(t) - B^{(i)}(t) = C^{(+i)} e^{-t\alpha^{(i)}} (a^{(i)} + o(1)), \quad (4.37)$$

где

$$a^{(i)} = \mathbb{E} e^{\alpha^{(1)} \tilde{\zeta}^{(i)}} - \mathbb{E} e^{\alpha^{(1)} \tilde{\zeta}_1^{(i)}}.$$

Убедимся, что $a^{(i)} > 0$. Это достаточно сделать для $i = 1$.

Наряду со случайной величиной $\zeta^{(1)} = X_1^{(1)}(\tau^{(1)})$ введем случайную величину

$$\tilde{\zeta}^{(1)} = \min_{1 \leq m \leq \tau^{(1)}} X_1^{(1)}(0, m).$$

Пусть пары $(\zeta^{(1)}(k), \tilde{\zeta}^{(1)}(k))$ независимы при $k = 1, 2, \dots$ и распределены, как пара $(\zeta^{(1)}, \tilde{\zeta}^{(1)})$. Введем случайную величину

$$\varkappa^{(1)}(y) = \inf \{k \geq 1 : Z_{k-1}^{(1)} + \tilde{\zeta}^{(1)}(k) \leq -y\},$$

где $Z_0^{(1)} = 0, \dots, Z_{k+1}^{(1)} = Z_k^{(1)} + \zeta^{(1)}(k)$. Тогда очевидно, что

$$\bar{G}_1^{(1)}(A) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_{\varkappa^{(1)}(y)}^{(1)} + y \in A) \bar{G}^{(1)}(dy).$$

Поэтому

$$a^{(1)} = \int_0^\infty e^{\alpha^{(1)}y} (1 - \mathbb{E}(e^{\alpha^{(1)}Z_{\varkappa^{(1)}(y)}^{(1)}}; \varkappa^{(1)}(y) < \infty)) \overline{G}^{(1)}(dy). \quad (4.38)$$

Сделаем абсолютно непрерывную замену меры, положив

$$\tilde{\mathbb{P}}(\zeta^{(1)} \in A, \tilde{\zeta}^{(1)} \in B) = \frac{1}{\mathbb{E}e^{\alpha^{(1)}\zeta^{(1)}}} \mathbb{E}(e^{\alpha^{(1)}\zeta^{(1)}}; \zeta^{(1)} \in A, \tilde{\zeta}^{(1)} \in B).$$

В рассматриваемом случае $\mathbb{E}e^{\alpha^{(1)}\zeta^{(1)}} = 1$, поэтому формулу (4.38) можно переписать в виде

$$a^{(1)} = \int_0^\infty e^{\alpha^{(1)}y} (1 - \tilde{\mathbb{P}}(\varkappa^{(1)}(y) < \infty)) \overline{G}^{(1)}(dy).$$

Заметим далее, что $\tilde{\mathbb{E}}\zeta^{(1)} > 0$, поэтому в силу усиленного закона больших чисел

$$Z^{(1)} \equiv \inf_{1 \leq k < \infty} \{Z^{(1)}(k-1) + \tilde{\zeta}^{(1)}(k)\} > -\infty$$

с вероятностью 1. Поэтому для всех достаточно больших y

$$\tilde{\mathbb{P}}(\varkappa^{(1)}(y) < \infty) = \tilde{\mathbb{P}}(Z^{(1)} > -y) < 1.$$

Из последнего следует, что константа $a^{(1)}$ в (4.37) положительна.

При этом выполняется

$$\overline{G}^{(1)}([t, \infty)) - \overline{G}_1^{(1)}([t, \infty)) = o(1)e^{-t\alpha^{(1)}}.$$

Таким образом, для $\varkappa(i) = 0$ мы нашли асимптотику вероятности $\pi^{(i)}([t, \infty))$, $i = 1, 2$, в виде

$$\pi^{(i)}([t, \infty)) = e^{-t\alpha^{(1)}}(C^{(i)} + o(1)), \quad C^{(i)} > 0.$$

Пусть теперь $\varkappa(i) = 3/2$. Тогда в силу леммы 4.14(II) случайные величины $\zeta^{(i)}$, $\zeta_1^{(i)}$ удовлетворяют условию (4.33), и нам известна асимптотика слагаемых $\overline{G}^{(1)}([t, \infty)) - \overline{G}_1^{(1)}([t, \infty))$; в силу леммы 4.14(II), (III) нам известна асимптотика слагаемых $A^{(i)}(t)$, $B^{(i)}(t)$. Таким образом, для случая $\varkappa(i) = 3/2$ мы нашли асимптотику вероятности $\pi^{(i)}([t, \infty))$, $i = 1, 2$, в виде

$$\pi^{(i)}([t, \infty)) = \frac{1}{t^{3/2}} e^{-t\alpha^{(1)}}(C^{(i)} + o(1)), \quad (4.39)$$

и нам осталось убедиться, что $C^{(i)} > 0$. В силу результатов [4] справедлива формула

$$\begin{aligned} \pi^{(i)}([t, t + \Delta)) &= \int_{\Gamma} \int_{(\mathbb{R}^{2+})} H_{\Gamma}(y, dz) \mathbb{P}(X(z, 1) \in \Delta(t\omega(i)) \cap \Gamma) \pi(dy) \\ &\geq \pi(\{0\}) \int_{(\mathbb{R}^{2+})} H_{\Gamma}(0, dz) \mathbb{P}(X(z, 1) \in \Delta(t\omega(i)) \cap \Gamma) \pi(dy). \end{aligned}$$

Поскольку непосредственно из леммы 4.13 (II) следует, что правая часть последнего неравенства не меньше чем

$$\frac{C}{t^{3/2}} e^{-tD(\omega^{(i)})} (1 + o(1)), \quad C > 0,$$

то положительность константы $C^{(i)}$ в (4.39) установлена.

Пусть теперь $\varkappa(i^*) = 0$, $\alpha^{(i)} > \gamma^{(i)}$. Тогда в силу леммы 4.11 изучаемую вероятность для $i = 1, 2$ можно представить в виде

$$\pi^{(i)}([t, \infty)) = \overline{G}^{(1)}([t, \infty)) + \overline{A}^{(i)}(t).$$

В этом случае нам известна асимптотика $\pi^{(i^*)}([t, \infty))$, и в силу леммы 4.14 (III) случайная величина $\overline{\zeta}^{(i)}$ удовлетворяет условию (4.34), где $\gamma = \gamma^{(i)}$, $r = r(i^*) = 0$. Поэтому: нам известна асимптотика слагаемого $\overline{G}^{(1)}([t, \infty))$; в силу леммы 4.14 (III) нам известна асимптотика слагаемого $\overline{A}^{(i)}(t)$. Таким образом, в случае $\varkappa(i^*) = 0$, $\alpha^{(i)} > \gamma^{(i)}$ асимптотика вероятности $\pi^{(i)}([t, \infty))$ для $i = 1, 2$ найдена в виде

$$\pi^{(i)}([t, \infty)) = e^{-t\gamma^{(1)}} (C^{(i)} + o(1)),$$

где положительность константы $C^{(i)}$ следует из лемм 4.13 (I), 4.14 (III).

Поскольку случай $\varkappa(i^*) = 3/2$, $\alpha^{(i)} > \gamma^{(i)}$ исследуется совершенно аналогично предыдущему, то часть I теоремы 3.3 доказана.

II. Для доказательства части II теоремы 3.3 воспользуемся формулой (см. [4])

$$\begin{aligned} \pi(\Delta(x)) &= \pi_1(\Delta(x)) + \pi_2(\Delta(x)) + \pi_3(\Delta(x)) \\ &\equiv H_\Gamma(\nu^{(1)}, \Delta(x)) + H_\Gamma(\nu^{(2)}, \Delta(x)) + \pi(\{0\})H_\Gamma(0, \Delta(x)), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где $x \in (\mathbb{R}^{2+})$, $\Delta > 0$. Применяя к (4.40) лемму 4.13 и уже доказанную часть I теоремы 3.3, получаем доказательство части II теоремы 3.3. Теорема 3.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.4. Как мы уже отмечали в п. 3.3, оценки сверху в теореме 3.4 следуют из утверждения II леммы 5.10.

Для получения оценок снизу в утверждениях теоремы 3.4 следует в представлениях, которые мы использовали для нахождения $\pi^{(1)}([t, \infty))$, $\pi^{(2)}([t, \infty))$, $\pi(\Delta(x))$, вместо функций восстановления взять “неполные” функции восстановления, в которых суммирование ведется до уровня N . Тогда полученные выражения при подходящем выборе этого N окажутся оценками снизу для $P(X(0, n) \in \Delta(x))$. Выбирая далее уровень $N \geq C|x|$ (и, следовательно, параметр $n \geq (T^{(0)} + \delta)|x|$) достаточно большим, мы добиваемся того, что асимптотики “неполных” и “полных” функций восстановления совпадут. Для этих n оценка снизу для вероятности $P(X(0, n) \in \Delta(x))$ асимптотически совпадет с оценкой сверху. Теорема 3.4 доказана.

