Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Балащенко, Однородные эрмитовы f -многообразия, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm401>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:18:43

ОДНОРОДНЫЕ ЭРМИТОВЫ f -МНОГООБРАЗИЯ

В. В. БАЛАШЕНКО

Инвариантным структурам традиционно (и заслуженно) принадлежит ведущая роль при исследовании дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях. Именно благодаря широкому классу инвариантных примеров был получен ряд глубоких результатов в период бурного развития эрмитовой геометрии (см., например, [1]–[3]), причем поток исследований здесь не ослабевает и сейчас. Наряду с этим изучение почти контактных структур и их приложений, f -структур К. Яно ($f^3 + f = 0$) и других обобщений привело к созданию в 80-х годах в работах В. Ф. Кириченко стройной концепции *обобщенной эрмитовой геометрии* (см., например, [4]). Число исследований в этом новом направлении стремительно растет, причем в различных аспектах (см., например, [5]), а потому все ощутимее становится отсутствие инвариантных примеров.

Ситуация качественно изменилась в последнее время в связи с полным решением проблемы описания канонических структур классического типа на регулярных Φ -пространствах [6]. Был обнаружен богатый запас канонических f -структур (в том числе почти комплексных структур), которые позволили предъявить большие классы инвариантных примеров в обобщенной эрмитовой геометрии (см. [7], [8]), что обеспечило преемственность классических результатов Дж. Вольфа и А. Грея в эрмитовой геометрии.

Алгебраической основой выделения важнейших классов *обобщенных почти эрмитовых структур* являются свойства присоединенной Q -алгебры [4]. В случае метрической f -структуры композиционный тензор T вычислен в [4] явно:

$$4T(X, Y) = f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y),$$

где X, Y – векторные поля на M . Антикоммутативность Q -алгебры ($T(X, X) = 0$) определяет *обобщенные G_1 -структуры*, а ее абелевость ($T(X, Y) = 0$) – *обобщенные эрмитовы структуры*. Для случая метрической f -структуры будем называть их *$G_1 f$ -структурой* и *эрмитовой f -структурой* соответственно. Очевидно, что в частном случае $f = J$ ($J^2 = -1$) получаем в точности классические понятия G_1 -структуры и эрмитовой структуры (см., например, [9]). При этом эрмитова f -структура, в отличие от классического случая, не всегда интегрируема.

В данной заметке указаны обширные классы инвариантных $G_1 f$ -структур и эрмитовых f -структур, при этом особую роль играют канонические f -структуры на однородных Φ -пространствах порядка k (*k -симметрических пространств* в терминологии [10]).

Пусть $(G/H, g, f)$ – однородное редуктивное пространство группы Ли G с инвариантной (псевдо-) римановой метрикой g и инвариантной метрической f -структурой, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Условимся не различать в обозначениях инвариантные структуры на G/H и их значения в точке $o = H$. Структура f порождает ортогональное разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \text{Im } f$ и $\mathfrak{m}_2 = \text{Ker } f$ определяют соответственно первое и второе фундаментальные распределения для f . Напомним, что $(G/H, g)$ называется *естественно редуктивным*, если $g([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z) = g(X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}})$ для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, где индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения.

ТЕОРЕМА 1. *Любая инвариантная метрическая f -структура на естественно редуктивном пространстве $(G/H, g)$ является $G_1 f$ -структурой.*

Как частный случай, отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ. *На естественно редуктивном пространстве $(G/H, g)$ любая инвариантная почти эрмитова структура принадлежит классу G_1 .*

Отметим, что это утверждение по эрмитовой геометрии получено в работе [11].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $(G/H, g, f)$ – естественно редуктивное пространство с инвариантной метрической f -структурой, для которой выполняется условие $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$. Тогда G/H – эрмитово f -многообразие.*

Далее будем рассматривать регулярные Φ -пространства (обобщенные симметрические пространства [10]), на которых имеется значительный запас канонических структур f и J [6].

