Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Изместьев, Свободное действие тора на многообразии $\mathcal{Z}_P$ и группа проективностей многогранника P , *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:08:06

СВОБОДНОЕ ДЕЙСТВИЕ ТОРА НА МНОГООБРАЗИИ $\mathcal{Z}_P$ И ГРУППА ПРОЕКТИВНОСТЕЙ МНОГОГРАННИКА P

И. В. ИЗМЕСТЬЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (см. [1], [2]). Пусть P – простой выпуклый многогранник размерности d с m фасетами $F_1, \dots, F_m$, и пусть $\mathbb{T}^m$ обозначает m -мерный тор $(\mathbb{S}^1)^m$. Введем на декартовом произведении $P \times \mathbb{T}^m$ следующее отношение эквивалентности:

$$(p_1, g_1) \sim (p_2, g_2) \iff p_1 = p_2 \text{ и } g_1^{-1}g_2 \in \bigoplus_{p_1 \in F_i} \mathbb{T}_i,$$

где $\mathbb{T}_i$ обозначает i -ю координатную подгруппу группы $\mathbb{T}^m$. Соответствующее факторпространство $(P \times \mathbb{T}^m)/\sim$ является многообразием и обозначается $\mathcal{Z}_P$.

На многообразии $\mathcal{Z}_P$ действует группа $\mathbb{T}^m$ по правилу $h[p, g] = [p, hg]$. Пространством орбит $\mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^m$ является многогранник P . Топология многообразия $\mathcal{Z}_P$ тесно связана с комбинаторикой многогранника P , и эта связь была подробно изучена в работе [2].

Пусть имеется мономорфизм $\iota: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{T}^m$ такой, что индуцированное им действие тора $\mathbb{T}^k$ на многообразии $\mathcal{Z}_P$ свободно. Тогда факторпространство $\mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^k$ снова является многообразием, на котором действует группа $\mathbb{T}^{m-k} \cong \mathbb{T}^m/\mathbb{T}^k$ с пространством орбит P (действие определено с точностью до автоморфизма группы $\mathbb{T}^{m-k}$). Обозначим через $\kappa(P)$ максимальное k , для которого существует мономорфизм с указанным свойством. В. М. Бухштабером было предложено изучать число $\kappa(P)$ как инвариант комбинаторной структуры многогранника P . Известно, что

$$1 \leq \kappa(P) \leq m - d.$$

В случае, когда второе из этих неравенств обращается в равенство, фактормногообразие $\mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^{m-d}$ называется квазиторическим многообразием. Квазиторические многообразия впервые появились в работе [1].

В настоящей работе дается нижняя оценка числа $\kappa(P)$, использующая группу проективностей комплекса граней многогранника P – комбинаторный инвариант симплициального комплекса, введенный М. Йосвигом, см. его статью [3] в этом номере журнала. А именно,

ТЕОРЕМА. Пусть K – комплекс граней d -мерного простого выпуклого многогранника P , и $\Pi(K) \cong S_{d_1} \times \dots \times S_{d_n}$, $d_1 + \dots + d_n = d$. Тогда $\kappa(P) \geq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переформулируем в комбинаторных терминах условие на мономорфизм ι . Пусть $\rho: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^{m-k}$ – эпиморфизм такой, что $\ker \rho = \text{im } \iota$. Тогда пространство $\mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^k$ можно представить как факторпространство $(P \times \mathbb{T}^{m-k})/\sim$ по отношению эквивалентности

$$(p_1, g_1) \sim (p_2, g_2) \iff p_1 = p_2 \text{ и } g_1^{-1}g_2 \in \bigoplus_{p_1 \in F_i} \rho(\mathbb{T}_i).$$

Орбитная проекция $\rho_*: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathcal{Z}_P/\mathbb{T}^k$ действует при этом по правилу $[p, g] \mapsto [p, \rho(g)]$. Отсюда нетрудно видеть, что для того чтобы ρ_* было главным $\mathbb{T}^k$ -расслоением (т.е. действие, порожденное мономорфизмом ι , было свободно), необходимым и достаточным условием является

$$\bigoplus_{F_i \ni p} \rho(\mathbb{T}_i) \cong \bigoplus_{F_i \ni p} \mathbb{T}_i \quad \forall p \in P.$$

Рассмотрим симплициальный комплекс U_{m-k} , множество вершин которого состоит из всех подгрупп $G \subset \mathbb{T}^{m-k}$, изоморфных группе $\mathbb{T}^1$, а симплексами являются наборы $\{G_1, \dots, G_s\}$ такие, что $\bigoplus_{i=1}^s G_i \cong \mathbb{T}^s$. Тогда наличие мономорфизма ι с требуемым свойством равносильно существованию невырожденного симплициального отображения $\lambda: K \rightarrow U_{m-k}$. Здесь K – комплекс граней многогранника P : вершинами K являются фасеты P , и набор $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_s}\}$ образует симплекс в том случае, если $\bigcap_{j=1}^s F_{i_j} \neq \emptyset$.

Следующее утверждение доказано в [4].

ЛЕММА. *Предположим, что геометрическая реализация симплициального комплекса K является $(d-1)$ -мерным многообразием и $\Pi(K) \subset S_{d_1} \times \cdots \times S_{d_n}$, где $d_1 + \cdots + d_n = d$. Тогда существуют подкомплексы $K_1, \dots, K_n$ комплекса K такие, что $\dim K_i = d_i - 1$ и $K \subset K_1 * \cdots * K_n$ (символом $*$ обозначена операция джойна симплициальных комплексов).*

Ранее М. Йосвигом [5] было доказано равенство $\Pi(K_1 * \cdots * K_n) = \Pi(K_1) \times \cdots \times \Pi(K_n)$, являющееся частичным обращением этого утверждения.

Пусть m_i — количество вершин комплекса K_i . Очевидно, множества вершин комплексов K_i образуют разбиение множества вершин комплекса K , поэтому $m_1 + \cdots + m_n = m$. Рассмотрим следующие симплициальные отображения $\lambda_i: K_i \rightarrow U_{m_i-1}$: одна из вершин комплекса K_i переходит в диагональную подгруппу группы $\mathbb{T}^{m_i-1}$, остальные — в координатные подгруппы. Легко видеть, что каждое из этих отображений невырождено. (Применение именно этой конструкции к комплексу K позволяет получить оценку $\kappa(P) \geq 1$.) Кроме того, имеется включение $\nu: U_{m_1-1} * \cdots * U_{m_n-1} \cong U_{m-n}$, порожденное изоморфизмом $\mathbb{T}^{m_1-1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{T}^{m_n-1} \cong \mathbb{T}^{m-n}$. Композиция джойна отображений λ_i с включением ν дает требуемое невырожденное отображение $K \rightarrow U_{m-n}$.

В случае, когда группа $\Pi(K)$ тривиальна, данная оценка является точной, см. статью М. Йосвига в этом номере [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. W. Davis, T. Januszkiewicz // Duke Math. J. 1991. V. 62. № 2. P. 417–451.
 [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 96–131. [3] М. Йосвиг // УМН. 2001. Т. 56. № 3. С. 171–172. [4] I. Izvestiev. Embeddability of a simplicial complex into the join of its subcomplexes // Preprint. [5] M. Joswig. Projectivities in simplicial complexes and colourings of simple polytopes // Preprint.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
29.03.2001