Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Зеленов, Теорема плотности Зельмановича в градуированном случае,
УМН, 2001, том 56, выпуск 3, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm405>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:39:31

ТЕОРЕМА ПЛОТНОСТИ ЗЕЛЬМАНОВИЧА В ГРАДУИРОВАННОМ СЛУЧАЕ

С. В. ЗЕЛЕНОВ

В работе вводятся понятия градуированного критически-сжимаемого модуля, квази-инъективной оболочки, изучается их строение и доказывается теорема плотности для градуированного слабо примитивного кольца.

Пусть H и G – две подгруппы. Множество A называется (H, G) -полигоном, если H действует на A слева, а G – справа, причем если $a \in A$, $h \in H$, $g \in G$, то $(ha)g = h(ag)$. Пусть дополнительно для всяких $a, a' \in A$, $g, g' \in G$, $h, h' \in H$ выполняются свойства: $ag = ag' \Rightarrow g = g'$; $ag = a'g \Rightarrow a = a'$; $ha = h'a \Rightarrow h = h'$; $ha = ha' \Rightarrow a = a'$.

Везде далее R – градуированное по G ассоциативное кольцо без единицы, M – градуированный по A правый R -модуль.

Назовем градуированный модуль *сжимаемым*, если он вкладывается однородным мономорфизмом в каждый свой ненулевой градуированный подмодуль; если, кроме того, он не может быть вложен ни в какой свой собственный градуированный фактор-модуль, назовем его *критически-сжимаемым*. Назовем градуированный модуль *униформным*, если любая пара его ненулевых градуированных подмодулей имеет ненулевое пересечение. *Частичным эндоморфизмом* градуированного модуля M назовем гомоморфизм $N \rightarrow M$, где N – градуированный подмодуль в M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для сжимаемого градуированного модуля M эквивалентно: (1) M критически-сжимаем; (2) каждый его ненулевой однородный частичный эндоморфизм является мономорфизмом. Кроме того, любой градуированный модуль, удовлетворяющий условию (2), униформен.

Модуль, удовлетворяющий условию (2), назовем *моноформным*.

Градуированный модуль назовем *квази-инъективным*, если каждый его градуированный частичный эндоморфизм продолжается до градуированного эндоморфизма всего модуля. Каждый модуль M может быть вложен в наименьший градуированный квази-инъективный модуль $\overline{M}$, который назовем его *квази-инъективной оболочкой*.

Пусть $\widehat{M}$ – инъективная оболочка модуля M , $\Lambda = \text{END}(\widehat{M})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (1) ΛM является пересечением всех градуированных квази-инъективных подмодулей модуля $\widehat{M}$, содержащих M ; (2) ΛM – градуированный квази-инъективный модуль; (3) градуированный модуль M квази-инъективен тогда и только тогда, когда $M = \Lambda M$.

СЛЕДСТВИЕ. (1) $\overline{M} = \Lambda M$; (2) $\overline{M} = \Delta M$, где $\Delta = \text{END}(\overline{M}_R)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (1) Если M_R – градуированный моноформный модуль, то однородные элементы из $D = \text{END}(M_R)$ однозначно продолжаются до элементов из Δ , причем Δ оказывается градуированным кольцом с делением. (2) Если M_R критически-сжимаем, то D – градуированная правая область Оре с кольцом частных Δ .

Назовем *слабо-примитивным* градуированное кольцо, обладающее точным критически-сжимаемым градуированным модулем. Назовем R -решеткой тройку $(\Delta, \Delta V_R, M_R)$, где V – A -градуированный (Δ, R) -бимодуль, Δ – H -градуированное кольцо с делением, $\Delta M = V$, R действует точно на M .

ТЕОРЕМА. Для градуированного кольца R эквивалентны условия:

- (1) R слабо-примитивно;
- (2) существует такая R -решетка $(\Delta, \Delta V_R, M_R)$, что для данных Δ -независимых элементов $v_1, \dots, v_k \in h(V)$ существует такой $0 \neq a \in h(\Delta)$, что для любых $n_1, \dots, n_k \in M$ найдется $r \in R$ с $an_i = v_i r \in M$ для всех $i = 1, \dots, k$, причем, если $k = 1$ и $n_1 \in h(M)$, то $r \in h(R)$;

(3) существует такая R -решетка $(\Delta, \Delta V_R, M_R)$, что для данных конечномерных градуированных Δ -подпространств U и $U' = \sum_{i=1}^k \Delta m_i$ модуля V , где $m_1, \dots, m_k \in h(M)$, и $\tau \in \text{END}(\Delta V)$ существуют такие $r, s \in R$, что $(\tau r - s)|_U = 0$ и $r|_{U'}$ является градуированным автоморфизмом, причем если $U = \Delta m$ и $U' = \Delta m'$ при $m, m' \in h(M)$ и $m\tau \in h(V)$, то $s \in h(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2): предложение 1, следствие и предложение 3 позволяют в качестве R -решетки выбрать $(\Delta, \Delta \overline{M}_R, M_R)$; для поиска нужного эндоморфизма a применяется теорема слабой плотности (см. [1]).

(2) $\Rightarrow$ (3) – аналогично неградуированному случаю (см. [2]); заметим, что однородность a в условии (2) гарантирует его обратимость, которая требуется при доказательстве.

(3) $\Rightarrow$ (1): критически-сжимаемым оказывается модуль $\{mr + mq \mid q \in \mathbb{Q}\}$ для $0 \neq m \in h(M)$; при этом однородность s в “одномерном” условии (3) гарантирует однородность мономорфизма, требующуюся в определении сжимаемости.

Пользуюсь случаем выразить благодарность А. В. Михалёву за постановку задач и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Зеленев // Труды 6-х математических чтений МГСУ. Москва, 1999. С. 107–110.
 [2] J. Zelmanowitz // Comm. Algebra. 1981. V. 9. № 1. P. 23–45.

Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: szelenov@rambler.ru

Принято редколлегией
 29.03.2001