Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Самохин, Производная категория когерентных пучков на LG_3^C , УМН, 2001, том 56, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:55:34

ПРОИЗВОДНАЯ КАТЕГОРИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ НА LG_3^C

А. В. САМОХИН

Рассмотрим четномерное комплексное векторное пространство V , $\dim V = 2n$, и невырожденную кососимметрическую форму f на нем, $f \in \wedge^2 V^*$. Множество изотропных подпространств максимальной (половинной) размерности формы f образует гладкое проективное многообразие (лагранжев-грассманиан) LG_n^C . В данной работе изучается производная категория когерентных пучков LG_3^C – шестимерного многообразия Фано индекса 4. В ней строится полный исключительный набор (определение полного исключительного набора в триангулированной категории см. в работе [1]).

ЛЕММА 1. $h_{LG_3^C}^{i,j} = \dim H^j(\Omega_{LG_3^C}^i) = 0$, $i \neq j$; $h_{LG_3^C}^{i,i} = 1$, $i \neq 3$, $h_{LG_3^C}^{3,3} = 2$.

Из леммы 1 следует, что $\mathrm{rk} K_Q^0(LG_3^C) = 8$. Обозначим тавтологическое расслоение на LG_3^C через $S_{LG_3^C}$, положительную образующую группы $\mathrm{Pic}\{LG_3^C\}$ – через $\mathcal{O}_{LG_3^C}(1)$.

ЛЕММА 2. Набор $M = (S_{LG_3^C}(-3), \mathcal{O}_{LG_3^C}(-3), S_{LG_3^C}(-2), \mathcal{O}_{LG_3^C}(-2), S_{LG_3^C}(-1), \mathcal{O}_{LG_3^C}(-1), S_{LG_3^C}, \mathcal{O}_{LG_3^C})$ – сильный исключительный.

ТЕОРЕМА 1. Набор M – полный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что наименьшая строго полная триангулированная подкатегория в $D^b(\mathrm{Coh} LG_3^C)$, содержащая набор M , совпадает с $D^b(\mathrm{Coh} LG_3^C)$. Рассмотрим многообразие изотропных флагов типа $(1, 2, 3)$ пространства V : $F^l(1, 2, 3, V)$. Оно обладает проекциями на многообразия изотропных флагов типа $(1, 2, V)$ и $(1, V)$:

$$F^l(1, 2, 3, V) \xrightarrow{q} F^l(1, 2, V) \xrightarrow{p} F^l(1, V).$$

$F^l(1, V)$ – многообразие изотропных прямых пространства V – изоморфно $P(V)$ в силу кососимметричности формы f . Пусть $\tilde{V}_1^\perp$ – расслоение над P^5 , $\mathrm{rk} \tilde{V}_1^\perp = 5$, слоем которого над точкой $v \in P^5$ является ортогональное дополнение к v относительно формы f , w – вложение $\mathcal{O}_{P^5}(-1) \hookrightarrow \tilde{V}_1^\perp$. Тогда $F^l(1, 2, V)$ есть проективизация расслоения $\mathcal{E} = \tilde{V}_1^\perp / \mathcal{O}_{P^5}(-1)$, а $F^l(1, 2, 3, V)$ – проективизация расслоения $\mathcal{F} = \tilde{V}_2^\perp / \tilde{V}_2$, где $\tilde{V}_2$ – двумерное тавтологическое расслоение на $F^l(1, 2, V)$, а $\tilde{V}_2^\perp$ – ортогональное дополнение к расслоению $\tilde{V}_2$ относительно формы f . Если $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ – тавтологические расслоения на $F^l(1, 2, 3, V)$, $\mathrm{rk} \bar{V}_i = i$, то $\bar{V}_1$ поднято с $F^l(1, V) = P(V)$: $\bar{V}_1 = q^* p^* \mathcal{O}_{P^5}(-1)$, $\bar{V}_2$ поднято с $F^l(1, 2, V)$: $\bar{V}_2 = q^* \tilde{V}_2$. Многообразие $F^l(1, 2, 3, V)$ обладает проекцией на LG_3^C :

$$F^l(1, 2, 3, V) \xrightarrow{\pi} F^l(3, V) = LG_3^C,$$

и для этой проекции является относительным многообразием полных флагов расслоения $S_{LG_3^C}$. Итак, можно рассмотреть следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} F^l(1, 2, 3, V) \simeq P(\mathcal{F}) \simeq F(S_{LG_3^C}) & & \\ \swarrow q & \downarrow & \\ F^l(1, 2, V) \simeq P(\mathcal{E}) & \downarrow \pi & \\ \swarrow p & \downarrow & \\ F^l(1, V) \simeq P(V) & \downarrow & LG_3^C \end{array}$$

Из работы [2] следует, что в $D^b(\mathrm{Coh} F^l(1, 2, 3, V))$ существует полуортогональное разложение. Так как на $P(V)$ есть полный исключительный набор, то он есть и на $F^l(1, 2, 3, V)$. Рассмотрим

