Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Йосвиг, Группа проективностей и раскраска фасет простого многогранника,
УМН, 2001, том 56, выпуск 3, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:19:24

ГРУППА ПРОЕКТИВНОСТЕЙ И РАСКРАСКА ФАСЕТ ПРОСТОГО МНОГОГРАННИКА

М. Йосвиг

В работе [1] М. Дэвисом и Т. Янушкевичем было построено $(n + d)$ -мерное гладкое многообразие $\mathcal{X}_P$, определяемое d -мерным простым выпуклым многогранником P с n фасетами. Свойства этого многообразия играют решающую роль в исследовании ряда задач из области квазитопических многообразий, см. обзор В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова [2]. В работе [3] дано определение *хроматического числа* $\chi(P)$ простого многогранника P как минимального количества цветов, в которое можно покрасить фасеты многогранника так, чтобы смежные фасеты имели различные цвета. Очевидно, $\chi(P) \geq d$ при $\dim P = d$. По любой правильной раскраске многогранника опять же можно построить многообразие, при этом большой интерес эта конструкция представляет в случае $\chi(P) = d$. В [3] исследовались многообразия, возникающие при $\chi(P) = d = 3$, при этом существенным образом использовался известный критерий существования правильной трехцветной раскраски фасет простого выпуклого трехмерного многогранника ([3; теорема 1]). В нашей заметке мы покажем, как этот критерий может быть обобщен для многогранника произвольной размерности.

Назовем многогранник *четным*, если каждая его двумерная грань имеет четное число вершин. Заметим, что каждый зонотоп является четным многогранником, но обратное неверно. Как источник ссылок по теории выпуклых многогранников, можно рекомендовать книгу Г. Циглера [4]. Назовем *графом многогранника* P граф, образованный вершинами и ребрами P . Наш основной результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть P – простой выпуклый d -мерный многогранник. Тогда следующие три условия эквивалентны.*

1. Многогранник P четен.
2. $\chi(P) = d$.
3. Граф многогранника P двудолен.

Мы вводим новый комбинаторный инвариант конечномерного симплициального комплекса, *группу проективностей*, которая затем исследуется в частном случае, когда комплекс является симплициальным многообразием. Напомним, что выпуклый d -мерный многогранник P называется *простым*, если каждая его вершина содержится ровно в d фасетах. Это равносильно тому, что граница ∂P^* двойственного многогранника P^* является симплициальной сферой. Тем самым, результаты, полученные для симплициальных многообразий, мы можем применять к простым многогранникам. Подробнее о симплициальных комплексах и симплициальных многообразиях см. в книге Дж. Манкрса [5].

Пусть Δ – конечномерный (абстрактный) симплициальный комплекс на множестве вершин V . По определению, *фасета* – это грань максимальной размерности комплекса Δ , а *ребро* – максимальная собственная грань фасеты. *Двойственным графом* $\Gamma(\Delta)$ комплекса Δ называется абстрактный граф, вершинами которого являются фасеты комплекса Δ , а ребра соответствуют общим ребрам фасет. Пусть σ и τ – фасеты комплекса Δ такие, что $\sigma \cap \tau$ является ребром обоих. Тогда существует единственная вершина $v(\sigma, \tau)$ фасеты σ , не принадлежащая τ . Определим *перспективное преобразование* $[\sigma, \tau]: \sigma \rightarrow \tau$, положив

$$v \mapsto \begin{cases} v(\tau, \sigma), & \text{если } v = v(\sigma, \tau), \\ v & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $g = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – путь в $\Gamma(\Delta)$, т.е. σ_i и σ_{i+1} – фасеты, имеющие общий гребень, $i = 0, \dots, n - 1$. Проективное преобразование, или, короче, *проективность* $[g]$ из σ_1 в σ_n вдоль g , – это результат последовательного выполнения перспективных преобразований:

$$[g] = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n] = [\sigma_0, \sigma_1][\sigma_1, \sigma_2] \cdots [\sigma_{n-1}, \sigma_n].$$

Отображение $[g]$ является биекцией из σ_0 в σ_n . Замкнутый путь из σ_0 в σ_0 называется *петлей* с началом в σ_0 . Путь, получаемый сочленением двух путей $g = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ и $h = (\sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots)$, обозначим через $g * h$. Очевидно, $[g * h] = [g][h]$.

Для данной грани σ_0 множество всех проективностей вдоль петель с началом в σ_0 образует группу $\Pi(\Delta, \sigma_0)$ — *группу проективностей* комплекса Δ в фасете σ_0 . Группа проективностей является подгруппой симметрической группы $\text{Sym } \sigma_0$ — группы всех взаимно однозначных преобразований множества вершин фасеты σ_0 . Если граф $\Gamma(\Delta)$ связан (в этом случае комплекс Δ называется *сильно связным*), то группы $\Pi(\Delta, \sigma_0)$, возникающие при различном выборе фасеты σ_0 , изоморфны. Заметим также, что из связности дуального графа комплекса следует, что комплекс чист, т.е. все его фасеты имеют одинаковую размерность.

Следующий результат, доказанный в [6], является ключевым.

ТЕОРЕМА 2. *Для симплицального многообразия Δ его группа проективностей $\Gamma(\Delta)$ порождается совокупностью петель, соответствующих образующим фундаментальной группы, и петлей вокруг граней коразмерности 2.*

В частном случае, когда многообразие Δ односвязно, из теоремы 2 следует, что группа $\Pi(\Delta, \sigma_0)$ порождена транспозициями и, таким образом, изоморфна прямому произведению симметрических групп.

Для простого выпуклого многогранника P группа проективностей P определяется как группа проективностей ∂P^* . Грани коразмерности 2 комплекса P^* соответствуют двумерным граням многогранника P . Следовательно, простой выпуклый многогранник четен, если и только если его группа проективностей равна 0. Очевидным образом можно начать построение правильной раскраски простого многогранника, стартуя с фасет вокруг любой его вершины. Такая раскраска продолжается на любую фасету. Продолжение однозначно и приводит к правильной раскраске всего множества фасет в том и только том случае, если группа проективностей многогранника обращается в 0.

Я благодарен Ф. Кёрнер и И. Измествеву за стимулирующие обсуждения этой темы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. W. Davis, T. Januszkiewicz // Duke Math. J. 1991. V. 62. №2. P. 417–451.
- [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов // Труды МИАН. 1999. Т. 225. С. 96–131. [3] И. В. Измествев // Матем. заметки. 2001. Т. 69. №3. С. 375–382. [4] G. M. Ziegler. Lectures on Polytopes. Berlin: Springer-Verlag, 1998. [5] J. R. Munkres. Elements of Algebraic Topology. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1984. [6] M. Joswig. Projectivities in simplicial complexes and colourings of simple polytopes // Preprint.

Принято редколлегией
27.04.2001