Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Агеев, С. А. Богатый, О негомеоморфности компакта Банаха–Мазура гильбертову кубу, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 1, 209–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:47:14

О НЕГОМЕОМОРФНОСТИ КОМПАКТА БАНАХА–МАЗУРА ГИЛЬБЕРТОВУ КУБУ

С. М. АГЕЕВ, С. А. БОГАТЫЙ

Компакт Банаха–Мазура $Q(n)$ есть множество классов изометричных n -мерных банаховых пространств, топологизированное метрикой Банаха–Мазура

$$d(E, F) = \ln \inf \{ \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T: E \rightarrow F \text{ есть изоморфизм} \}.$$

Известно [1], [2], что $Q(n)$ есть компакт. Давний вопрос, относящийся к топологическому строению этого компакта (Проблема 899 из [3, р. 544]), гласит: “Верно ли, что $Q(n)$ есть абсолютный экстензор (АЕ); $Q(n)$ гомеоморфен гильбертову кубу I^∞ ?”

П. Фабел [4] положительно ответил на первую часть вопроса: $Q(n) \in \text{АЕ}$, в размерности $n = 2$; затем С. Агеев, С. Богатый и П. Фабел установили справедливость утверждения в общем случае [5]. В настоящей работе доказывается, что $Q(2)$ не гомеоморфен гильбертову кубу I^∞ . Как оказалось, препятствием к гомеоморфности $Q(2)$ гильбертову кубу I^∞ является эллиптическая точка $\mathcal{E}$, соответствующая классу изоморфности 2-мерного евклидова пространства ℓ^2 .

ТЕОРЕМА. *Дополнение $Q_{\mathcal{E}}(2) = Q(2) \setminus \{\mathcal{E}\}$ не стягиваемо в точку.*

Поскольку дополнение гильбертова куба до любой его точки гомотопически тривиально, [6], то из теоремы следует решение сформулированной проблемы.

Полученные результаты порождают ряд новых вопросов: верно ли, что

- (1) $Q(n) \not\sim I^\infty$ для $n \geq 3$.
- (2) $Q_{\mathcal{E}}(n) = Q(n) \setminus \{\mathcal{E}\}$ не стягиваемо в точку для $n \geq 3$?
- (3) Найти гомотопический тип $Q_{\mathcal{E}}(n)$; более конкретно: является ли $Q_{\mathcal{E}}(n)$ пространством Эйленберга–Маклейна?
- (4) Является ли $Q_{\mathcal{E}}(n)$ многообразием, моделируемым гильбертовым кубом (I^∞ -многообразием) для $n \geq 2$?
- (5) Описать топологию компакта Банаха–Мазура $Q(n)$ в других, более простых терминах.

Пусть $C(n)$ означает пространство всех выпуклых, симметричных относительно нуля, ограниченных тел в $\mathbb{R}^n$, топологизированное метрикой Хаусдорфа. Сумма Минковского выпуклых тел определяет на пространстве $C(n)$ выпуклую структуру. При этом на пространстве $C(n)$ естественно определяется действие общей линейной группы $\text{GL}(n) \times C(n) \rightarrow C(n)$, $T \cdot V = T(V)$, где $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \in \text{GL}(n)$, а $V \in C(n)$, согласующееся с выпуклой структурой на $C(n)$. Функционал Минковского p_V ставит в соответствие каждому выпуклому, центрально симметричному, ограниченному телу $V \in C(n)$ n -мерное банахово пространство $(\mathbb{R}^n, p_V)$. При этом $\text{GL}(n)$ -эквивалентным выпуклым телам ставятся в соответствие изометричные банаховы пространства. И наоборот, как доказали в 1932 году Мазур и Улам [7], всякая изометрия банаховых пространств является линейным отображением. Поэтому компакт Банаха–Мазура $Q(n)$ естественно гомеоморфен пространству орбит $C(n)/\text{GL}(n)$.

В нашем исследовании компакта Банаха–Мазура принципиальное значение имеют свойства так называемого ориентированного компакта Банаха–Мазура $Q^+(n) = C(n)/\text{GL}^+(n)$, где $\text{GL}^+(n)$ обозначает группу всех сохраняющих ориентацию линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ в себе. Понятно, что на ориентированном компакте Банаха–Мазура $Q^+(n)$ естественно действует группа $\mathbb{Z}_2 = \text{GL}(n)/\text{GL}^+(n)$ и $Q(n) = Q^+(n)/\mathbb{Z}_2$.

