Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Замятин, А. А. Ямбарцев, Классификация двух взаимодействующих цепочек символов, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm404>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:45:20

КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЦЕПОЧЕК СИМВОЛОВ

А. А. ЗАМЯТИН, А. А. ЯМБАРЦЕВ

1. Конечным словом $\alpha = x_1 x_2 \dots x_n$ называется конечная последовательность символов x_i из некоторого алфавита $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, r\}$. Обозначим через $|\alpha|$ длину слова α . Пусть $\mathcal{A}$ – множество всех конечных слов, включая пустое. Композицией двух слов $\alpha = x_1 x_2 \dots x_n$ и $\beta = y_1 y_2 \dots y_m$ назовем слово $\alpha\beta = x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$, где $x_{n+1} = y_1, \dots, x_{n+m} = y_m$.

Последовательность $\alpha = \dots y_{n-1} y_n$ символов из алфавита назовем полубесконечным словом. Его можно определить парой (n, ξ) , $n \in \mathbb{Z}$ и $\xi = \dots x_{-1} x_0$, где $x_0 = y_n, x_{-1} = y_{n-1}, \dots$ – последовательность символов с выделенной нумерацией. Такую последовательность будем называть *средой*. Множество всех полубесконечных слов обозначим через $\mathcal{A}_\infty$, а совокупность всевозможных сред – через $\mathcal{E}_\infty$. Аналогично можно определить композицию $\alpha\beta$ полубесконечного слова $\alpha = \dots x_{n-1} x_n$ с конечным словом $\beta = y_1 \dots y_m$.

2. Определим однородную цепь Маркова $\mathcal{L}_\infty$ на множестве состояний $\mathcal{A}_\infty^2 = \mathcal{A}_\infty \times \mathcal{A}_\infty$. Обозначим $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))$ состояние цепи в момент времени t . Зафиксируем некоторое натуральное d . Переходные вероятности $P\{\eta(t+1) = \beta | \eta(t) = \alpha\} \neq 0$ только в том случае, если $\beta = \rho\theta, \alpha = \rho\gamma$, где $\rho \in \mathcal{A}_\infty^2$ и $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ такие, что $|\gamma_k| = d, |\theta_k| \leq 2d$ ($k = 1, 2$). Здесь для любых пар $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{A}_\infty^2$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathcal{A}^2$ $\alpha\beta = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2) \in \mathcal{A}_\infty^2$. Предположим также, что вероятности перехода $q(\gamma, \theta) = P\{\eta(t+1) = \rho\theta | \eta(t) = \rho\gamma\}$ зависят только от γ, θ . Обозначим через $\mathcal{P}$ множество вероятностных мер на $\mathcal{E}_\infty^2 = \mathcal{E}_\infty \times \mathcal{E}_\infty$.

Для $\alpha \in \mathcal{A}_\infty$ выражение $[\alpha]_n = \gamma$, где $|\gamma| = n$, означает, что $\alpha = \rho\gamma$ для некоторого $\rho \in \mathcal{A}_\infty$. Корреляционные функции

$$p_t(\gamma_1, \gamma_2) = P\{[\eta_1(t)]_{|\gamma_1|} = \gamma_1, [\eta_2(t)]_{|\gamma_2|} = \gamma_2\},$$

где $\gamma_k \in \mathcal{A}$, однозначно определяют меру $\mu(t) \in \mathcal{P}$. Мере μ назовем *инвариантной* мерой для цепи $\mathcal{L}_\infty$, если $\mu(t) = \mu$ для любого t . Инвариантная мера μ называется *экстремальной*, если она не представима в виде выпуклой линейной комбинации других инвариантных мер. Пусть μ – инвариантная мера и $p_\mu(\gamma), \gamma \in \mathcal{A}^2$, – ее корреляционные функции. Каждой инвариантной μ сопоставим *вектор сноса* $v(\mu)$ с компонентами

$$v_i(\mu) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2} \sum_{\theta_1, \theta_2} (|\theta_i| - d) q((\gamma_1, \gamma_2), (\theta_1, \theta_2)) p_\mu(\gamma_1, \gamma_2),$$

где $|\gamma_k| = d, |\theta_k| \leq 2d$ ($k = 1, 2$), и *вектор знаков*

$$\text{sign}(\mu) = (\text{sign}(v_1(\mu)), \text{sign}(v_2(\mu))), \quad \text{sign}(v_i(\mu)) = -, 0, +.$$

Инвариантная мера μ называется мерой типа (σ_1, σ_2) , если $\text{sign}(\mu) = (\sigma_1, \sigma_2)$, где $\sigma_i = -, 0, +$.

3. В [1] приведен пример сосуществования мер типов $(-, +)$ и $(-, -)$. Здесь мы построим пример цепи $\mathcal{L}_\infty$, которая имеет инвариантные меры типов $(-, +)$, $(+, -)$, $(-, -)$. Пусть $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ и $d = 1$. Предположим, что вероятность каждого из переходов: $(1, 1) \rightarrow (1, \emptyset), (2, 2) \rightarrow (\emptyset, 2), (1, 2) \rightarrow (\emptyset, \emptyset), (2, 1) \rightarrow (\emptyset, \emptyset)$ больше, чем $1 - \varepsilon$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ существуют инвариантные меры типов $(-, +)$, $(+, -)$ и $(-, -)$.

