Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Топологическая структура пространства голоморфных морфизмов римановых поверхностей, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:22:11

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА ГОЛОМОРФНЫХ МОРФИЗМОВ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С. М. НАТАНЗОН

1. *Голоморфным морфизмом* в статье называется тройка $(\tilde{P}, f, P)$, где $\tilde{P}$ и P – компактные римановы поверхности, а $f: \tilde{P} \rightarrow P$ – голоморфное разветвленное накрытие. Морфизмы $(\tilde{P}_1, f_1, P_1)$ и $(\tilde{P}_2, f_2, P_2)$ считаются совпадающими, если существуют биголоморфные отображения $\tilde{\varphi}: \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_2$ и $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ такие, что $\varphi f_1 = f_2 \tilde{\varphi}$.

Морфизмы $(\tilde{P}_1, f_1, P_1)$ и $(\tilde{P}_2, f_2, P_2)$ называются *топологически эквивалентными* (или имеющими одинаковый *топологический тип*), если существуют гомеоморфизмы $\tilde{\varphi}: \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_2$ и $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ такие, что $\varphi f_1 = f_2 \tilde{\varphi}$.

Зафиксируем произвольный топологический тип t и рассмотрим множество H^t всех морфизмов этого топологического типа. Род $g(t)$ поверхности P и число $n(t)$ критических значений f являются инвариантами топологического типа t . В этой заметке мы описываем естественную топологию в H^t и даем набросок доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Пусть $2g(t) + n(t) > 2$. Тогда пространство H^t гомеоморфно R^m/Mod , где $m = 6g(t) + 2n(t) - 6$ и Mod – дискретная группа.

Частные случаи этой теоремы были доказаны ранее [1], [3], [4]. При $2g(t) + n(t) \leq 2$ пространство H^t имеет очень простую структуру и мы не будем обсуждать ее в этой заметке.

2. Опишем сначала топологию пространства H^t . Сопоставим морфизму $(\tilde{P}, f, P)$ пару (P, V) , где V – множество критических значений f (т.е. $V = f(\tilde{V})$, где $\tilde{V} = \{\tilde{v} \in \tilde{P} \mid df(\tilde{v}) = 0\}$). Нетрудно видеть, что число точек $n = n(\tilde{P}, f, P)$ множества V и род $g = g(P)$ поверхности P определяются топологическим типом морфизма $(\tilde{P}, f, P)$. Таким образом, соответствие $(\tilde{P}, f, P) \mapsto P \setminus V$ задает отображение $\Phi: H^t \rightarrow M_{g,n}$ в пространство модулей римановых поверхностей рода g с n проколами. Стандартная топология этого пространства хорошо известна (один из вариантов ее определения будет описан ниже). Зададим топологию на H^t , потребовав, чтобы отображение Φ было непрерывным. (Аналогичным способом на H^t можно ввести и комплексно-аналитическую структуру, но мы не будем использовать это в дальнейшем.)

3. Рассмотрим группу голоморфных автоморфизмов $\text{Aut}(\Lambda) \cong PSL(2, \mathbb{R})$ верхней полуплоскости $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. $\text{Aut}(\Lambda) \setminus \text{id}$ распадается на подмножества эллиптических $\text{Aut}_0(\Lambda)$, параболических $\text{Aut}_1(\Lambda)$ и гиперболических $\text{Aut}_2(\Lambda)$ автоморфизмов, имеющих соответственно 0, 1 и 2 неподвижные точки на абсолюте $\partial\Lambda = \mathbb{R} \cup \infty$.

Параболический автоморфизм с конечной неподвижной точкой $a \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$C(z) = \frac{(1 - a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1 + a\gamma)}.$$

Назовем его *положительным*, если $\gamma > 0$. *Гиперболический автоморфизм* с конечными неподвижными точками α и β имеет вид

$$C(z) = \frac{(\lambda\alpha - \beta)z + (1 - \lambda)\alpha\beta}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)},$$

где $\lambda > 1$. Назовем его *положительным*, если $\alpha < \beta$.

Для автоморфизмов C_1, C_2 с конечными неподвижными точками на $\mathbb{R}$ положим $C_1 < C_2$, если все неподвижные точки C_1 меньше любой неподвижной точки C_2 . Набор $\{C_1, C_2, C_3\} \subset \text{Aut}_1(\Lambda) \cup \text{Aut}_2(\Lambda)$ назовем *упорядоченным*, если $C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 = 1$ и существует $D \in \text{Aut}(\Lambda)$ такой, что автоморфизмы $\tilde{C}_i = DC_i D^{-1}$ ($i = 1, 2, 3$) имеют конечные неподвижные точки, положительны и $\tilde{C}_1 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_3$. Упорядоченный набор $\{C_1, C_2, C_3\}$ назовем *последовательным*, если $\{C_1 C_2 C_1^{-1}, C_1, C_3\}$ также упорядоченный набор. Набор $\{C_1, \dots, C_n\} \subset \text{Aut}_1(\Lambda) \cup \text{Aut}_2(\Lambda)$ назовем *последовательным*, если для любого $i = 1, \dots, n-1$ наборы $\{C_1 \cdots C_{i-1}, C_i, C_{i+1} \cdots C_n\}$ – последовательные.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-01122а и грант № 96-01-01104).