π^* – полный производный функтор обратного образа и любой объект $\tilde{X} \in D^b(\text{Coh } LG_3^C)$. Так как π^* – полное строгое вложение $D^b(\text{Coh } LG_3^C)$ в $D^b(\text{Coh } F(S_{LG_3^C}))$, то $\pi_*\pi^*\tilde{X} \simeq \tilde{X}$ (здесь и далее π_* – полный производный функтор). Объект $\pi^*\tilde{X}$ можно разложить по образующим полного исключительного набора в $D^b(\text{Coh } F(S_{LG_3^C}))$. Поэтому достаточно показать, что прямые образы от образующих полного исключительного набора в $D^b(\text{Coh } F(S_{LG_3^C}))$ принадлежат подкатегории, порожденной набором M . Для этого выберем в $D^b(\text{Coh } F(S_{LG_3^C}))$ исключительный набор следующим образом: рассмотрим подкатегории A_i , входящие в полуортогональное разложение $D^b(\text{Coh } F(S_{LG_3^C}))$; в обозначениях работы [2] каждая из подкатегорий A_i имеет вид:

$$A_i \simeq q^*p^*D^b(\text{Coh } P(V)) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-j) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-k), \quad j = 0, \dots, 3, \quad k = 0, 1.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} q^*p^*D^b(\text{Coh } P(V)) &= \langle \bar{V}_1^{\otimes 4}, \bar{V}_1^{\otimes 3}, \bar{V}_1^{\otimes 2}, \bar{V}_1, \mathcal{O}_{F(S_{LG_3^C})}, \bar{V}_1^{\otimes(-1)} \rangle, \\ q^*p^*D^b(\text{Coh } P(V)) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-3) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1) &= \langle \bar{V}_1^{\otimes 6} \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-3) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1), \dots, \bar{V}_1^{\otimes 1} \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-3) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-1) \rangle. \end{aligned}$$

В остальных шести подкатегориях берем в качестве образующих $\bar{V}_1^{\otimes l} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-j) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(-k)$, $l = 0, \dots, 5, j = 0, \dots, 3, k = 0, 1, (k, j) \neq \{(1, 3), (0, 0)\}$.

Вычисляя прямые образы данных образующих относительно морфизма π , получаем внизу, с точностью до сдвига в производной категории, следующие пучки:

$$S_{LG_3^C}^*, \Lambda^2 S_{LG_3^C}, \Lambda^2 S_{LG_3^C}(-2), \Sigma^{2,1} S_{LG_3^C}, \Sigma^{2,1} S_{LG_3^C}(-1), S_{LG_3^C}^*(-1), S_{LG_3^C}^*(-2).$$

Используя изоморфизм $S_{LG_3^C}^* \simeq (V/S)_{LG_3^C}$, тавтологическую точную последовательность и ее подкрутки, видим, что $S_{LG_3^C}^*, S_{LG_3^C}^*(-1), S_{LG_3^C}^*(-2)$ принадлежат подкатегории, порожденной набором M . Так как $\Lambda^2 S_{LG_3^C} \simeq S_{LG_3^C}^*(-1)$, то аналогичное верно и для $\Lambda^2 S_{LG_3^C}, \Lambda^2 S_{LG_3^C}(-2)$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Sigma^{2,1} S_{LG_3^C} \longrightarrow \Lambda^2 S_{LG_3^C} \otimes S_{LG_3^C} \longrightarrow \mathcal{O}_{LG_3^C}(-1) \longrightarrow 0.$$

Докажем, что $\Lambda^2 S_{LG_3^C} \otimes S_{LG_3^C}$ принадлежит M . Имеем:

$$\Lambda^2 S_{LG_3^C} \otimes S_{LG_3^C} \simeq S_{LG_3^C} \otimes S_{LG_3^C}^*(-1).$$

Тензорно умножая тавтологическую точную последовательность на $S_{LG_3^C}(-1)$, получаем:

$$0 \longrightarrow S_{LG_3^C} \otimes S_{LG_3^C}(-1) \longrightarrow V \otimes S_{LG_3^C}(-1) \longrightarrow S_{LG_3^C} \otimes S_{LG_3^C}^*(-1) \longrightarrow 0.$$

Далее, $S_{LG_3^C} \otimes S_{LG_3^C}(-1) = \Lambda^2 S_{LG_3^C}(-1) \oplus S^2 S_{LG_3^C}(-1)$. Возьмем внешний квадрат тавтологической последовательности и открутим на (-1) :

$$0 \longrightarrow S^2 S_{LG_3^C}(-1) \longrightarrow S_{LG_3^C}(-1) \otimes V \longrightarrow \Lambda^2 V_{LG_3^C}(-1) \longrightarrow S_{LG_3^C} \longrightarrow 0.$$

Таким образом, $\Sigma^{2,1} S_{LG_3^C}$ принадлежит подкатегории, порожденной набором M . Аналогично для $\Sigma^{2,1} S_{LG_3^C}(-1)$. Следовательно, набор M – полный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. И. Бондал // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 1. С. 25–44. [2] Д. О. Орлов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 4. С. 852–862.