4. Основной объект нашего внимания – цепь Маркова $\mathcal{L}$ на множестве состояний $\mathcal{A}^2$. Пусть $\Lambda \subseteq \{1, 2\}$ и $F(\Lambda) = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_i| \geq d, i \in \Lambda; |\alpha_i| < d, i \notin \Lambda\}$. $F(1), F(2)$ будем называть гранями. Пусть $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ – состояние цепи $\mathcal{L}$ в момент t . Зададим вероятности перехода $p_{\alpha\beta} = P\{\alpha(t+1) = \beta \mid \alpha(t) = \alpha\}$ следующим образом. Если $\alpha \in F(1, 2)$, то вероятности переходов такие же, как в случае цепи $\mathcal{L}_\infty$. Если $\alpha \in F(1)$, то переходные вероятности $p_{(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)} \neq 0$ только в том случае, если $\alpha_1 = \rho_1 \gamma_1, \beta_1 = \rho_1 \theta_1$, где $|\gamma_1| = d, |\theta_1| \leq 2d, |\beta_2| \leq d$. Положим $q_1((\gamma_1, \alpha_2), (\theta_1, \beta_2)) = p_{(\rho_1 \gamma_1, \alpha_2), (\rho_1 \theta_1, \beta_2)}$. Аналогично определяются переходные вероятности $q_2((\alpha_1, \gamma_2), (\beta_1, \theta_2))$ на грани $F(2)$. Относительно переходных вероятностей $p_{\alpha\beta}$ для $\alpha \in F(\emptyset)$ предположим ограниченность скачков: длина каждого слова за один шаг изменяется не более чем на d . Мы будем предполагать также, что все определенные выше переходные вероятности ненулевые.

5. С гранями $F(1), F(2)$ свяжем индуцированные марковские цепи $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ на множествах $\mathcal{D}_1 = \mathcal{A}_\infty \times \mathcal{A}$ и $\mathcal{D}_2 = \mathcal{A} \times \mathcal{A}_\infty$ соответственно. Пусть $\zeta^{(\Lambda)}(t) = (\zeta_1^{(\Lambda)}(t), \zeta_2^{(\Lambda)}(t)) \in \mathcal{D}_\Lambda$ – состояние индуцированной цепи $\mathcal{L}_\Lambda$ в момент t . Эволюция цепи $\mathcal{L}_\Lambda$ определяется вероятностями перехода $q(\gamma, \theta), q_\Lambda(\gamma, \theta)$.

Пусть $\tilde{\mathcal{D}}_1 = \mathcal{E}_\infty \times \mathcal{A}$, и $\tilde{\mathcal{D}}_2 = \mathcal{A} \times \mathcal{E}_\infty$. Обозначим $\mathcal{P}_\Lambda$ множество вероятностных мер на пространстве $\tilde{\mathcal{D}}_\Lambda$. Корреляционные функции цепей $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

$$p_t^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) = P\{[\zeta_1^{(1)}(t)]_{|\gamma_1|} = \gamma_1, \zeta_2^{(1)}(t) = \gamma_2\},$$

$$p_t^{(2)}(\gamma_1, \gamma_2) = P\{\zeta_1^{(2)}(t) = \gamma_1, [\zeta_2^{(2)}(t)]_{|\gamma_2|} = \gamma_2\}$$

для любого t однозначно определяют меры $\mu^{(1)}(t) \in \mathcal{P}_1, \mu^{(2)}(t) \in \mathcal{P}_2$. Меры $\mu^{(\Lambda)}$ назовем *инвариантной* мерой для цепи $\mathcal{L}_\Lambda$, если $\mu^{(\Lambda)}(t) = \mu^{(\Lambda)}$ для любого t . Пусть $\mathcal{M}_\Lambda \subset \mathcal{P}_\Lambda$ – множество инвариантных мер цепи $\mathcal{L}_\Lambda$. Грань $F(\Lambda)$ называется *эргодической*, если $\mathcal{M}_\Lambda \neq \emptyset$. Каждой инвариантной мере ν цепи $\mathcal{L}_\Lambda$ сопоставим *вектор сноса*

$$v^{(\Lambda)}(\nu) = \sum_{\gamma_k, \theta_k} (|\theta_\Lambda| - d) q((\gamma_1, \gamma_2), (\theta_1, \theta_2)) \sum_{\beta \in \mathcal{A}} p_\nu^{(\Lambda)}(\gamma_1, \beta \gamma_2) \\ + \sum_{\gamma_k, \theta_k} (|\theta_\Lambda| - d) q_\Lambda((\gamma_1, \gamma_2), (\theta_1, \theta_2)) p_\nu^{(\Lambda)}(\gamma_1, \emptyset)$$

и знак

$$\text{sign}(\nu) = \text{sign}(v^{(\Lambda)}(\nu)).$$

Инвариантная мера ν называется мерой типа (σ) , если $\text{sign}(\nu) = \sigma$, где $\sigma = -, 0, +$. Мы предполагаем, что $\text{sign}(\nu) \neq 0$ для всех $\nu \in \mathcal{M}_\Lambda, \Lambda = 1, 2$.

ТЕОРЕМА 1. 1. Если марковская цепь $\mathcal{L}_\infty$ имеет экстремальную инвариантную меру типа $(+, +)$, тогда цепь $\mathcal{L}$ транзитивна.

2. Если для некоторой эргодической грани существует инвариантная мера типа $(+)$, тогда марковская цепь $\mathcal{L}$ транзитивна.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что все инвариантные меры цепи $\mathcal{L}_\infty$ имеют один и тот же тип: $(-, -)$, $(-, +)$ или $(+, -)$. Тогда существует по крайней мере одна эргодическая грань, и если для любой эргодической грани существует хотя бы одна инвариантная мера типа $(-)$, то цепь Маркова $\mathcal{L}$ эргодична.

Первое утверждение теоремы 1 доказано в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Малышев // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 59–86. [2] А. А. Замятин, А. А. Ямбарцев // Фунд. и прикл. матем. 1996. Т. 2. № 4. С. 1029–1043.