§ 5. Приложение

5.1. В этом пункте мы считаем, что случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ определен в $\mathbb{R}^d$ при произвольном $d \geq 1$. Ему отвечают преобразование Лапласа и функция уклонений $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}e^{\langle \lambda, \xi \rangle}$ и $\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\langle \lambda, \alpha \rangle - \ln \varphi(\lambda)\}$ соответственно. Обозначим, как и прежде, $\Phi = \{\lambda : \varphi(\lambda) < \infty\}$. Для $p > 0$ положим $\Lambda_p(\alpha) = p\Lambda(\alpha/p)$, $\Phi(\alpha) = \sup_{\lambda \in \Phi} \langle \lambda, \alpha \rangle$.

ЛЕММА 5.1. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}^d$ существует предел

$$\Lambda_0(\alpha) \equiv \lim_{p \downarrow 0} \Lambda_p(\alpha) = \Phi(\alpha). \quad (5.1)$$

Отметим, что для функции $D(\alpha) = \inf_{p > 0} \Lambda_p(\alpha)$ в [16] получено представление

$$D(\alpha) = \sup_{\lambda \in \Phi_1} \langle \lambda, \alpha \rangle, \quad \Phi_1 = \{\lambda : \varphi(\lambda) \leq 1\}.$$

Лемма 5.1 показывает, что такое же представление при замене Φ_1 на Φ справедливо для $\Lambda_0(\alpha)$. Отсюда следует, в частности, что $\inf_{p > 0} \Lambda_p(\alpha)$ достигается в точке $p = 0$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\alpha) = D(\alpha)$ (ср. с замечаниями в п. 1.4, связанными с соотношениями (1.12)), так что в случае $\Phi_1 = \Phi$ этот $\inf$ достигается в точке $p = 0$ при любом α .

Формула (5.1) для безгранично делимых распределений с преобразованием Лапласа $\varphi(\lambda) = e^{(g(\lambda) - g(0))}$, где $g(\lambda)$ – преобразование Лапласа соответствующей спектральной меры, приведена в работе [20] (формула (2.29)). Однако доказательство этой формулы в [20] использует неравенство $\Lambda_p(\alpha) \leq \Phi(\alpha)$, которое не всегда справедливо. Скажем, если $d = 1$ и функция $g(\lambda)$ есть преобразование Лапласа над распределением случайной величины η с ненулевым математическим ожиданием $\mathbb{E}\eta \neq 0$, конечное в некотором конечном интервале (λ_-, λ_+) , содержащем 0, и бесконечное вне него, то $\Lambda_p(0) > 0$ при $p > 0$, в то время как $\Lambda_0(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1. Для любого $\lambda \in \Phi$ выполняется $\Lambda_p(\alpha) \geq \langle \lambda, \alpha \rangle - p \ln \varphi(\lambda)$, поэтому $\Lambda_{0-}(\alpha) \equiv \liminf_{p \downarrow 0} \Lambda_p(\alpha) \geq \langle \lambda, \alpha \rangle$. Отсюда получаем $\Lambda_{0-}(\alpha) \geq \sup_{\lambda \in \Phi} \langle \lambda, \alpha \rangle = \Phi(\alpha)$. Пусть $\alpha_0 \in \mathbb{R}^d$ таково, что $\Lambda(\alpha_0) < \infty$. Для этого α_0 и любых $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}^d$ справедливо

$$\langle \lambda, \alpha \rangle - \ln \varphi(\lambda) \leq \langle \lambda, \alpha - \alpha_0 \rangle + (\langle \lambda, \alpha_0 \rangle - \ln \varphi(\lambda)) \leq \Phi(\alpha - \alpha_0) + \Lambda(\alpha_0).$$

Стало быть, умножая левую и правую части последнего неравенства на p и подставляя α/p вместо α , получаем

$$p \left(\left\langle \lambda, \frac{\alpha}{p} \right\rangle - \ln \varphi(\lambda) \right) \leq p \Phi \left(\frac{\alpha}{p} - \alpha_0 \right) + p \Lambda(\alpha_0) = \Phi(\alpha - p\alpha_0) + p \Lambda(\alpha_0).$$

Максимизируя левую часть последнего неравенства по λ , получаем неравенство

$$\Lambda_p(\alpha) \leq \Phi(\alpha - p\alpha_0) + p \Lambda(\alpha_0). \quad (5.2)$$

Устремляя далее $p \downarrow 0$, получаем из (5.2) $\Lambda_{0+}(\alpha) \equiv \limsup_{p \downarrow 0} \Lambda_p(\alpha) \leq \Phi(\alpha)$. Лемма 5.1 доказана.

5.2. Пусть $\xi, \xi(1), \xi(2), \dots$ есть последовательность независимых одинаково распределенных в $\mathbb{R}^d$ случайных векторов,

$$S(n) = (S_1(n), \dots, S_d(n)) = \xi(1) + \dots + \xi(n).$$

В настоящем пункте сохраним все обозначения предыдущего пункта. Мы будем изучать вероятность $P(S(n) \in \Delta(x))$, где, как и ранее,

$$\Delta(x) = \{y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d : x_i \leq y_i < x_i + \Delta, i = 1, \dots, d\}$$

есть куб в $\mathbb{R}^d$ со стороной Δ и вершиной в точке x . При этом будем считать, что параметры $n = n(s) \in \{1, 2, \dots\}$ и $x = x(s) \in \mathbb{R}^d$ являются функциями от вещественной переменной $s > 0$ и при $s \rightarrow \infty$ выполнены соотношения $x/s \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}^d, n/s \rightarrow T \geq 0$.

Определим выпуклые множества

$$\Lambda = \{\alpha : \Lambda(\alpha) < \infty\}, \quad \Lambda_0 = \{\alpha : \Lambda_0(\alpha) < \infty\},$$

где, напомним, $\Lambda(\alpha)$ есть функция уклонений, отвечающая случайному вектору ξ (его распределению F), а функция $\Lambda_0(\alpha)$ введена в предыдущем пункте. Внутренность и границу множества B обозначим (B) и ∂B соответственно. Поскольку множество Λ является выпуклой оболочкой носителя меры F (см., например, [15]), то условие “множество (Λ) не пусто” эквивалентно следующему условию невырожденности в $\mathbb{R}^d$ случайного вектора ξ : для любых $\lambda \in \mathbb{R}^d, |\lambda| = 1, c \in \mathbb{R}^1$ выполняется $P(\langle \lambda, \xi \rangle = c) < 1$. Рассмотрим еще два условия на распределение F случайного вектора ξ .

(F₁) Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^d, \lambda \neq 0$, выполняется неравенство

$$|Ee^{i\langle \lambda, \xi \rangle}| < 1.$$

(F₂) Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ принимает значения в пространстве $\mathbb{Z}^d$ и для любого вектора $b \in \mathbb{Z}^d$ такого, что $P(\xi = b) > 0$, группа, порожденная множеством $\{a \in \mathbb{Z}^d : P(\xi = a + b) > 0\}$, совпадает с $\mathbb{Z}^d$.

ЛЕММА 5.2. Пусть множество (Λ) не пусто и содержит точку 0. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ и функция $x = x(s) \in \mathbb{R}^d$ таковы, что $\lim_{s \rightarrow \infty} x/s = \alpha$. Тогда существуют число $\Delta_0 \geq 0$, зависящее только от распределения F , и функция $t = t(s) > 0, t(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, такие, что для функции $n = n(s) \in \{1, 2, \dots\}$, удовлетворяющей соотношениям $\lim_{s \rightarrow \infty} n(s) = \infty, \lim_{s \rightarrow \infty} n(s)/s = T$, и для любого $\Delta > \Delta_0$ справедливо

1) если $T > 0$, то

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(S(n) \in \Delta(x)) \leq -T \Lambda\left(\frac{\alpha}{T}\right); \quad (5.3)$$

2) если $T = 0$ и $n/s \geq t(s)$, то

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P(S(n) \in \Delta(x)) \leq -\Lambda_0(\alpha); \quad (5.4)$$

3) если $T > 0$ и либо $\alpha \notin \partial\Lambda$, либо $n/s \geq t(s) + T$, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) = -T\Lambda\left(\frac{\alpha}{T}\right); \quad (5.5)$$

4) если $T = 0$, $n/s \geq t(s)$ и $\alpha \notin \partial\Lambda_0$, то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)) = -\Lambda_0(\alpha).$$

При этом можно выбрать любое $\Delta > 0$, если выполнено условие (F₁), и положить $\Delta = 1$, если выполнено условие (F₂).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Утверждения (5.3), (5.4) и та часть утверждения (5.5), в которой отсутствует ограничение снизу на скорость сходимости отношения n/s к T , доказаны в теореме 2 в [14]. Утверждение (5.4) следует из леммы 5.3, которая сформулирована и доказана в п. 5.3. Все остальные утверждения доказываемой леммы могут быть выведены из уже доказанных утверждений с помощью стандартных рассуждений, основанных на определении понятия предела. Лемма 5.2 доказана.

