Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, А. Н. Типко, К единственности решения обратной задачи спектрального анализа для сингулярного обыкновенного дифференциального оператора второго порядка, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm403>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:00:24

**К ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА
ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА**

В. В. ДУБРОВСКИЙ, А. Н. ТИПКО

Рассмотрим оператор Лежандра T в гильбертовом пространстве $L^2(-1, 1)$:

$$Ty = -(1 - x^2)y'' + 2xy',$$

где $y, Ty \in L^2(-1, 1)$. Его однократным собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$ соответствуют собственные функции

$$\vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad n = \overline{0, \infty},$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра степени n со старшим коэффициентом $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. Очевидно, что система полиномов $\vartheta_n(x)$, $n = \overline{0, \infty}$, полна в $L^2(-1, 1)$. Используя этот факт, нетрудно показать, что оператор T является самосопряженным в $L^2(-1, 1)$. Введем оператор P_i умножения на комплексную, финитную на интервале $(-1, 1)$, измеримую по Лебегу, существенно ограниченную по модулю функцию $p_i(x)$, $i = 1, 2$, в $L^2(-1, 1)$. Обозначим через $\mu_{n,i}$ собственные числа оператора $T + P_i$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности, $i = 1, 2$, $n = \overline{0, \infty}$, а соответствующие им собственные функции через $u_{n,i}$. Тогда при больших n собственные числа $\mu_{n,i}$ однократны, $i = 1, 2$. Предположим, что существует неотрицательное целое число m такое, что $\mu_{n,1} = \mu_{n,2}$ при $n = \overline{m, \infty}$. Тогда верно равенство $((p_1 - p_2)u_{n,1}, u_{n,2}) = 0$, $n = \overline{m, \infty}$. Отметим, что корневые функции $\tilde{u}_{n,i}$ оператора $T + P_i^*$ можно выбрать так, чтобы они были биортогональны корневым функциям оператора $T + P_i$, $i = 1, 2$. Так как $\bar{\mu}_{n,1} = \bar{\mu}_{n,2}$ при $n = \overline{m, \infty}$, то

$$((\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\tilde{u}_{n,1}, \tilde{u}_{n,2}) = 0, \quad n = \overline{m, \infty}. \quad (1)$$

Обозначим через $E(\mu_{n,i}, T + P_i)$ проектор Рисса для оператора $T + P_i$. При достаточно больших n имеет место равенство:

$$\begin{aligned} u_{n,i} &= E(\mu_{n,i}, T + P_i)\vartheta_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} (T + P_i - \lambda E)^{-1} \vartheta_n d\lambda \\ &= \vartheta_n + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} (T + P_i - \lambda E)^{-1} P_i (T - \lambda E)^{-1} \vartheta_n d\lambda = \vartheta_n + \alpha_{n,i}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $C_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| = d_n/2\}$, $d_n = \max\{2n, 2\}$ — расстояние от λ_n до остальной части спектра оператора T . Функции α_n^i при $d_n > 2\|P_i\|_\infty$ допускают оценку сверху по норме

$$\|\alpha_{n,i}\| \leq \|P_i\|_\infty \left(\frac{d_n}{2} - \|P_i\|_\infty \right)^{-1}, \quad \text{где } \|P_i\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{-1 \leq x \leq 1} |p_i(x)|. \quad (3)$$

Воспользовавшись равенством (2) и оценкой (3), найдем $u_{n,1}\bar{u}_{n,2} = \vartheta_n^2 + \beta_n$, где

$$\begin{aligned} \|\beta_n\| &\leq \|P_1\|_\infty \left(\frac{d_n}{2} - \|P_1\|_\infty \right)^{-1} + \|P_2\|_\infty \left(\frac{d_n}{2} - \|P_2\|_\infty \right)^{-1} \\ &\quad + \|P_1\|_\infty \|P_2\|_\infty \left(\frac{d_n}{2} - \|P_1\|_\infty \right)^{-1} \left(\frac{d_n}{2} - \|P_2\|_\infty \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя (см. [1], [2]) асимптотическое разложение полиномов Лежандра по Стильтесу, получим

$$\vartheta_n^2(-\cos \alpha) = \frac{1 - \sin(2n+1)\alpha}{\sin \alpha} \left[\frac{1}{\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] + \frac{1}{\sin^2 \alpha} O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

Наложим на функции $p_i(x)$ еще два ограничения:

$$p_i(-x) = p_i(x), \quad i = 1, 2, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ \int_0^\pi [p_1(-\cos \alpha) - p_2(-\cos \alpha)] d\alpha = 0.$$

Система тригонометрических функций $\sin((2n+1)\alpha)$, $n = \overline{0, \infty}$, образует ортогональный базис в $L^2(0, \pi/2)$. Тогда при выполнении неравенства

$$\sum_{n=l+1}^{\infty} \left\| \left[\sin \alpha u_{1,n} \bar{u}_{2,n} - \frac{1 - \sin(2n+1)\alpha}{\pi} \right] \chi_\varepsilon(-\cos \alpha) \right\|^2 < 1 \quad (5)$$

система функций

$$\left[\sin \alpha u_{1,n} \bar{u}_{2,n} \chi_\varepsilon(-\cos \alpha) - \frac{1}{\pi} - \frac{1 - \chi_\varepsilon(-\cos \alpha)}{\pi} \sin(2n+1)\alpha \right]_{n=l+1}^{\infty} \cup \{ \sin(2n+1)\alpha \}_{n=0}^l$$

образует базис Рисса в $L^2(0, \pi/2)$. Здесь χ_ε — характеристическая функция отрезка $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$, который содержит носители функций $p_i(x)$, $i = 1, 2$. В силу полученной оценки (4) неравенство (5) может быть достигнуто при достаточно больших l .

На основании сказанного выше с учетом равенства (1) можно записать

$$\sin \alpha \{p_1(\cos \alpha) - p_2(\cos \alpha)\} = \sum_{n=0}^l a_n \sin(2n+1)\alpha.$$

Так как функции $p_i(x)$, $i = 1, 2$, финитны на интервале $(-1, 1)$, то $a_n = 0$, $n = \overline{0, l}$. Потому $p_1(x) = p_2(x)$ почти всюду на $[-1, 1]$.

Итак, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если четные, финитные, измеримые по Лебегу и существенно ограниченные по модулю функции на интервале $(-1, 1)$ $p_i(x)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условию

$$\int_0^\pi [p_1(-\cos \alpha) - p_2(-\cos \alpha)] d\alpha = 0,$$

и существует неотрицательное целое число m такое, что для собственных чисел операторов $T + P_i$ справедливы равенства $\mu_{n,1} = \mu_{n,2}$, $n = \overline{m, \infty}$, тогда на отрезке $(-1, 1)$ почти всюду функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
[2] В. В. Дубровский, В. Х. Аливердиев // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 1. С. 35–40.

Магнитогорский государственный университет

Принято редколлегией
29.03.2001