Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бакурадзе, М. Джибладзе, В. В. Вершинин, Характеристические классы и трансферные соотношения в кобордизмах, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm400>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 10:24:53

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ И ТРАНСФЕРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В КОБОРДИЗМАХ

М. БАКУРАДЗЕ, М. ДЖИБЛАДЗЕ, В. В. ВЕРШИНИН

Большинство соотношений для элементов конечного порядка в кольце симплектических кобордизмов между элементами Рея φ_i [1] и свободными образующими в размерностях до 32 [2] могут быть условно разбиты на три типа: первому типу соответствуют соотношения, которые следуют, главным образом, из соотношений в целочисленной части MSp_{4n} . Более детально, соотношения первого типа имеют вид $(x + y)\varphi_i = 0$ и следуют из того факта, что сумма свободных образующих $x + y$ делится на 2, тогда как элементы Рея имеют порядок 2. Соотношения второго типа имеют вид $z\varphi_i = 0$, где z снова есть $4n$ -мерная образующая свободной части. Что касается соотношений третьего типа, то оказывается, что они могут быть включены в серию соотношений следующей природы: большинство $4n$ -мерных образующих с малыми n после умножения на элементы Рея φ_i для всех $i \geq 0$ принадлежат идеалу, порожденному элементами Рея малых размерностей.

Пусть ζ есть универсальное $Sp(1)$ -расслоение, тогда $\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_3$ есть симплектическое расслоение над $BSp(1) \times BSp(1) \times BSp(1)$. Рассмотрим первый симплектический класс Понтрягина–Коннера–Флойда

$$p_1(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_3) = \sum a_{klm} p_1^k(\zeta_1) p_1^l(\zeta_2) p_1^m(\zeta_3).$$

Значения гомоморфизма Гуревича $h: \varphi_*(MSp) \rightarrow H_*(MSp) = Z[q_1, q_2, \dots]$ на коэффициентах a_{klm} изучались в [3]. В малых размерностях имеем $h(a_{100}) = h(a_{010}) = h(a_{001}) = 4$;

$$\begin{aligned} h(a_{200}) &= h(a_{020}) = h(a_{002}) = 0; \\ h(a_{110}) &= h(a_{101}) = h(a_{011}) = 24q_1; \\ h(a_{111}) &= 360q_2; \\ h(a_{210}) &= \dots = h(a_{012}) = 60q_2 - 24q_1^2; \\ h(a_{300}) &= \dots = h(a_{003}) = 0; \\ h(a_{220}) &= \dots = h(a_{022}) = 280q_3 - 120q_1q_2 + 24q_1^3; \\ h(a_{310}) &= \dots = h(a_{013}) = 112q_3 - 96q_1q_2 + 48q_1^3; \\ h(a_{211}) &= \dots = h(a_{112}) = 1680q_3 - 360q_1q_2; \\ h(a_{122}) &= \dots = h(a_{221}) = 75600q_4 - 3360q_1q_3 + 360q_1^2q_2; \\ h(a_{410}) &= \dots = h(a_{014}) = 180q_4 - 360q_1q_3 + 420q_1^2q_2 - 120q_2^2 - 120q_1^4. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления значений гомоморфизма Гуревича на образующих z_i малых размерностей MSp_{4n} дают выражение z_i в терминах коэффициентов a_{klm} . Нашим основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *В терминах коэффициентов a_{klm} структура MSp_{4k} , $k \leq 4$, может быть проинтерпретирована следующей таблицей:*

k	MSp_{4k}	образующие
1	Z	a_{011}
2	$Z + Z$	a_{012}, a_{111}
3	$Z + Z + Z$	$a_{022}, a_{011}a_{111}, a_{211}$
4	$\oplus^5 Z$	$a_{014}, a_{011}a_{211} \cong a_{012}a_{111}, a_{122}, a_{111}^2, 2y_4$

Для всех $i \geq 0$ имеем

- $\varphi_i a_{011} = \varphi_i a_{012} = \varphi_i a_{022} = \varphi_i a_{014} = 0$,
- $\varphi_i a_{111}$ и $\varphi_i a_{122}$ принадлежат идеалу $\varphi_0 MSp^*$;
- $\varphi_i a_{211}$ принадлежат идеалу $\varphi_0 MSp^* + \varphi_1 MSp^*$.

Работа первого автора поддержана CRDF (грант GM1-2083);

Работа второго автора поддержана INTAS (грант 93-2618-EXT) и TMR (грант ERB FMRX CT-97-0107);

Работа третьего автора поддержана РФФИ (грант № 99-01-00574).