5.3. В настоящем пункте мы будем изучать вероятности $\mathbf{P}\left(\frac{1}{s}S(n) \in U_\varepsilon(\alpha)\right)$, где $U_\varepsilon(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{R}^d : |\alpha - \beta| < \varepsilon\}$ есть ε -окрестность точки α в $\mathbb{R}^d$ для случая $n/s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 5.3. Для любых $K < \infty$, $\delta > 0$, $R < \infty$ найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $|\alpha| \leq K$, любого $n \in \{1, 2, \dots\}$, $n \rightarrow \infty$, $n/s \rightarrow 0$, выполняется

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{s}S(n) \in U_\varepsilon(\alpha)\right) \leq \delta - \min\{\Lambda_0(\alpha), R\}. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$, $R < \infty$ выберем $\lambda_0 \in \Phi$ такое, что $\langle \lambda_0, \alpha \rangle + \delta \geq \min\{\Lambda_0(\alpha), R\}$. Выберем далее $\varepsilon = \delta/|\lambda_0|$; обозначим $\Lambda_T(\alpha) = T\Lambda(\alpha/T)$, $T = n/s$, и пусть $[U_\varepsilon(\alpha)]$ есть замыкание $U_\varepsilon(\alpha)$. Тогда в силу неравенства Чебышёва верно

$$\frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S(n)}{s} \in U_\varepsilon(\alpha)\right) \leq - \inf_{\alpha' \in [U_\varepsilon(\alpha)]} \Lambda_T(\alpha').$$

В силу полунепрерывности снизу функции Λ_T для любого s найдется $\beta = \beta(s) \in [U_\varepsilon(\alpha)]$ такое, что

$$\inf_{\alpha' \in [U_\varepsilon(\alpha)]} \Lambda_T(\alpha') = \Lambda_T(\beta).$$

Заметим далее, что $\Lambda_T(\beta) \geq \langle \lambda_0, \beta \rangle - T \ln \varphi(\lambda_0)$. Поэтому справедливо

$$L_+ \equiv \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P}\left(\frac{S(n)}{s} \in U_\varepsilon(\alpha)\right) \leq - \liminf_{s \rightarrow \infty} \langle \lambda_0, \beta(s) \rangle.$$

Для любого $\beta \in [U_\varepsilon(\alpha)]$ верно

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0, \beta \rangle &\geq \inf_{\alpha' \in [U_\varepsilon(\alpha)]} \langle \lambda_0, \alpha' \rangle = \langle \lambda_0, \alpha \rangle - \varepsilon \left\langle \lambda_0, \frac{\lambda_0}{|\lambda_0|} \right\rangle \\ &\geq \langle \lambda_0, \alpha \rangle - \delta \geq \min\{\Lambda_0(\alpha), R\} + 2\delta. \end{aligned}$$

Поэтому $L_+ \leq 2\delta - \min\{\Lambda_0(\alpha), R\}$. Таким образом, мы доказали, что для любых $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $R < \infty$, $\delta > 0$ найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha) > 0$ такое, что

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{S(n)}{s} \in U_{\varepsilon_0}(\alpha)\right) \leq 2\delta - \min\{\Lambda_0(\alpha), R\}.$$

Далее, в силу непрерывности снизу функции Λ_0 для любых $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$ найдется $\varepsilon(\alpha) \in (0, \varepsilon_0(\alpha)]$ такое, что для $\alpha' \in U_{\varepsilon(\alpha)}(\alpha)$ выполняется $\Lambda_0(\alpha') \leq \delta + \Lambda_0(\alpha)$. Мы построили открытое покрытие компакта $\{\alpha : |\alpha| \leq K\}$, из которого можно выбрать конечное подпокрытие $\alpha(1), \dots, \alpha(M)$. Пусть $\varepsilon^* = \min\{\varepsilon(\alpha(1)), \dots, \varepsilon(\alpha(M))\}$. Тогда для α , $|\alpha| \leq K$, и некоторого $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ выполняется

$$\begin{aligned} \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{S(n)}{s} \in U_{\varepsilon^*/2}(\alpha)\right) &\leq \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{S(n)}{s} \in U_{\varepsilon^*}(\alpha(i))\right) \\ &\leq \delta - \min\{\Lambda_0(\alpha(i)), R\} \leq 2\delta - \min\{\Lambda_0(\alpha), R\}. \end{aligned}$$

Оценка (5.6) получена. Лемма 5.3 доказана.

ЛЕММА 5.4. Для любых $K < \infty$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдется функция $n^* \in \{1, 2, \dots\}$, $n^* \rightarrow \infty$, $n^*/s \rightarrow 0$, такая, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $|\alpha| \leq K$, и любого $n \in \{1, 2, \dots\}$, $n \geq n^*$, $n/s \rightarrow 0$, выполняется

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{1}{s} S(n) \in U_{\varepsilon}(\alpha)\right) \geq \delta - \Lambda_0(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\Lambda_0(\alpha, \varepsilon/2) = \inf_{|\beta - \alpha| < \varepsilon/2} \Lambda_0(\beta).$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ и $\varepsilon > 0$ таковы, что $\Lambda_0(\alpha, \varepsilon/2) < \infty$. Тогда можно выбрать $\alpha' \in U_{\varepsilon/2}(\alpha)$ такое, что $\Lambda_0(\alpha') \leq \Lambda_0(\alpha, \varepsilon/2) + \delta$. Пусть далее $\varepsilon' > 0$ таково, что $U_{\varepsilon'}(\alpha') \subseteq U_{\varepsilon/2}(\alpha)$. Для $T > 0$ положим $n = [sT]$; тогда в силу оценок снизу в принципе больших уклонений для сумм $S(n)$ справедливо

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{1}{s} S(n) \in U_{\varepsilon'}(\alpha')\right) \geq -\Lambda_T(\alpha').$$

Поэтому найдется функция $n^* = n^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $n^* \rightarrow \infty$, $n^*/s \rightarrow 0$, такая, что для любой функции $n \in \{1, 2, \dots\}$, $n \geq n^*$, $n/s \rightarrow 0$, выполняется

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{1}{s} S(n) \in U_{\varepsilon'}(\alpha')\right) \geq -\Lambda_0(\alpha').$$

Таким образом, мы построили для любого $\alpha \in \mathbb{R}^d$ функцию $n^* = n^*(s) \in \{1, 2, \dots\}$, $n^* \rightarrow \infty$, $n^*/s \rightarrow 0$, такую, что для любой функции $n \in \{1, 2, \dots\}$, $n \geq n^*$, $n/s \rightarrow 0$, выполняется

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln P\left(\frac{1}{s} S(n) \in U_{\varepsilon/2}(\alpha)\right) \geq -\Lambda_0(\alpha, \varepsilon/2) + \delta;$$

если $\Lambda_0(\alpha, \varepsilon/2) = \infty$, то предыдущее соотношение верно для любой функции $n \in \{1, 2, \dots\}$, $n \rightarrow \infty$, $n/s \rightarrow 0$. Выберем теперь конечную $\varepsilon/2$ -сеть $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ в компакте $\{\alpha : |\alpha| \leq K\}$. Обозначим $n^* = \max_{1 \leq i \leq M} n_{\alpha_i}^*$. Для каждого α из компакта укажем α_i такое, что $|\alpha_i - \alpha| < \varepsilon/2$, так что

$$U_{\varepsilon/2}(\alpha_i) \subseteq U_{\varepsilon}(\alpha), \quad \Lambda_0(\alpha, \varepsilon/2) \leq \Lambda_0(\alpha_i).$$

Получили для $n \geq n^*$, $n/s \rightarrow 0$, неравенства

$$\begin{aligned} \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} S(n) \in U_{\varepsilon}(\alpha) \right) &\geq \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} S(n) \in U_{\varepsilon/2}(\alpha_i) \right) \\ &\geq -\delta - \Lambda_0(\alpha_i, \varepsilon/2) \geq -\delta - \Lambda_0(\alpha). \end{aligned}$$

Лемма 5.4 доказана.