4. Рассмотрим теперь свободную группу S с $2g + n - 1$ образующими $\delta = \{a_1, b_2, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_{n-1}\}$. Положим

$$c_n = \left(\prod_{i=1}^{\tilde{g}} [a_i b_i] \prod_{j=1}^{n-1} c_j \right)^{-1}.$$

Реализацией пары (S, δ) назовем мономорфизм $\psi: S \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ такой, что

$$\{\psi(a_1), \psi(b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}), \dots, \psi(a_g), \psi(b_g a_g^{-1} b_g^{-1}), \psi(c_1), \dots, \psi(c_n)\}$$

– последовательный набор, причем $\psi(a_i), \psi(b_i) \in \text{Aut}_2(\Lambda)$, $\psi(c_j) \in \text{Aut}_1(\Lambda)$ ($i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, n$).

ЛЕММА 1. а) Пусть $\psi: S \rightarrow \text{Aut}(\Lambda)$ – реализация (S, δ) . Тогда $\psi(S)$ – фуксова группа, $\psi(S) \in \text{Aut}_1(\Lambda) \cup \text{Aut}_2(\Lambda) \cup \text{id}$ и $\Lambda/\psi(S) \in M_{g,n}$. б) Пусть $Q \in M_{g,n}$. Тогда существует реализация ψ пары (S, δ) такая, что $\Lambda/\psi(S) = Q$.

Обозначим через $\tilde{T}_{g,n}$ множество всех реализаций пары (S, δ) . Для $\psi \in \tilde{T}_{g,n}$, $s \in S$, $h \in \text{Aut}(\Lambda)$ положим $h^* \psi(s) = h\psi(s)h^{-1}$. Тогда $h^* \psi \in \tilde{T}_{g,n}$, и при этом $\Lambda/h^* \psi(S) = \Lambda/\psi(S)$. Таким образом, $\text{Aut}(\Lambda)$ действует на $\tilde{T}_{g,n}$. Положим $T_{g,n} = \tilde{T}_{g,n} / \text{Aut}(\Lambda)$. Тогда соответствие $\psi \mapsto \Lambda/\psi(S)$ задает отображение $\Psi: T_{g,n} \rightarrow M_{g,n}$.

Положим $\widetilde{\text{Mod}}_{g,n} = \{\alpha \in \text{Aut}(S) \mid \tilde{T}_{g,n}\alpha = \tilde{T}_{g,n}\}$ и $\text{Mod}_{g,n} = \widetilde{\text{Mod}}_{g,n} / \text{Int}(S)$, где $\text{Int}(S)$ – множество автоморфизмов вида $s \mapsto hsh^{-1}$, где $h \in S$.

ЛЕММА 2. а) При $2g + n > 2$ пространство $T_{g,n}$ гомеоморфно $R^{6g+2n-6}$. б) Соответствие $\psi \mapsto \Lambda/\psi(S)$ задает гомеоморфизм $T_{g,n} / \text{Mod}_{g,n} \rightarrow M_{g,n}$, где $\text{Mod}_{g,n}$ дискретно действует на $T_{g,n}$.

Доказательство лемм 1 и 2 следует из [2], [4].

5. Пусть теперь $\tilde{S} \subset S$ – подгруппа конечного индекса группы S и $\psi \in \tilde{T}_{g,n}$. Тогда $\Lambda/\psi(\tilde{S})$ – риманова поверхность с проколами. Вложение $\tilde{S} \rightarrow S$ задает голоморфное накрытие $\tilde{f}_{\psi, \tilde{S}}: \Lambda/\psi(\tilde{S}) \rightarrow \Lambda/\psi(S)$. Заклеив проколы точками, получим морфизм $f_{\psi, \tilde{S}}: \tilde{P}_{\psi, \tilde{S}} \rightarrow P_{\psi, \tilde{S}}$.

ЛЕММА 3. а) Эта конструкция дает все морфизмы $(\tilde{P}, f, P)$ с n критическими значениями на поверхностях рода g . б) $(\tilde{P}_{h^* \psi, \tilde{S}}, f_{h^* \psi, \tilde{S}}, P_{h^* \psi, \tilde{S}}) = (\tilde{P}_{\psi, \tilde{S}}, f_{\psi, \tilde{S}}, P_{\psi, \tilde{S}})$ для любого $h \in \text{Aut}(\Lambda)$. в) $(\tilde{P}_{\psi_1, \tilde{S}_1}, f_{\psi_1, \tilde{S}_1}, P_{\psi_1, \tilde{S}_1})$ и $(\tilde{P}_{\psi_2, \tilde{S}_2}, f_{\psi_2, \tilde{S}_2}, P_{\psi_2, \tilde{S}_2})$ имеют одинаковый топологический тип, если и только если существует автоморфизм $\alpha \in \widetilde{\text{Mod}}_{g,n}$ такой, что $\alpha(\tilde{S}_1) = \tilde{S}_2$.

Доказательство основано на униформизации $\Lambda \rightarrow \tilde{P} \setminus \tilde{V} \rightarrow P \setminus V$ и лемме 1.

Схема доказательства теоремы. Согласно лемме 3, существует подгруппа конечного индекса $\tilde{S} \subset S$ такая, что соответствие $\psi \mapsto (\tilde{P}_{\psi, \tilde{S}}, f_{\psi, \tilde{S}}, P_{\psi, \tilde{S}})$ порождает отображение $T_{g,n} / \text{Mod}_{g,n}^t \rightarrow H^t$, где $\text{Mod}_{g,n}^t \subset \text{Mod}_{g,n}$. Согласно лемме 2, $T_{g,n} \cong R^{6g+2n-6}$ и $\text{Mod}_{g,n}^t$ дискретно действует на $T_{g,n}$.

Автор благодарит В.И. Арнольда за стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И. // Функцион. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 1. С. 1–19. [2] Натанзон С. М. // Труды ММО. 1978. Т. 37. С. 219–253. [3] Натанзон С. М. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 5. С. 1058–1061. [4] Natanzon S. // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1997. V. 180. P. 175–180.