Общероссийский математический портал

М. Поляк, Обобщенные формулы Крофтона, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 10:46:58

ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ КРОФТОНА

М. Поляк

1. Формулы Крофтона. Пусть C и C' – две гладкие строго выпуклые кривые в $\mathbb{R}^2$ и p – точка во внешней области P , т.е. в неограниченной компоненте $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$. Через p проходят по две касательных к C и C' . Обозначим через t_1, t_2 и t'_1, t'_2 отрезки, соединяющие p с соответствующими точками касания на C и C' , и через α_{ij} , $i, j = 1, 2$, – угол между t_i и t'_j , см. рис. 1а.

Рис. 1. Выпуклые плоские кривые

Тогда справедлива следующая классическая формула Крофтона (см., например, [1]):

ТЕОРЕМА 1 [1].

$$\int_P \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{|\sin \alpha_{ij}|}{|t_i| \cdot |t_j|} dx \wedge dy = 4\pi^2. \quad (1)$$

В частном случае, когда $C = C'$, мы получаем $t_i = t'_i$ и $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, $\alpha_{21} = -\alpha_{12}$, см. рис. 1б. Следовательно, отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2 [1].

$$\int_P \frac{|\sin \alpha_{12}|}{|t_1| \cdot |t_2|} dx \wedge dy = 2\pi^2. \quad (2)$$

2. Обобщенные формулы Крофтона. Предположим теперь, что C и C' – произвольные ориентированные погруженные кривые общего положения в $\mathbb{R}^2$, и пусть p – точка в $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$. Через p проходят по несколько (возможно ни одной) касательных к C и C' . Обозначим через $p_1, \dots, p_n$ и $p'_1, \dots, p'_n$ их точки касания с C и C' соответственно. Пусть t_i и t'_j – отрезки касательных, соединяющие точку p с p_i и p'_j соответственно, и пусть α_{ij} – угол между t_i и t'_j , см. рис. 2.

Рис. 2. Пара погруженных плоских кривых

Положим знак $\varepsilon_i = \varepsilon(p_i)$ равным 0, если p_i – точка перегиба, и равным ± 1 в другом случае, в зависимости от того, против или по часовой стрелке вращается касательный вектор к C в окрестности точки p_i при обходе вдоль кривой C следуя ее ориентации. Заменяя C на C' , мы аналогично определяем знак $\varepsilon'_j = \varepsilon(p'_j)$. Например на рис. 2 мы имеем $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = +1$ и $\varepsilon_2 = -1$. Наконец, обозначим через $\text{ind}(C)$ и $\text{ind}(C')$ индексы Уитни (числа вращения) кривых C и C' . Напомним, что индекс Уитни кривой – это количество оборотов касательного вектора при обходе вдоль кривой следуя ее ориентации. Для кривых, изображенных на рис. 2, $\text{ind}(C) = 0$ и $\text{ind}(C') = 2$.

ТЕОРЕМА 3.

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} \varepsilon_i \varepsilon'_j \frac{|\sin \alpha_{ij}|}{|t_i| \cdot |t'_j|} dx \wedge dy = 4\pi^2 \text{ind}(C) \text{ind}(C'). \quad (3)$$

Множество U касательных ко всем точкам перегиба кривых C и C' разрезает $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$ на области с постоянным числом n, n' касательных. Когда точка q пересекает прямую из U , то одно из чисел n, n' изменяется на ± 2 , однако подынтегральное выражение в (3) гладко зависит от q , так как пары соответствующих касательных имеют противоположные знаки. Изменение ориентации одной из кривых, скажем C , обращает все знаки ε_i и число вращения $\text{ind}(C)$, так что знак обеих частей уравнения (3) меняется на противоположный.

Подставляя $C = C'$ и замечая, что каждая пара касательных будет посчитана дважды, мы получаем следующее обобщение следствия 2 для погруженных плоских кривых общего положения:

СЛЕДСТВИЕ 4.