5.4. Пусть $X(y, n)$, $n = 0, 1, \dots$, — однородная во времени цепь Маркова в $\mathbb{R}^d$. Обозначим приращение цепи в точке y как $\xi(y) = X(y, 1) - y$. Пусть

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(\lambda) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \mathbf{E} e^{\langle \lambda, \xi(y) \rangle}, \\ \overline{\Phi} &= \{\lambda : \overline{\varphi}(\lambda) < \infty\}, \quad \overline{\Lambda}_0(\alpha) = \sup_{\lambda \in \overline{\Phi}} \langle \lambda, \alpha \rangle. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.5. Для любых $K < \infty$, $\delta > 0$, $R < \infty$ найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}^d$, $|\alpha| \leq K$, и любого $n \in \{1, 2, \dots\}$, $n \rightarrow \infty$, $n/s \rightarrow 0$, выполняется

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \ln \mathbf{P} \left(\frac{1}{s} (X(y, n) - y) \in U_{\varepsilon}(\alpha) \right) \leq \delta - \min\{\overline{\Lambda}_0(\alpha), R\}.$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 5.3. Поэтому мы его опускаем.

5.5. В этом пункте $d = 2$, т.е. случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ принимает значения в $\mathbb{R}^2$. Пусть далее $S(n) = (S_1(n), S_2(n)) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$, где, как и ранее, слагаемые $\xi(1), \xi(2), \dots$ независимы и имеют общее с ξ распределение.

ЛЕММА 5.6. Для любых $\Delta > 0$, $n \geq 1$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_2 \geq 0$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $y_2 \leq -\Delta$, справедливо

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(S(n) \in \Delta(x), \min_{1 \leq k \leq n} S_2(k) \geq 0 \right) &\geq \frac{1}{n} \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(x)); \\ \mathbf{P} \left(S(n) \in \Delta(y), \min_{1 \leq k \leq n} \{S_2(k) - y_2\} \geq 0 \right) &\geq \frac{1}{n} \mathbf{P}(S(n) \in \Delta(y)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что дополнительно выполнено условие (F_2) , и вместо событий $\{S(n) \in \Delta(x)\}$ будем рассматривать события $\{S(n) = x\}$ для $x \in \mathbb{Z}^2$. Любому целому $k \in (-\infty, \infty)$ поставим в соответствие целое $m(k) = m(k, n) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ такое, что $k = rn + m(k)$.

Пусть $\mathbf{x} = (x(1), \dots, x(n)) \in (\mathbb{R}^2)^n$; определим оператор

$$T_k \mathbf{x} = (x(m(k) + 1), x(m(k + 1) + 1), \dots, x(m(k + n - 1) + 1)),$$

который для любого $-\infty < k < \infty$ переводит $(\mathbb{R}^2)^n$ в $(\mathbb{R}^2)^n$ и осуществляет циклическую перестановку координат каждого вектора. Введем далее два множества

$$A_n(x) = \{X(n) = x\}, \quad B_n(x) = \left\{X(n) = x, \min_{1 \leq k \leq n} X_2(k) \geq 0\right\},$$

где для $1 \leq m \leq n$ вектор $X(m) = (X_1(m), X_2(m)) = x(1) + \dots + x(m)$ есть частичная сумма координат вектора $\mathbf{x}$.

Рассмотрим случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi(1), \dots, \xi(n))$; тогда утверждение доказываемой леммы заключается в неравенстве

$$P(\vec{\xi} \in B_n(x)) \geq \frac{1}{n} P(\vec{\xi} \in A_n(x)), \quad x_2 \geq 0. \quad (5.7)$$

Для доказательства (5.7) воспользуемся соотношением

$$A_n(x) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1} T_k B_n(x), \quad x_2 \geq 0, \quad (5.8)$$

где $T_k B = \{T_k \mathbf{x} : \mathbf{x} \in B\}$. Действительно,

$$\begin{aligned} P(\vec{\xi} \in B_n(x)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(T_{-k} \vec{\xi} \in B_n(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(\vec{\xi} \in T_k B_n(x)) \\ &\geq \frac{1}{n} P\left(\vec{\xi} \in \bigcup_{k=0}^{n-1} T_k B_n(x)\right) \geq \frac{1}{n} P(\vec{\xi} \in A_n(x)). \end{aligned}$$

Неравенство (5.7) доказано.

Докажем (5.8). Для $\mathbf{x} \in A_n(x)$ введем функцию

$$k(\mathbf{x}) = \max \left\{ 1 \leq i \leq n : X(i) = \min_{1 \leq k \leq n} X(k) \right\}.$$

Тогда для $x_2 \geq 0$ справедливо $T_{k(\mathbf{x})+1} \mathbf{x} \in B_n(x)$. Обозначим $A_n^{(k)}(x) = \{\mathbf{x} \in A_n(x) : k(\mathbf{x}) = k\}$; тогда справедливо

$$T_{k+1} A_n^{(k)}(x) \subseteq B_n(x), \quad A_n^{(k)}(x) \subseteq T_{-k-1} B_n(x).$$

Поэтому получаем

$$A_n(x) = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_n^{(k)}(x) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1} T_{-k-1} B_n(x) = \bigcup_{k=0}^{n-1} T_k B_n(x).$$

Включение (5.8) доказано; первое утверждение леммы 5.6 в решетчатом случае доказано. Поскольку второе утверждение доказывается аналогично, то лемма 5.6 в решетчатом случае доказана. Поскольку в общем случае доказательство практически сохранится, то лемма 5.6 доказана.

5.6. Класс $\mathcal{M}_+$ мер на прямой. Пусть $\nu = \nu(A)$ — σ -конечная положительная мера на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$; обозначим

$$\varphi(\nu; \lambda) = \int e^{\lambda x} \nu(dx)$$

отвечающее ей преобразование Лапласа. Класс мер ν , для которых *существует* $\delta = \delta_\nu > 0$ такое, что для всех λ из интервала $(0, \delta)$ выполняется $\varphi(\nu; \lambda) < \infty$, обозначим $\mathcal{M}_+$. Если $t > 0, \nu \in \mathcal{M}_+$, то $t\nu \in \mathcal{M}_+$; если $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_+$, то $\nu_1 + \nu_2 \in \mathcal{M}_+$. Убедимся, что и свертка $\nu_1 * \nu_2$ принадлежит классу $\mathcal{M}_+$ и при этом

$$\varphi(\nu_1 * \nu_2; \lambda) = \varphi(\nu_1; \lambda)\varphi(\nu_2; \lambda). \quad (5.9)$$

Для этого наряду с мерами $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_+$ рассмотрим вероятностные меры

$$\tilde{\nu}_i(dt) = \frac{e^{\delta_0 t} \nu_i(dt)}{\varphi(\nu_i; \delta_0)}, \quad i = 1, 2,$$

где $\delta_0 > 0$ достаточно мало и фиксировано. Для вероятностных мер определена свертка, поэтому мера $\tilde{\nu}_1 * \tilde{\nu}_2(dt)$ определена и справедлива формула

$$\varphi(\tilde{\nu}_1 * \tilde{\nu}_2; \lambda) = \varphi(\tilde{\nu}_1; \lambda)\varphi(\tilde{\nu}_2; \lambda) = \frac{\varphi(\nu_1; \lambda + \delta_0)\varphi(\nu_2; \lambda + \delta_0)}{\varphi(\nu_1; \delta_0)\varphi(\nu_2; \delta_0)}.$$

Поэтому определена свертка

$$\nu_1 * \nu_2(dt) = e^{-\delta_0 t} \varphi(\nu_1; \delta_0)\varphi(\nu_2; \delta_0)\tilde{\nu}_1 * \tilde{\nu}_2(dt)$$

и верна формула (5.9).

Для меры $\nu \in \mathcal{M}_+$ определим две константы

$$\begin{aligned} \lambda_+(\nu, \Delta) &= -\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \nu([t, t + \Delta)); \\ \lambda_-(\nu, \Delta) &= -\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \nu([t, t + \Delta)), \end{aligned} \quad \Delta > 0.$$

Очевидно, что

$$0 < \lambda_+(\nu, \Delta) \leq \lambda_-(\nu, \Delta) \leq \infty, \quad (5.10)$$

причем левое неравенство есть следствие принадлежности ν классу $\mathcal{M}_+$.

