Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, О согласованных потенциальных деформациях фробениусовых алгебр и уравнениях ассоциативности, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm40>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 08:48:47

О СОГЛАСОВАННЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ФРОБЕНИУСОВЫХ АЛГЕБР И УРАВНЕНИЯХ АССОЦИАТИВНОСТИ

О. И. Мохов

Пусть η^{ij} – произвольная невырожденная постоянная симметричная матрица: $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, $1 \leq i, j \leq N$. Рассмотрим функцию N переменных $F(t^1, \dots, t^N)$, удовлетворяющую следующему условию: функции $c_{jk}^i(t) = \eta^{is} \partial^3 F / \partial t^s \partial t^j \partial t^k$ для всех $t = (t^1, \dots, t^N)$ задают структурные константы ассоциативной алгебры $A(t)$ в N -мерном линейном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_N$ и умножением $e_i \circ e_j = c_{ij}^k(t) e_k$. Условие ассоциативности $(e_i \circ e_j) \circ e_k = e_i \circ (e_j \circ e_k)$, которое эквивалентно соотношению $c_{ij}^s c_{sk}^l = c_{is}^l c_{jk}^s$ для структурных констант алгебры $A(t)$, приводит к сложной переопределенной системе нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка для функции F :

$$(1) \quad \eta^{sr} \frac{\partial^3 F}{\partial t^s \partial t^i \partial t^j} \frac{\partial^3 F}{\partial t^k \partial t^l \partial t^r} = \eta^{sr} \frac{\partial^3 F}{\partial t^s \partial t^i \partial t^k} \frac{\partial^3 F}{\partial t^j \partial t^l \partial t^r}.$$

Система (1) впервые возникла в двумерной топологической теории поля и известна как система Виттена–Дийкграафа–Г. Верлинде–Е. Верлинде–Дубровина или уравнения ассоциативности (см. [1]–[3]). При любом t алгебра $A(t)$ является коммутативной ассоциативной алгеброй с заданной на ней невырожденной симметричной билинейной формой $\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}$, которая является инвариантной относительно умножения в алгебре, т.е. $\langle e_i \circ e_j, e_k \rangle = \langle e_i, e_j \circ e_k \rangle$ ($\eta_{is} \eta^{sj} = \delta_i^j$ по определению). Кроме того, обычно требуют, чтобы элемент e_1 всегда являлся единицей в алгебре $A(t)$, что эквивалентно дополнительному условию $\eta_{ij} = \partial^3 F / \partial t^1 \partial t^i \partial t^j$ (см. [1]–[3]), но мы в данной статье откажемся от этого требования (см. также [4]–[6]). Конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра с заданной на ней невырожденной инвариантной симметричной билинейной формой называется алгеброй Фробениуса (отметим, что обычно дополнительно требуют наличия единицы в алгебре Фробениуса). Соответственно, функции $F(t)$, являющиеся решениями уравнений ассоциативности (1), описывают N -параметрические деформации N -мерных алгебр Фробениуса, которые называются *потенциальными*, а функция $F(t)$ называется *потенциалом* деформации. Рассмотрим теперь функцию тех же N переменных $\Phi(t^1, \dots, t^N)$, удовлетворяющую следующим двум условиям:

- 1) гессиан этой функции невырожден, т.е. $\mu_{ij}(t^1, \dots, t^N) = \partial^2 \Phi / \partial t^i \partial t^j$, $\det(\mu_{ij}) \neq 0$, $\mu^{is} \mu_{sj} = \delta_j^i$;
- 2) для любого $t = (t^1, \dots, t^N)$ функции $b_{jk}^i(t^1, \dots, t^N) = \mu^{is}(t) \partial^3 \Phi / \partial t^s \partial t^j \partial t^k$ задают структурные константы ассоциативной алгебры $L(t)$ в N -мерном линейном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_N$ и умножением $e_i * e_j = b_{ij}^k(t) e_k$.

Условие ассоциативности $(e_i * e_j) * e_k = e_i * (e_j * e_k)$ приводит к системе нелинейных уравнений

$$(2) \quad \mu^{sr}(t) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^s \partial t^i \partial t^j} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^k \partial t^l \partial t^r} = \mu^{sr}(t) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^s \partial t^i \partial t^k} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial t^j \partial t^l \partial t^r}.$$

При любом t алгебра $L(t)$ является коммутативной ассоциативной алгеброй с заданной на ней невырожденной симметричной билинейной формой $\langle e_i, e_j \rangle = \mu_{ij}(t)$, которая инвариантна относительно умножения в алгебре: $\langle e_i * e_j, e_k \rangle = \langle e_i, e_j * e_k \rangle$. Таким образом, функции $\Phi(t)$, являющиеся решениями системы (2), также описывают N -параметрические деформации N -мерных алгебр Фробениуса.