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus C} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j \frac{|\sin \alpha_{ij}|}{|t_i| \cdot |t_j|} dx \wedge dy = 2\pi^2 \text{ind}(C)^2. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Мы следуем идее Сантало [1] доказательства теоремы 1, изменяя его на случай погруженных кривых.

Каждая пара точек (p, p') на $C \times C'$ определяет точку $q(p, p') \in \mathbb{R}^2 \cup \infty$ пересечения касательных к кривым C и C' в точках p и p' . Пусть D — (одномерное) подмножество $C \times C'$, состоящее из таких пар (p, p') , что $q(p, p') \in C \cup C' \cup \infty$. Для пары точек $(p, p') \in C \times C' \setminus D$ обозначим через t и t' отрезки касательных из точки $q = q(p, p')$ до p и p' . Мы можем рассмотреть углы ϕ, ϕ' между осью x и t, t' в качестве локальных координат на торе $C \times C'$. Пусть (u, v) и (x, y) — декартовы координаты точек p и q соответственно. Легко видеть, что $(u - x) \sin \phi - (v - y) \cos \phi = 0$. Дифференцируя это равенство и используя то, что $\sin \phi du - \cos \phi dv = 0$ (так как t касается C), мы получаем $\sin \phi dx - \cos \phi dy = ((u - x) \cos \phi + (v - y) \sin \phi) d\phi$. Замечая, что $((u - x) \cos \phi + (v - y) \sin \phi)$ это x -координата вектора, полученного поворотом t на угол $-\phi$, и, следовательно, равняется $|t|$, мы получаем $\sin \phi dx - \cos \phi dy = |t| d\phi$. Заменяя C на C' , мы аналогично получаем $\sin \phi' dx' - \cos \phi' dy' = |t'| d\phi'$. Внешнее умножение этих двух равенств дает $(\cos \phi \sin \phi' - \sin \phi \cos \phi') dx \wedge dy = |t| \cdot |t'| d\phi \wedge d\phi'$. Но $(\cos \phi \sin \phi' - \sin \phi \cos \phi') = \sin \alpha$, где α — угол между векторами t и t' , следовательно, деля обе части на $|t| \cdot |t'|$ и интегрируя по $C \times C' \setminus D$, мы получаем

$$\int_{C \times C' \setminus D} \frac{\sin \alpha}{|t| \cdot |t'|} dx \wedge dy = \int_{C \times C' \setminus D} d\phi \wedge d\phi'. \quad (5)$$

Вычислим правую часть этого равенства. Заметим, что в каждой области $C \times C' \setminus D$ отображение $(p, p') \rightarrow (\phi, \phi')$ совпадает с гауссовым отображением $C \times C' \rightarrow S^1 \times S^1$ (сопоставляющим паре точек (p, p') направления (ψ, ψ') касательных векторов к кривым C, C' в этих точках) с точностью до отражений $\phi \rightarrow \phi + \pi, \phi' \rightarrow \phi' + \pi$ на одной или обеих копиях S^1 . Так как такие отражения не меняют интеграла, правая часть уравнения (5) равняется

$$\int_C d\psi \int_{C'} d\psi' = 4\pi^2 \text{ind}(C) \text{ind}(C').$$

Нам остается только сравнить левые части уравнений (5) и (3). Чтобы изменить область интегрирования с $C \times C' \setminus D$ на $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$, применим отображение $f: (p, p') \rightarrow q(p, p')$ пространства $C \times C' \setminus D$ в пространство $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$. Каждая точка $q \in \mathbb{R}^2 \setminus (C \cup C')$ имеет $n \times n'$ прообразов $f^{-1}(q)$; поэтому суммирование производится по всем этим точкам, со знаками, определяемыми локальной степенью отображения. Вычисление этих знаков приводит к формуле (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Сантало. Интегральная геометрия и геометрическая вероятность. М.: Наука, 1983.