Заметим, что для меры ν из класса $\mathcal{M}_+$ константа $\lambda_+(\nu, \Delta)$ для всех $\Delta > 0$ не зависит от Δ :

$$\lambda_+(\nu, \Delta) = \lambda_+(\nu, \infty) \equiv \lambda_+(\nu). \quad (5.11)$$

Докажем (5.11). Непосредственно из определения следует неравенство $-\lambda_+(\nu, \Delta) \leq -\lambda_+(\nu, \infty)$, поэтому достаточно доказать обратное неравенство

$$-\lambda_+(\nu, \Delta) \geq -\lambda_+(\nu, \infty). \quad (5.12)$$

Для любого $\varepsilon \in (0, \lambda_+(\nu, \Delta))$ найдется $C = C_\varepsilon < \infty$ такое, что

$$\nu([t, t + \Delta)) \leq C e^{-t(\lambda_+(\nu, \Delta) - \varepsilon)}, \quad t \leq 1.$$

Поскольку

$$\nu([t, \infty)) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu([t + k\Delta, t + (k+1)\Delta)),$$

то справедливо

$$\nu([t, \infty)) \leq \frac{C}{1 - e^{-\Delta(\lambda_+(\nu, \Delta) - \varepsilon)}} e^{-t(\lambda_+(\nu, \Delta) - \varepsilon)}.$$

Мы показали, что для любого $\varepsilon \in (0, \lambda_+(\nu, \Delta))$ выполняется

$$-\lambda_+(\nu, \Delta) \geq -\lambda_+(\nu, \infty) + \varepsilon;$$

неравенство (5.12) доказано.

В соответствии с (5.11) мы будем использовать характеристику $\lambda(\nu) = \lambda(\nu, \infty)$ вместо $\lambda(\nu, \Delta)$.

Если существует $\Delta_0 = \Delta_0(\nu) > 0$ такое, что при всех $\Delta \geq \Delta_0$ выполняется

$$\lambda_+(\nu) = \lambda_-(\nu, \Delta),$$

то скажем, что для меры ν определена константа

$$\lambda(\nu) = \lambda_+(\nu) = \lambda_+(\nu, \Delta) = \lambda_-(\nu, \Delta), \quad \Delta \geq \Delta_0.$$

Таким образом, если для меры $\nu \in \mathcal{M}_+$ существует константа $\lambda(\nu)$, то эта константа с необходимостью положительная и правый хвост $\nu([t, \infty))$ убывает экспоненциально быстро и достаточно регулярно: *при* $t \rightarrow \infty$

$$\nu([t, \infty)) = e^{-t(\lambda(\nu) + o(1))}, \quad \nu([t, t + \Delta)) = e^{-t(\lambda(\nu) + o(1))}, \quad \Delta \geq \Delta_0(\nu).$$

ЛЕММА 5.7. Пусть $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_+$. Тогда

$$\lambda_+(\nu_1 + \nu_2) \geq \min\{\lambda_+(\nu_1), \lambda_+(\nu_2)\}; \quad (5.13)$$

$$\lambda_+(\nu_1 * \nu_2) \geq \min\{\lambda_+(\nu_1), \lambda_+(\nu_2)\}; \quad (5.14)$$

$$\text{для } \Delta > 0 \quad \lambda_-(\nu_1 + \nu_2, \Delta) \leq \min\{\lambda_-(\nu_1, \Delta), \lambda_-(\nu_2, \Delta)\}, \quad (5.15)$$

$$\lambda_-(\nu_1 * \nu_2, \Delta) \leq \min\{\lambda_-(\nu_1, \Delta), \lambda_-(\nu_2, \Delta)\}. \quad (5.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что для $\nu \in \mathcal{M}_+$ и любого $\lambda \in (0, \lambda_+(\nu))$ справедливо $\varphi(\nu; \lambda) < \infty$. С другой стороны, если для некоторого $\lambda_0 > 0$ выполняется неравенство $\varphi(\nu; \lambda) < \infty$, то в силу неравенства Чебышёва

$$\nu([t, \infty)) \leq e^{-t\lambda_0} \varphi(\nu; \lambda),$$

откуда следует $\lambda_0 \leq \lambda_+$. Поэтому

$$\lambda_+(\nu) = \sup\{\lambda > 0 : \varphi(\nu; \lambda) < \infty\}. \quad (5.17)$$

Воспользуемся формулами

$$\varphi(\nu_1 + \nu_2; \lambda) = \varphi(\nu_1; \lambda) + \varphi(\nu_2; \lambda), \quad \varphi(\nu_1 * \nu_2; \lambda) = \varphi(\nu_1; \lambda) \varphi(\nu_2; \lambda)$$

и (5.17); неравенства (5.13), (5.14) доказаны.

Поскольку для $\Delta > 0$ справедливо

$$\nu_1([t, t + \Delta)) + \nu_2([t, t + \Delta)) \geq \nu_i([t, t + \Delta)), \quad i = 1, 2,$$

то неравенство (5.15) доказано.

Для любых $p > 0, q > 0, p + q = 1$, справедливо

$$\nu_1 * \nu_2([t, t + \Delta)) \geq \nu_1([pt, pt + p\Delta)) \nu_2([qt, qt + q\Delta)).$$

Поэтому

$$\lambda_-(\nu_1 * \nu_2, \Delta) \leq p\lambda_-(\nu_1, \Delta) + q\lambda_-(\nu_2, \Delta),$$

откуда следует

$$\lambda_-(\nu_1 * \nu_2, \Delta) \leq \lambda_-(\nu_i, \Delta), \quad i = 1, 2.$$

Неравенство (5.16) доказано. Лемма 5.7 доказана.

Пусть случайная величина ξ имеет распределение F . Определим для $0 < p \leq 1$ функцию восстановления

$$H(V) = \sum_{k=1}^{\infty} p^k F^{(*k)}(V),$$

где $F^{(*k)}$ есть k -кратная свертка распределения F .

ЛЕММА 5.8. Пусть $F \in \mathcal{M}_+$ и либо $0 < p < 1$, либо $p = 1, E\xi < 0$. Тогда

$$H \in \mathcal{M}_+, \lambda(H) = a,$$

где $a \equiv \sup\{\lambda : p\varphi(F; \lambda) \leq 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для $a < \lambda$ выполняется $\varphi(H; \lambda) = \infty$; для $0 < \lambda < a$ выполняется

$$\varphi(H; \lambda) = \frac{p\varphi(F; \lambda)}{1 - p\varphi(F; \lambda)} < \infty.$$

Поэтому $H \in \mathcal{M}_+$ и $\lambda_+(H) = a$. Поскольку $\lambda_-(H, \Delta) \geq \lambda_+(H) = a$, то нам достаточно убедиться, что найдется $\Delta_0 \geq 0$ такое, что для всех $\Delta \geq \Delta_0$ выполняется

$$\lambda_-(H, \Delta) \leq a. \quad (5.18)$$

Если $a = \infty$, то (5.18) тривиально. Пусть $a < \infty$; рассмотрим функцию уклонений

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\alpha \lambda - \ln \varphi(F; \lambda)\}.$$

Известно (см. [16]), что

$$\inf_{s > 0} \frac{\Lambda(s) - \ln p}{s} = a,$$

поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $s > 0$ такое, что $s \in (\{\alpha : \Lambda(\alpha) < \infty\})$ и

$$\frac{\Lambda(s) - \ln p}{s} \leq a + \varepsilon.$$

В силу теоремы 2 в [14] найдется $\Delta_0 > 0$ такое, что для $\Delta \geq \Delta_0$ справедливо

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln H([t, t + \Delta)) \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln p^{[t/s]} \mathbf{P}(S([t/s]) \in [t, t + \Delta)) \geq -\frac{\Lambda(s) - \ln p}{s}.$$

Поэтому мы доказали, что для любых $\Delta \geq \Delta_0, \varepsilon > 0$ выполняется $\lambda_-(H, \Delta) \leq a + \varepsilon$. Неравенство (5.18) установлено. Лемма 5.8 доказана.

5.7. Большие уклонения для $(p, G^{(0)}, G)$ -цепей. Пусть задана тройка

$$(p, G^{(0)}, G),$$

где $p \in (0, 1]$ – число, $G^{(0)} = G^{(0)}(A) = \mathbf{P}(\zeta^{(0)} \in A)$ – распределение случайной величины $\zeta^{(0)} \in \mathbb{R}^1$, $G = G(A) = \mathbf{P}(\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in A)$ – распределение случайного вектора $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2$. По этой тройке построим однородную во времени цепь Маркова $\{S(s, n); n = 0, 1, 2, \dots\}$, с фазовым пространством $\mathbb{R}^{1+}$ и начальным положением $s = S(s, 0) \in \mathbb{R}^{1+}$, задав ее приращение за один шаг:

$$S(s, 1) =_D \begin{cases} (\zeta^{(0)})_+, & \text{если } s = 0; \\ (s + \zeta_1)_+ I\{s + \zeta_2 > 0\} I\{\alpha = 1\}, & \text{если } s > 0; \end{cases}$$

где случайная величина α не зависит от вектора $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ и имеет распределение Бернулли с параметром p :

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p; \\ 0 & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases}$$

Такую цепь для краткости будем называть $(p, G^{(0)}, G)$ -цепью.

