Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Калинин, Точные решения уравнений Колмогорова для критических ветвящихся процессов с двумя комплексами взаимодействия частиц, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:03:57

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГороВА ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С ДВУМЯ КОМПЛЕКСАМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ

А. В. Калинин

Рассматривается однородный во времени марковский процесс ξ_t со счетным множеством состояний $\{0, 1, 2, \dots\}$ и непрерывным временем $t, t \in [0, \infty)$. Обозначим переходные вероятности $P_{ij}(t) = P\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\}$, $i, j = 0, 1, \dots$, и пусть при $t \rightarrow 0+$ переходные вероятности имеют вид $(\lambda \geq 0, \mu \geq 0)$

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} (p_{j-i+2}^2 i(i-1)\lambda + p_{j-i+1}^1 i\mu)t + o(t), & \text{если } j \geq i-2, j \neq i; \\ 1 - (i(i-1)\lambda + i\mu)t + o(t), & \text{если } j = i; \\ o(t), & \text{если } j \leq i-2, \end{cases}$$

где $\{p_l^k \geq 0, l = 0, 1, \dots; \sum_{l=0}^{\infty} p_l^k = 1, p_k^k = 0\}$, $k = 1, 2$, – заданные распределения вероятностей. Вводя производящие функции:

$$F_i(t; s) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) s^j, \quad i = 0, 1, \dots; \quad h_k(s) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l^k s^l, \quad k = 1, 2; \quad |s| \leq 1,$$

вторую (прямую) систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей свертываем к равносильному уравнению в частных производных второго порядка параболического типа [1]–[3]

$$\frac{\partial F_i(t; s)}{\partial t} = \lambda(h_2(s) - s^2) \frac{\partial^2 F_i(t; s)}{\partial s^2} + \mu(h_1(s) - s) \frac{\partial F_i(t; s)}{\partial s}, \quad F_i(0; s) = s^i. \quad (1)$$

Для марковского процесса ξ_t состояние i интерпретируется как наличие совокупности из i частиц типа T [1], [4]. Можно полагать, что через случайное время τ_i^2 , $P\{\tau_i^2 \leq t\} = 1 - e^{-i(i-1)\lambda t}$, происходит взаимодействие частицы типа T с частицей типа T . Эта пара частиц независимо от всех других частиц превращается в новую группу из n частиц типа T с распределением $\{p_n^2\}$; процесс переходит в состояние $i + n - 2$. Кроме того, через случайное время τ_i^1 , $P\{\tau_i^1 \leq t\} = 1 - e^{-\mu i t}$, одна из частиц типа T независимо от других частиц превращается в группу из m частиц типа T с распределением $\{p_m^1\}$; процесс переходит в состояние $i + m - 1$. Предполагается, что случайные величины τ_i^1, τ_i^2 независимы; в состоянии i процесс ξ_t находится случайное время $\tau_i = \min(\tau_i^1, \tau_i^2)$.

Основными характеристиками ветвящихся процессов [5] являются среднее число частиц $A_i(t) = E(\xi_t \mid \xi_0 = i) = (\partial F_i(t; s) / \partial s)|_{s=1}$ и дисперсия $B_i(t) = D(\xi_t \mid \xi_0 = i)$. Вводим параметры критичности $a_2 = \lambda(h_2'(1) - 2)$, $a_1 = \mu(h_1'(1) - 1)$; полагаем $b_2 = \lambda(h_2''(1) - 2)$, $b_1 = \mu h_1''(1)$. Для доказательства следующей теоремы дифференцируем (1) по s и решаем обыкновенное дифференциальное уравнение для $A_i(t)$; аналогичные вычисления для $B_i(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Для критического ($a_2 = 0$) процесса $A_i(t) = i e^{a_1 t}$ и

$$B_i(t) = \left(i(i-1) + \frac{ib_1}{b_2 + a_1} \right) e^{(b_2 + 2a_1)t} + \left(i - \frac{ib_1}{b_2 + a_1} \right) e^{a_1 t} - i^2 e^{2a_1 t}.$$

Точные решения уравнения (1) строились в [4] и других работах в связи с приложениями в физике высоких энергий. В [2] дано решение для случая $h_2(s) = p_0 + p_1 s$, $h_1(s) = 1$ в виде ряда Фурье. Рассматриваемые ниже частные случаи уравнения (1) решены с помощью замены переменной вида, указанного в [6] для уравнения 5.2.9.31.