Доказательство теоремы использует результаты работ [1]–[11] и, главным образом, основывается на предложениях, приведенных ниже. Пусть ξ есть универсальное $U(1)$ -расслоение, Λ есть универсальное $Spin(3)$ -расслоение. Тогда расслоение $\pi: BU(1) \rightarrow BSp(1)$ является сферическим пучком, соответствующим Λ , и $\pi^*(\zeta) = \xi + \bar{\xi}$; $\pi^*(\Lambda) = \xi^2 + R$; $\zeta \otimes_H \zeta = \Lambda + R$. Пусть N есть нормализатор тора $U(1)$ в $Sp(1)$. Расслоение $p: BN \rightarrow BSp(1)$ совпадает с проективизацией расслоения Λ , и мы имеем каноническое расщепление $p^*(\Lambda) = \mu + \nu$, определенное проективизацией p , где μ и ν суть двумерное и линейное вещественные расслоения. Для двулистного накрытия $q: BU(1) \rightarrow BN$ имеем $q^*(\mu) = \xi^2$ и $q^*(\nu) = R$. Пусть $\tau(\pi)$ и $\tau(p)$ суть отображения трансфера [4] расслоений π и p .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Имеем: $\pi^* \tau(\pi)^* = 1 + I^*$ и $\pi^* \tau(p)^* = q^*$.

Это предложение следует из результатов работы [5].

Из определения трансфера Атьи вытекает следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для трансфера Атьи! двулистного накрытия $1 \times q: BU(1) \times BU(1) \rightarrow BU(1) \times BN$ имеем

$$(\xi_1 \xi_2^2 + \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2^2)! = (\xi_1 + \bar{\xi}_1) \otimes_{\mathbb{R}} \mu.$$

Пусть f есть отображение $f: BN \rightarrow BZ_2$, индуцированное проекцией N на группу Вейля Z_2 , и пусть $\tau(1 \times q)^*$ есть гомоморфизм трансфера для приведенного выше двулистного накрытия $1 \times q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Существуют элементы γ_i в $MSp^*(RP(\infty))$, для которых выполняется следующая формула

$$\tau(1 \times q)^*(p_1(\xi_1 \xi_2^2 + \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2^2)) = p_1((\xi_1 + \bar{\xi}_1) \otimes_{\mathbb{R}} \mu) + \sum_{i \geq 0} f^*(\gamma_i) p_2^i((\xi_1 + \bar{\xi}_1) \otimes_{\mathbb{R}} \mu).$$

Доказательство следует из результатов работы [6] и предыдущего предложения.

Из [7] и [8] получаем следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для всех $a \in MSp^*(BU(1))$ имеем $\varphi_j \tau(\pi)^*(a) = 0$.

Соединяя результаты предыдущих предложений, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В $MSp^*(HP(4) \times HP(4))$ следующие соотношения справедливы для всех $j \geq 0$:

- a) $\varphi_0 p_1(\zeta_1) + \varphi_1 p_1^2(\zeta_1) + \varphi_2 p_1^4(\zeta_1)$ делит $\varphi_j p_1(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2^2)$;
- b) $\varphi_j p_1(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{R}} \zeta_2) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В размерности 32 имеется элемент y_4^2 такой, что $\varphi_2 y_4^2$ не принадлежит идеалу, порожденному φ_0 и φ_1 . Более того, $\varphi_{2i} y_4^2$ не принадлежит идеалу, порожденному $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{2i-1}$, $i \geq 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Ray // Topology. 1971. V. 10. P. 261–270. [2] В. В. Вершинин // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. С. 50–63. [3] M. Imaoka // Hiroshima Math. J. 1982. V. 12. №1. P. 151–181. [4] J. C. Becker, D. H. Gottlieb // Topology. 1975. V. 14. P. 1–12. [5] M. Feshbach // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 251. P. 139–169. [6] F. W. Roush. Transfer in Generalized Cohomology Theories. Budapest: Akademiai Kiado, 1999. [7] В. Г. Горбунов // Матем. сб. 1990. Т. 181. С. 506–520. [8] J. M. Boardman. Stable Homotopy Theory. University of Warwick, 1966. [9] М. Бакурадзе, Р. Надирадзе // Труды Тбилис. матем. ин-та. 1991. Т. 94. С. 12–28. [10] В. М. Бухштабер // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Т. 10. М.: ВИНТИ, 1977. С. 5–178. [11] A. Dold // Math. Z. 1976. V. 148. P. 215–244.

Тбилисский математический институт им. Размадзе АН Грузии,

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева

E-mail: maxo@rmi.acnet.ge, jib@rmi.acnet.ge, verash@math.nsc.ru

Принято редколлегией

29.03.2001