Пусть тройка $(p, G^{(0)}, G)$ удовлетворяет условию (J):

- (а) либо $p < 1$, либо $p = 1, \mathbf{E}\zeta_1 < 0$;
- (б) для некоторого $N < \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta_1 > 0, \zeta_2 > -N) > 0, \quad \mathbf{P}(\zeta^{(0)} > N) > 0;$$

- (в) $G^{(0)}, G_1 \in \mathcal{M}_+$, где $G_1 = G_1(A) = G(A \times \mathbb{R}^1)$, $A \subseteq \mathbb{R}^{1+}$.

Известно [4], что если $(p, G^{(0)}, G)$ -цепь удовлетворяет условию (J), то она является эргодической; обозначим стационарное распределение такой цепи $\nu = \nu(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^{1+}$.

ЛЕММА 5.9. Пусть для $(p, G^{(0)}, G)$ -цепи выполнено условие (J). Тогда

$$\lambda_+(\nu) \geq \min\{\lambda_+(G^{(0)}), b\}; \quad (5.19)$$

найдется $\Delta_0 > 0$ такое, что для $\Delta \geq \Delta_0$

$$\lambda_-(\nu, \Delta) \leq \min\{\lambda_-(\Delta, G^{(0)}), b\}, \quad (5.20)$$

где

$$b = \sup\{\lambda \geq 0 : p\mathbb{E}e^{\lambda\zeta_1} \leq 1\}.$$

Из леммы 5.9 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в условиях леммы 5.9 для распределения $G^{(0)}$ определена константа $\lambda(G^{(0)})$, то для стационарного распределения ν тоже определена константа $\lambda(\nu)$, причем

$$\lambda(\nu) = \min\{\lambda(G^{(0)}), b\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.9. Введем для цепи $S(0, n)$ функцию восстановления с запрещенным множеством $\{0\}$: для $A \subseteq \mathbb{R}^{1+}$

$$H_{\{0\}}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S(0, k) \in A, S(0, i) > 0, i = 1, \dots, k-1).$$

Тогда справедливо (см. [4], [32]) следующее представление для стационарной меры ν :

$$\nu(A) = \nu(\{0\})H_{\{0\}}(A), \quad A \subseteq (0, \infty).$$

В силу этого представления в том случае, когда $H_{\{0\}} \in \mathcal{M}_+$, справедливо

$$\lambda_+(\nu) = \lambda_+(H_{\{0\}}), \quad \lambda_-(\nu, \Delta) = \lambda_-(H_{\{0\}}, \Delta).$$

Введем далее обычную функцию восстановления

$$H(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p^k \mathbb{P}(\zeta_1(1) + \dots + \zeta_1(k) \in A), \quad A \subseteq \mathbb{R}^1,$$

где случайные величины $\zeta_1(i)$ независимы и имеют общее распределение

$$\mathbb{P}(\zeta_1(i) \in A) = G(A \times \mathbb{R}^1) \equiv G_1(A).$$

В силу леммы 5.8 верно $H \in \mathcal{M}_+$, $\lambda_+(H) = b$, и найдется $\Delta_0 > 0$ такое, что для $\Delta \geq \Delta_0$ верно $\lambda_-(H, \Delta) = b$.

Обратимся, далее, к очевидному соотношению

$$G^{(0)}(A) \leq H_{\{0\}}(A) \leq G^{(0)}(A) + G^{(0)} * H(A), \quad (5.21)$$

которое верно для любого измеримого $A \subseteq \mathbb{R}^{1+}$. Из правого неравенства в (5.21) в силу леммы 5.7 получаем:

$$H_{\{0\}} \in \mathcal{M}_+, \quad \lambda_+(H_{\{0\}}) \geq \lambda_+(G^{(0)} + G^{(0)} * H) \geq \min\{\lambda_+(G^{(0)}), b\}.$$

Таким образом, неравенство (5.19) установлено.

Из левого неравенства в (5.21) следует $\lambda_-(H_{\{0\}}, \Delta) \leq \lambda_-(G^{(0)}, \Delta)$, поэтому для доказательства (5.20) достаточно доказать, что существует $\Delta_0 > 0$ такое, что для $\Delta \geq \Delta_0$

$$\lambda_-(H_{\{0\}}, \Delta) \leq b. \quad (5.22)$$

В силу условия (J_(b)) найдутся числа $N, M, \delta > 0$ такие, что

$$q^{(0)} \equiv \mathbf{P}(\zeta^{(0)} \in [N, N + M]) > 0, \quad q \equiv \mathbf{P}(\zeta_1 \in [\delta, \delta + M], \zeta_2 > -N) > 0.$$

Обозначим через $\tilde{\zeta}^{(0)}$ случайную величину с распределением

$$\tilde{G}^{(0)}(V) = \mathbf{P}(\zeta^{(0)} \in V \mid \zeta^{(0)} \in [N, N + M]);$$

через $\tilde{\zeta}_1$ — случайную величину с распределением

$$\tilde{G}_1(V) = \mathbf{P}(\zeta_1 \in V \mid \zeta_1 \in [\delta, \delta + M], \zeta_2 > -N).$$

Пусть далее $\zeta_1^{(T)}$ есть случайная величина с распределением

$$G_1^{(T)}(V) = \mathbf{P}(\zeta_1 \in V \mid \zeta_1 > -T, \zeta_2 > -T), \quad q_T \equiv \mathbf{P}(\zeta_1 > -T, \zeta_2 > -T).$$

Очевидно, что для любого $n = k + m + 1 = 3, 4, \dots$

$$\begin{aligned} H_{\{0\}}([t, t + \Delta)) &\geq \mathbf{P}(S(0, n) \in [t, t + \Delta), S(0, i) > 0, i = 1, 2, \dots, n) \\ &\geq \mathbf{P}(S(0, n) \in \Delta(t), S(0, i) > 0, i = 1, 2, \dots, n, A_n, B_n), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= \{\zeta^{(0)} \in [N, N + M], \zeta_1(j) \in [\delta, \delta + M], \zeta_2(j) > -N; j = 2, \dots, k + 1\}, \\ B_n &= \{\zeta_1(j) > -T, \zeta_2(j) > -T; j = k + 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Поэтому для $n = k + m + 1 = 3, 4, \dots, N + k\delta > T$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} H_{\{0\}}([t, t + \Delta)) &\geq p^n q^{(0)} q^k q_T^m \\ &\times \mathbf{P}(\tilde{\zeta}^{(0)} + \tilde{S}_1(k) + S_1^{(T)}(m) \in [t, t + \Delta), S_1^{(T)}(i) > 0, i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

где случайные величины $\tilde{\zeta}^{(0)}, \tilde{S}_1(k), S_1^{(T)}(m)$ независимы и

$$\tilde{S}_1(k) = \sum_{i=2}^{k+1} \tilde{\zeta}_1(i), \quad S_1^{(T)}(m) = \sum_{j=k+2}^n \zeta_1^{(T)}(j),$$

случайные величины $\tilde{\zeta}_1(i)$, $\zeta_1^{(T)}(j)$ имеют распределения $\tilde{G}_1$, $G_1^{(T)}$ соответственно и независимы.