ТЕОРЕМА 2. Решение линейного уравнения (1) при $\lambda = \mu$ и $h_2(s) = \frac{1}{2} s^4 + \frac{1}{2}$, $h_1(s) = s^3$ имеет вид

$$F_i(t; s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(2\lambda t)} \varphi^i(v; s) dv, \quad (2)$$

где дробно-линейная по переменной s функция $\varphi(v; s) = \frac{\operatorname{sh} v + s \operatorname{ch} v}{\operatorname{ch} v + s \operatorname{sh} v}$ удовлетворяет свойству итераций

$$\varphi(v_1; \varphi(v_2; s)) = \varphi(v_1 + v_2; s) \quad (3)$$

и нелинейной системе уравнений [7]:

$$\begin{aligned} (h_2(s) - s^2) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 - (h_2(\varphi) - \varphi^2) &= 0; \\ (h_2(s) - s^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + (h_1(s) - s) \frac{\partial \varphi}{\partial s} - (h_1(\varphi) - \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для доказательства теоремы подставляем (2) в (1), функцию $\varphi(v; s)$ в (3) и (4).

Ветвящийся процесс ξ_t может вырождаться в поглощающем состоянии 0. Для рассмотренного в теореме 2 случая из формулы (2) следует интегральное представление для вероятности невырождения процесса

$$Q_i(t) = P\{\xi_t > 0 \mid \xi_0 = i\} = 1 - F_i(t; 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/(2\lambda t)} (1 - \operatorname{th}^i v) dv;$$

отсюда получаем $Q_i(t) \equiv 1$ для нечетных i , для четных i — асимптотическую формулу при $t \rightarrow \infty$

$$Q_i(t) \sim C_i \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda t}}, \quad C_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{i/2} \frac{1}{2k-1}. \quad (5)$$

Впервые выявленное свойство (3) для марковского процесса с взаимодействием аналогично свойству итераций производящей функции переходных вероятностей обычного (когда в уравнении (1) $\lambda = 0$) ветвящегося процесса, являющимся основным функциональным соотношением теории ветвящихся процессов [5; гл. 1, § 4]. Формулы (2) и (5) указывают на связь процессов с взаимодействием и ветвящихся процессов в случайной среде [8]. Интеграл в выражении (2) интерпретируется как математическое ожидание [7] для дробно-линейной производящей функции распределения числа потомков [5; гл. 1, § 8, пример 2], [8], а асимптотическая формула (5) совпадает с полученной в [8] формулой для вероятности невырождения критического ветвящегося процесса в случайной среде.

ТЕОРЕМА 3. *Решение уравнения (1) при $\lambda = \mu$ и $h_2(s) = \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{2}s$, $h_1(s) = \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{4}$ имеет вид (2), где функция*

$$\varphi(v; s) = \left(\frac{\operatorname{sh}(v/2) + \sqrt{s} \operatorname{ch}(v/2)}{\operatorname{ch}(v/2) + \sqrt{s} \operatorname{sh}(v/2)} \right)^2$$

удовлетворяет свойству (3) и системе уравнений (4). При $t \rightarrow \infty$

$$Q_i(t) \sim C_i \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda t}}, \quad C_i = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sum_{k=1}^i \frac{1}{2k-1}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. А. Севастьянов, А. В. Калинин // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 2. С. 306–308. [2] A. Kalinkin, G. Valent // Обзорение прикл. промышл. матем. Сер. вероятн. и статист. 1998. V. 5. № 2. Р. 304–305. [3] А. В. Калинин // Теория вероятн. и ее примен. 2001. Т. 46. № 2. [4] J. Letessier, G. Valent // Approx. Theory Appl. 1988. V. 4. № 2. Р. 97–117. [5] Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. [6] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: МПО, 1996. [7] А. В. Калинин // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 2. С. 159–162. [8] М. В. Козлов // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21. № 4. С. 813–825.