Пусть G/H – регулярное Φ -пространство, определяемое автоморфизмом Φ связной группы Ли G , $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – каноническое редуктивное разложение, соответствующее автоморфизму $\varphi = d\Phi_e$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathfrak{m} = A_\varphi \mathfrak{g}$, где $A_\varphi = \varphi - \text{id}$ [12]. Обозначим через θ сужение φ на $\mathfrak{m}$. Инвариантная аффинорная структура F на G/H называется *канонической* [6], если она в точке o является полиномом $F = F(\theta)$. Все однородные Φ -пространства порядка k ($\Phi^k = \text{id}$) регулярны [12], и для таких пространств в [6] получены формулы для всех канонических структур типов f и J . Всюду в дальнейшем под естественно редуктивным разложением подразумевается каноническое редуктивное разложение для G/H . Например, для полупростой группы G метрика g , порождаемая формой Киллинга на любом регулярном Φ -пространстве G/H , естественно редуктивна (см. [12]). Важно отметить, что все канонические структуры f и J с такой метрикой согласованы [7].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(G/H, g)$ – естественно редуктивное однородное Φ -пространство порядка k . Любая каноническая метрическая f -структура на G/H является $G_1 f$ -структурой, а любая каноническая почти эрмитова структура J входит в класс G_1 .

Отметим особую роль однородных Φ -пространств порядков 4 и 5:

ТЕОРЕМА 4. Естественно редуктивное Φ -пространство $(G/H, g, f)$ порядка 4, где $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$ – каноническая метрическая f -структура, является эрмитовым f -многообразием.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(G/H, g)$ – естественно редуктивное Φ -пространство порядка 5, f_1 и f_2 – канонические метрические f -структуры на G/H (см. [6]). Тогда $(G/H, g, f_i)$, $i = 1, 2$, является эрмитовым f -многообразием.

Таким образом, указанные в теоремах 4 и 5 канонические f -структуры обеспечивают широкий класс первых примеров инвариантных эрмитовых f -структур, которые в общем случае не являются интегрируемыми. Более того, имеющаяся детальная классификация однородных Φ -пространств порядков 4 и 5 классических компактных групп Ли (см. [13], [14]) позволяет поэтому предъявить явную серию однородных эрмитовых f -многообразий.

Известным примером риманова однородного Φ -пространства порядка 4, метрика которого не является естественно редуктивной, служит 6-мерная обобщенная группа Гейзенберга (см. [15]).

ТЕОРЕМА 6. 6-мерная обобщенная группа Гейзенберга (N, g) относительно канонической f -структуры однородного Φ -пространства порядка 4 является однородным эрмитовым f -многообразием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Wolf, A. Gray // J. Differential Geom. 1968. V. 2. №1–2. P. 77–159. [2] A. Gray // J. Differential Geom. 1972. V. 7. №3–4. P. 343–369. [3] В. Ф. Кириченко // Матем. заметки. 1981. Т. 30. №4. С. 569–582. [4] В. Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1986. С. 25–71. [5] В. Ф. Кириченко, Л. В. Липагина // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. №5. С. 127–146. [6] В. В. Балащенко, Н. А. Степанов // Матем. сб. 1995. Т. 186. №11. С. 3–34. [7] V. V. Balashchenko. Riemannian geometry of canonical structures on regular Φ -spaces // Preprint №174/1994: Ruhr-Universität Bochum, 1994. [8] В. В. Балащенко // УМН. 1999. Т. 54. №3. С. 151–152. [9] A. Gray, L. M. Hervella // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1980. V. 123. №4. P. 35–58. [10] О. Ковальский. Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984. [11] E. Abbena, S. Garbiero // Nihonkai Math. J. 1993. V. 4. №1. P. 1–15. [12] Н. А. Степанов // Изв. вузов. Матем. 1967. №3. С. 88–95. [13] J. A. Jimenez // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 306. №2. P. 715–734. [14] Gr. Tsagas, Ph. Xenos // Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.). 1987. V. 31. №1. P. 57–77. [15] F. Tricerri, L. Vanhecke. Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 83.)