Выберем $\bar{k} = [T/\delta] + 1$; поскольку значения суммы $\tilde{\zeta}^{(0)} + \tilde{S}_1(\bar{k})$ лежат в отрезке $[N + T, N + T + \delta + M(T/\delta + 2)]$, то для $n = \bar{k} + m + 1 \geq 3$ получаем

$$H_{\{0\}}([t, t + \Delta)) \geq p^n q^{(0)} q^{\bar{k}} q_T^m \times \inf_{N+T \leq u \leq N+T+\delta+M(T/\delta+2)} P(S_1^{(T)}(m) \in [t-u, t-u+\Delta), S_1^{(T)}(i) > 0, i = 1, 2, \dots, m).$$

Далее, в силу леммы 5.6 справедливо неравенство

$$P(S_1^{(T)}(m) \in [t-u, t-u+\Delta), S_1^{(T)}(i) > 0, i = 1, 2, \dots, m) \geq \frac{1}{m} P(S_1^{(T)}(m) \in [t-u, t-u+\Delta)).$$

Поэтому получили для $n = \bar{k} + m + 1 \geq 3$

$$H_{\{0\}}(\Delta(t)) \geq p^n q^{(0)} q^{\bar{k}} q_T^m \inf_{N+T \leq u \leq N+T+\delta+M(T/\delta+1)} \frac{1}{m} P(S_1^{(T)}(m) \in \Delta(t-u)) \equiv R(t, m, \Delta).$$

Введем функции уклонений

$$\Lambda_1^{(T)}(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\alpha \lambda - \ln p q_T E e^{\lambda \zeta_1^{(T)}}\}, \quad \Lambda_1(\alpha) = \sup_{\lambda} \{\alpha \lambda - \ln p E e^{\lambda \zeta_1}\}$$

и множества

$$\Lambda_1^{(T)} = \{\alpha : \Lambda_1^{(T)}(\alpha) < \infty\}, \quad \Lambda_1 = \{\alpha : \Lambda_1(\alpha) < \infty\}.$$

Множество $\Lambda_1^{(T)}$ совпадает с носителем распределения $G_1^{(T)}$, и это же верно для множества Λ_1 [15]. Поэтому внутренность множества $\Lambda_1^{(T)}$ представляется в виде

$$(\Lambda_1^{(T)}) = (\Lambda_1) \cap (-T, \infty).$$

В силу теоремы 2 в [14] найдется $\Delta_0 > 0$, не зависящее от T , такое, что для любых $\alpha > 0$, $\alpha \in (\Lambda_1)$, $\Delta \geq \Delta_0$ и всех достаточно больших T выполняется неравенство

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln R(t, [t/\alpha], \Delta) \geq -\frac{\Lambda_1^{(T)}(\alpha)}{\alpha}.$$

Получаем для $\alpha > 0$, $\alpha \in (\Lambda_1)$, $\Delta \geq \Delta_0$

$$\lambda_-(H_{\{0\}}, \Delta) \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_1^{(T)}(\alpha)}{\alpha}.$$

Поскольку для $\alpha \in (\Lambda_1)$ выполняется (см. [15]) $\lim_{T \rightarrow \infty} \Lambda_1^{(T)}(\alpha) = \Lambda_1(\alpha)$, то получаем неравенство

$$\lambda_-(\Delta, H_{\{0\}}) \leq \frac{\Lambda_1(\alpha)}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \in (\Lambda_1).$$

Из последнего следует, что для любого $\Delta \geq \Delta_0$

$$\lambda_-(\Delta, H_{\{0\}}) \leq \inf_{\alpha > 0} \frac{\Lambda_1(\alpha)}{\alpha}.$$

Поскольку известно [16], что правая часть последнего неравенства совпадает с b , то соотношение (5.22) доказано. Лемма 5.9 доказана.

5.8. В настоящем пункте предположим, что для цепи Маркова $X(y, n) \in \mathbb{R}^{2+}$ выполнены условия (R_1) , (M_1^+) , (E) (см. § 1) и, следовательно, справедлива теорема 1.1.

ЛЕММА 5.10. I. Для любых $y \in \mathbb{R}^{2+}$, $A \subseteq \mathbb{R}^{2+}$, $0 \notin A$, справедливо неравенство

$$\max_{n \geq 1} \mathbf{P}(X(0, n) \in A) \leq \frac{1}{\pi(\{0\})} \pi(\Delta(A)). \quad (5.23)$$

II. Пусть функция $x = x(s) \in \mathbb{R}^{2+}$, $|x| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, фиксирована. Пусть для любой функции $k = k(s) \in \{1, 2, \dots\}$ выполняется при $s \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(X(0, k) \in \Delta(x), \min_{1 \leq m \leq k} |X(0, m)| > 0\right) \\ &= o(1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(X(0, n) \in \Delta(x), \min_{1 \leq m \leq n} |X(0, m)| > 0\right). \end{aligned}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\max_{n \geq 1} \mathbf{P}(X(0, n) \in \Delta(x)) \leq (1 + \delta) \pi(\Delta(x)),$$

где $\delta = \delta(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наряду с функцией восстановления $H_{\{0\}}(A)$ с запрещенным множеством $\{0\}$ определим “неполную” функцию восстановления с запрещенным множеством $\{0\}$:

$$H_{\{0\}}^{(N)}(A) = \sum_{n=1}^N \mathbf{P}(X(0, n) \in A, X(0, k) \notin \{0\} \text{ при всех } k \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

По формуле полной вероятности по последнему приходу цепи $X(0, n)$ в точку $x = 0$ справедливо

$$\mathbf{P}(X(0, n) \in A) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{P}(X(0, n-k) = 0) H_{\{0\}}^{(k)}(A). \quad (5.24)$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(X(0, n) \in A) \leq C \pi(\{0\}) H_{\{0\}}^{(n)}(A) \leq C \pi(\{0\}) H_{\{0\}}(A), \quad C = \frac{1}{\pi(\{0\})}.$$

Остается заметить, что (см. [4]) для $A \subseteq \mathbb{R}^{2+}$, $0 \notin A$, справедливо

$$\pi(A) = \pi(\{0\}) H_{\{0\}}(A).$$

Неравенство (5.23) доказано.

Пусть

$$\begin{aligned} H^*(\Delta(x)) &= \max_{k \geq 1} \mathbf{P}\left(X(0, k) \in \Delta(x), \min_{1 \leq m \leq k} |X(0, m)| > 0\right), \\ \delta^*(s) &= \frac{H^*(\Delta(x))}{H_{\{0\}}(\Delta(x))}, \quad \varepsilon_N = \max_{n \geq N} |\mathbf{P}(X(0, n) = 0) - \pi(\{0\})|. \end{aligned}$$

Тогда в силу (5.24) для любого $N < \infty$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(0, n) \in \Delta(x)) &= \sum_{k=1}^{n-N} \mathbf{P}(X(0, n-k) = 0) H_{\{0\}}^{(k)}(\Delta(x)) \\ &\quad + \sum_{k=n_N+1}^{n-N} \mathbf{P}(X(0, n-k) = 0) H_{\{0\}}^{(k)}(\Delta(x)) \\ &\leq (\varepsilon_N + \pi(\{0\})) H_{\{0\}}(\Delta(x)) + N \delta^*(s) H_{\{0\}}(\Delta(x)) \\ &= \pi(\Delta(x)) \left(1 + \frac{\varepsilon_N + N \delta^*(s)}{\pi(\{0\})} \right). \end{aligned}$$

В силу наших условий $\lim_{s \rightarrow \infty} \delta^*(s) = 0$, $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0$. Поэтому можно выбрать $N = N(s) \rightarrow \infty$ таким образом, что

$$\delta(s) \equiv \frac{\varepsilon_{N(s)} + N(s) \delta^*(s)}{\pi(\{0\})} \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$. Лемма 5.10 доказана.

Основные обозначения

$A(j)$, $j = 0, 1, 2, 3$, – событие, определяющее принадлежность траектории цепи j -й среде однородности.

(A) – условие наличия ненулевой абсолютно непрерывной компоненты.

$a(y) = \mathbf{E}\xi(y)$ – вектор средних приращений цепи из точки y за один шаг.

$a = \mathbf{E}\xi$ – вектор средних приращений цепи из точки $y = (\infty, \infty)$ за один шаг.
 $D(\gamma, \beta, T)$, $D(\gamma, \beta)$, $D_i(0, \beta)$, $\overline{D}_i(0, \beta)$, $i = 0, 1, 2$, – функционалы, характеризующие уклонения цепи.

(E) – условие эргодичности цепи.

$\mathcal{F}$ – пространство “предельных траекторий” цепи.

$L(f)$ – функционал, характеризующий уклонение траектории случайного блуждания.

(M), (M⁺), (M₃) – условия существования экспоненциальных моментов.

N – параметр, характеризующий размер неоднородности частично однородной цепи.

$P(y, n, B)$ – переходная вероятность цепи за n шагов.

$P(y, B) = P(y, 1, B)$ – переходная вероятность цепи за 1 шаг.

(R₁), (R₂), (R₃), (R) – условия достижимости и регулярности.

$\mathbb{R}^{2+}$ – положительный квадрант на плоскости.

$\mathbb{R}(\cdot, \cdot)$ – области на плоскости.

$S(n) = \xi^{(1)} + \dots + \xi^{(n)}$ – суммы независимых случайных векторов, характеризующих скачки цепи в $\mathbb{R}(N, N)$.

s – растущий параметр, определяющий порядок уклонения цепи.

$(T^{(i)}, Z^{(i)}) = (\sum_{j=1}^k \tau^{(i)}(j), \sum_{j=1}^k \zeta^{(i)}(j))$, $i = 0, 1, 2$, – суммы длин циклов и приращений на циклах.

$T = n/s$ – нормированное число шагов цепи.