Так как наше исследование ориентированного компакта Банаха–Мазура существенно опирается на теорему Джона, то удобно ввести еще одно пространство выпуклых тел, которое, к тому же, позволяет получить представление компакта Банаха–Мазура $Q(2)$ как пространства орбит гильбертова куба по действию ортогональной группы $O(2)$, т.е. получить при $n = 2$ некоторое продвижение по проблеме (5) и полностью решить проблему (4) при $n = 2$.

Согласно теореме Джона, для всякого ограниченного выпуклого тела V в $\mathbb{R}^n$ существует, причем единственный, заполненный эллипсоид $E(V)$ (называемый эллипсоидом Лёвнера), содержащий тело V и имеющий наименьший объем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 97-01-00357) и ИНТАС.

Пусть $L(n) \subset C(n)$ — пространство всех выпуклых, симметричных относительно нуля, ограниченных тел V , эллипсоид Лёвнера $E(V)$ которых является единичным шаром. На пространстве $L(n)$ естественным образом действует группа $O(n)$ ортогональных преобразований. Пространство $L(n)$ с действием группы $O(n)$ является $O(n)$ -эквивариантным ретрактом пространства $C(n)$ с действием группы $O(n)$.

ЛЕММА. Компакты $Q(n)$ ($Q^+(n)$) и $L(n)/O(n)$ ($L(n)/SO(n)$) гомеоморфны и являются абсолютными экстензорами.

Для конечной группы $G \subset SO(2)$ пусть $L(2)^{[G]}$ означает подпространство тех выпуклых тел $V \in L(2)$, которые инвариантны при действии группы G . Наличие у компакта $L(2)$ дизъюнктивных “достаточно” эквивариантных аппроксимаций тождественного отображения позволяет с помощью критерия Торунчика заключить, что справедливы

ТЕОРЕМА 1. Для всякой конечной группы $G \subset SO(2)$ компакт $L(2)^{[G]}$ гомеоморфен гильбертову кубу.

ТЕОРЕМА 2. Пространства $Q_{\mathcal{E}}(2)$ и $Q_{\mathcal{E}}^+(2) = Q(2)^+ \setminus \{\mathcal{E}\}$ являются I^∞ -многообразиями.

Г. Торунчик и Д. Вест первыми обнаружили структуру комплексов Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Q}, 2)$ в орбитных пространствах. Рассмотрение стратификации пространства $Q_{\mathcal{E}}^+(2)$, порожденной решеткой конечных подгрупп группы $SO(2)$, позволяет (некоторой модификацией рассуждений работы [8]) доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пространство $Q_{\mathcal{E}}^+(2)$ является комплексом Маклейна–Эйленберга $K(\mathbb{Q}, 2)$ и, значит, гомеоморфно пространству $TCP^\infty \times I^\infty$.

Кольцевая структура в когомологиях [9] и трансфер Смита [10] позволяют вывести отсюда теорему, сформулированную в начале статьи.

ТЕОРЕМА 4. Пространство $Q_{\mathcal{E}}(2)$ не стягиваемо в точку, и, более того, имеет нетривиальные четырехмерные когомологии $H^4(Q_{\mathcal{E}}(2); \mathbb{Q}) \neq 0$.

Авторы доказали справедливость аналогичных утверждений для компактов Асплунда. Агеев и Реповш доказали, что пространство $Q_{\mathcal{E}}(n)$ является I^∞ -многообразием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] John F. // Studies and Essays, presented to R. Courant on his 60-th birthday. New York, 1948. P. 187–204. [2] Macbeath A. M. // Canad J. Math. 1951. V. 3. P. 54–61. [3] van Mill J., Reed G. M. (Eds). Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990. [4] Fabel P. // Borsuk–Kuratowski Session: Warsaw, 1996. P. 5. [5] Ageev S., Bogatyĭ S., Fabel P. // Symposium septimum Tiraspolense generalis topologiae et suae applicationum: Chisinau, 1996. P. 20–22. [6] Toruńczyk H. // Fund. Math. 1980. V. 106. P. 31–40. [7] Mazur S., Ulam S. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1932. V. 194. P. 946–948. [8] Toruńczyk H., West J. E. // Proc. Internat. Conf. Geometric Topology. Warsaw: PWN, 1980. P. 439–449. [9] Сулливан Д. Геометрическая топология. Локализация, периодичность и симметрия Галуа. М.: Мир, 1975. [10] Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.

Брестский государственный университет, Белоруссия;
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ageev@hightmath.brsu.brest.by bogatyĭ@nw.math.msu.su

Принято редколлегией
 24.12.1997