ПРИМЕР. В случае $N = 2$ система (2) эквивалентна уравнению

$$(3) \quad \Phi_{22}(\Phi_{111}\Phi_{122} - \Phi_{112}^2) + \Phi_{12}(\Phi_{112}\Phi_{122} - \Phi_{111}\Phi_{222}) + \Phi_{11}(\Phi_{112}\Phi_{222} - \Phi_{122}^2) = 0,$$

где введены естественные обозначения, используемые всюду далее в статье: $\Phi_{ij} = \partial^2 \Phi / \partial t^i \partial t^j$, $\Phi_{ijk} = \partial^3 \Phi / \partial t^i \partial t^j \partial t^k$. Уравнение (3), а также система (2) при любом N , – интегрируемы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 96-01-01623), РФФИ-ННИО (грант № 96-01-00050G) и INTAS (грант № 96-0770).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. В общем случае произвольного N уравнения ассоциативности (2) эквивалентны условиям совместности для следующей линейной системы:

$$(4) \quad \partial \Psi_i / \partial t^j = z b_{ij}^k(t) \Psi_k(t), \quad 1 \leq i, j, k \leq N,$$

где $b_{ij}^k(t) = \mu^{ks}(t) \Phi_{sij}(t)$, $z = \text{const}$ – произвольный параметр.

Для системы (1) аналогичное утверждение (для структурных констант $c_{jk}^i(t)$) доказано Дубровиным в [3].

На алгебре $L(t)$ кроме билинейной формы $(e_i, e_j) = \mu_{ij}(t)$ определена еще одна невырожденная симметричная билинейная форма, а именно $\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}$. Аналогично, на алгебре $A(t)$ кроме билинейной формы $\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}$ определена невырожденная симметричная билинейная форма $(e_i, e_j) = \mu_{ij}(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Если форма η_{ij} является инвариантной на алгебре $L(t)$, т. е.

$$(5) \quad \langle e_i * e_j, e_k \rangle = \langle e_i, e_j * e_k \rangle,$$

то функция $\Phi(t)$ удовлетворяет системе (1). Аналогично, если форма $\mu_{ij}(t)$ является инвариантной на алгебре $A(t)$ (это условие эквивалентно условию (5)), то функция $F(t)$ удовлетворяет системе (2). В обоих этих случаях уравнения ассоциативности (1) и (2) эквивалентны.

Условие (5) эквивалентно системе нелинейных уравнений на функцию $\Phi(t)$:

$$(6) \quad \eta^{sr} \Phi_{ri} \Phi_{sjk} = \eta^{sr} \Phi_{rk} \Phi_{sji}.$$

Это условие играет важную роль в задаче классификации согласованных пуассоновых структур гидродинамического типа (см. [7]), и мы будем называть его *условием согласованной потенциальной деформации фробениусовых алгебр $A(t)$ и $L(t)$* .

ТЕОРЕМА 2. Функция $\Phi(t)$, являющаяся решением нелинейных систем (2) и (6), порождает пару согласованных гамильтоновых операторов гидродинамического типа (здесь $t^i = t^i(x)$, $i = 1, \dots, N$):

$$K^{ij} = \eta^{ij} d/dx, \quad M^{ij} = \eta^{is} \eta^{jr} \Phi_{sr}(t(x)) d/dx + 1/2 \eta^{is} \eta^{jr} \Phi_{srk}(t(x)) t_x^k.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N = 2$ и $\eta^{ij} = \varepsilon^i \delta^{ij}$, где $\varepsilon^i = \pm 1$, $i = 1, 2$. Тогда функция $\Phi(t)$ является решением нелинейных систем (2) и (6) тогда и только тогда, когда эта функция $\Phi(t)$ является решением линейного уравнения в частных производных второго порядка

$$(7) \quad \alpha(\varepsilon^1 \Phi_{11} - \varepsilon^2 \Phi_{22}) = \beta \Phi_{12},$$

где α и β – произвольные константы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Witten E. // Surv. Diff. Geom. 1991. V. 1. P. 243–310. [2] Dijkgraaf R., Verlinde H., Verlinde E. // Nucl. Phys. 1991. V. B 352. P. 59–86. [3] Dubrovin B. // Lect. Notes Math. 1996. V. 1620. P. 120–348; hep-th/9407018. [4] Mokhov O. I. // Geometry from the Pacific Rim. Proc. Pacific Rim Geometry Conf. National Univ. Singapore, December 12–17, 1994. Berlin: Walter de Gruyter, 1997. P. 285–309. [5] Ferapontov E. V., Mokhov O. I. // Proc. First Int. Workshop “Nonlinear Physics”. Gallipoli (Lecce), Italy. 29 June – 7 July, 1995. Singapore: World Scientific, 1996. P. 104–115. [6] Мохов О. И. Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МИРАН, 1996. [7] Мохов О. И. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 173–174.

Центр нелинейных исследований
при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru

Принято редколлегией
22.01.1998