$V_M = \{x \in \mathbb{R}^{2+}\}$ – квадрат на плоскости.

$X(n) = X(y, n) - N$ -частично однородная (в пространстве) цепь Маркова.

$X^{(i)}(n) = X^{(i)}(y, n)$, $i = 1, 2$, – ассоциированные цепи.

$x_s = \frac{1}{s} X(y, ts)$, $0 \leq t \leq n/s$, – нормированные траектории цепи.

$\beta = x/s$ – нормированное конечное положение цепи.

$\Gamma(\cdot, \cdot)$ – области на плоскости.

Γ – граница положительного квадранта.

$\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \Gamma(0, 0)$ – части границы положительного квадранта.

$\gamma = y/s$ – нормированное начальное положение цепи.

$\Delta(x)$ – квадрат на плоскости со стороной $\Delta > 0$ и с вершиной в точке x .

$\Lambda^{(j)}(\alpha)$, $j = 0, 1, 2, 3$, – функции уклонений в j -й среде однородности.

$\varkappa(i)$, $i = 0, 1, 2$, – показатель степени в точной асимптотике.

$\pi = \pi(B)$ – стационарная мера эргодической цепи Маркова.

$\pi_2^{(1)}, \pi_1^{(2)}$ – стационарные распределения для ассоциированных цепей.

$\xi(y) = X(y, 1) - y$ – приращение цепи за один шаг в точке y .

ξ – “виртуальное” приращение цепи $X(y, n)$ в точке (∞, ∞) .

$(\tau^{(i)}, \zeta^{(i)})$, $i = 0, 1, 2$, – длина и приращение на цикле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Atar, P. Dupuis. Large Deviations and Queueing Networks: Methods for Rate Functions. Identification LCDS Technical Report. Brown University, 1998.
- [2] D. Bertsimas, I. Paschalidis, J. Tsitsiklis. Large deviations analysis of the generalized processor sharing policy // Queueing Systems. 1999. V. 32. № 4. P. 319–349.
- [3] V. M. Blinovskij, R. L. Dobrushin. Process level large deviations for a class of piecewise homogeneous random walks // The Dynkin Festschrift: Markov Processes and Their Applications / ed. M. I. Freidlin. Boston: Birkhäuser, 1994. P. 1–59.
- [4] А. А. Боровков. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. М. / Новосибирск: Эдиториал УРСС / Институт математики СО РАН, 1999.
- [5] А. А. Боровков. Теория вероятностей. М. / Новосибирск: Эдиториал УРСС / Институт математики СО РАН, 1999.
- [6] А. А. Боровков. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. матем. журн. 1962. Т. 3. № 5. С. 645–694.
- [7] А. А. Боровков. О преобразовании Крамера, больших уклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36. № 3. С. 493–509.
- [8] А. А. Боровков. Об условных распределениях, связанных с большими уклонениями // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. № 4. С. 732–744.
- [9] А. А. Боровков. Сходимость распределений функционалов от случайных процессов // УМН. 1978. Т. 33. № 1. С. 3–41.
- [10] А. А. Боровков. Граничные задачи для случайных блужданий и большие уклонения в функциональных пространствах // Теория вероятн. и ее примен. 1967. Т. 12. № 4. С. 635–654.
- [11] А. А. Боровков, Д. А. Коршунов. Вероятности больших уклонений для одномерных цепей Маркова. I // Теория вероятн. и ее примен. 1996. Т. 41. № 1. С. 3–30.
- [12] А. А. Боровков, Д. А. Коршунов. Вероятности больших уклонений для одномерных цепей Маркова. II // Теория вероятн. и ее примен. 2000. Т. 45. № 3. С. 437–468.
- [13] А. А. Боровков, А. А. Могульский. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. I // Теория вероятн. и ее примен. 1998. Т. 43. № 1. С. 3–17.
- [14] А. А. Боровков, А. А. Могульский. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие уклонения. II // Теория вероятн. и ее примен. 2000. Т. 45. № 1. С. 5–19.
- [15] А. А. Боровков, А. А. Могульский. Большие уклонения и проверка статистических гипотез // Труды Ин-та математики СО АН СССР. 1992. Т. 19.

- [16] А. А. Боровков, А. А. Могульский. Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. №4. С. 745–782.
- [17] A. A. Borovkov, A. A. Mogulskii. Large deviations for stationary Markov chains in quarter plane // Abstracts of communications of the 23rd Conference on Stochastic Processes and their Applications. Singapore, 1995.
- [18] A. A. Borovkov, A. A. Mogulskii. Large deviations for stationary Markov chains in quarter plane // Proc. of the Seventh Japan-Russia Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics, Tokyo, 1995 / ed. S. Watanabe et al. Singapore: World Scientific, 1996. P. 12–19.
- [19] А. А. Боровков, А. А. Могульский, А. А. Саханенко. Предельные теоремы для случайных процессов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 82. М.: ВИНТИ, 1995.
- [20] R. L. Dobrushin, E. A. Pechersky. Large deviations for random processes with independent increments on infinite intervals // Probability Theory and Mathematical Statistics. Lectures presented at the semester held in St. Petersburg, Russia, March 2–April 23, 1993 / ed. I. A. Ibragimov et al. Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 41–74.
- [21] R. L. Dobrushin, E. A. Pechersky. Large deviations for tandem queueing systems // J. Appl. Math. Stochastic Anal. 1995. V. 7. P. 301–330.
- [22] P. Dupuis, R. Ellis. Large deviations for Markov processes with discontinuous statistics, II: Random walks // Probab. Theory Relat. Fields. 1992. V. 91. P. 153–194.
- [23] P. Dupuis, R. Ellis. The large deviations principle for a general class of queueing systems. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 348. №8. P. 2689–2751.
- [24] P. Dupuis, R. Ellis. A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations. Chichester: Wiley 1997.
- [25] P. Dupuis, H. Ishii, H. M. Soner. A viscosing solution approach to the asymptotic analysis of queueing systems // Ann. Probab. 1990. V. 18. P. 226–255.
- [26] G. Fayolle, V. A. Malyshev, M. V. Menshikov. Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [27] A. Ganesh, V. Anantharam. Stationary tail probabilities in exponential server tandems with renewal arrivals // Queueing Systems. 1996. V. 22. №3–4. P. 203–247.
- [28] I. Ignatiouk-Robert. Large deviations of Jackson network // Ann. Appl. Probab. 2000. V. 10. №3. P. 962–1001.
- [29] И. А. Игнатюк, В. А. Малышев, В. В. Шербаков. Влияние границ в задачах о больших уклонениях // УМН. 1995. Т. 49. №2. С. 43–102.
- [30] K. Majewski. Heavy traffic approximations of large deviations of feedforward queueing networks // Queueing Systems. 1998. V. 28. №1–3. P. 125–155.
- [31] K. Majewski. Large deviations on the steady-state distribution of reflected processes with applications to queueing systems // Queueing Systems. 1998. V. 29. №2–4. P. 351–381.
- [32] S. P. Meyn, R. L. Tweedie. Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [33] А. А. Могульский. Вероятности больших уклонений для случайных блужданий // Труды Ин-та математики СО АН СССР. 1983. Т. 3. С. 93–124.
- [34] А. А. Могульский. Большие уклонения для многомерных случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21. №2. С. 309–323.
- [35] А. А. Могульский, Б. А. Рогозин. Случайные блуждания в положительном квадранте. I. Локальные теоремы // Математические труды. 1999. Т. 2. №2. С. 57–97.
- [36] А. А. Могульский, Б. А. Рогозин. Случайные блуждания в положительном квадранте. II. Интегральные теоремы // Математические труды. 2000. Т. 3. №1. С. 48–118.
- [37] Э. Нуммелин. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989.
- [38] N. O’Connell. Large deviations for departures from a shared buffer // J. Appl. Probab. 1997. V. 34. P. 753–766.
- [39] A. Puhalskii. Moderate deviations for queues in critical loading // Queueing Systems. 1999. V. 31. №3–4. P. 359–392.

- [40] A. Shwartz, A. Weiss. Large Deviations for Performance Analysis, Queues Communication and Computing. London: Chapman & Hall, 1995.
- [41] А. В. Скороход. Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. № 2. С. 289–319.
- [42] S. R. S. Varadhan. Asymptotic probabilities and differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. № 3. P. 261–286.
- [43] А. Д. Вентцель. Предельные теоремы и большие отклонения для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1986.
- [44] T. Zajik. Rough asymptotics for tandem non-homogeneous $M/G/\infty$ queues via Poissonized empirical processes // Queueing Systems. 1998. V. 29. P. 161–174.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Поступила в редакцию
30.01.2000