Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Эршлер (Дюбина), Асимптотики сноса и энтропии для случайного блуждания на группах, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 09:34:36

АСИМПТОТИКИ СНОСА И ЭНТРОПИИ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ НА ГРУППАХ

А. ЭРШЛЕР (ДЮБИНА)

Мы рассматриваем симметричные случайные блуждания на группах такие, что носитель соответствующей меры μ конечен и порождает группу. Каждому такому случайному блужданию мы можем сопоставить функции

$$H(n) = - \sum_{g \in G} (\mu^{*n}) \ln(\mu^{*n}(g)) \quad \text{и} \quad L(n) = E_{\mu^{*n}} l(g),$$

где l – словарная метрика, а μ^{*n} – n -я свертка меры μ . Функция $H(n)$ называется *энтропией*, а $L(n)$ – *сносом* (или скоростью ухода на бесконечность) случайного блуждания. $H(n)$ измеряет, насколько равномерно распределена мера μ^{*n} . $L(n)$ показывает, насколько быстро случайное блуждание удаляется от своей начальной точки. Известно, что $H(n)$ асимптотически линейна тогда и только тогда, когда $L(n)$ асимптотически линейна [1], и тогда и только тогда, когда граница Пуассона нетривиальна [2]. В частности, это так для любой неабелевой группы. С другой стороны, во многих других примерах $L(n)$ асимптотически ведет себя как $\sqrt{n}$.

Первые примеры нестандартного роста $L(n)$ были построены автором в [3], [4]. В этих примерах $L(n) \asymp n^{1-\frac{1}{2k}}$ (k – натуральное) и $L(n) \asymp n/\ln(n)$.

В этой статье мы анонсируем новые примеры промежуточного роста сноса и оценки для промежуточных асимптотик энтропии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Напомним, что сплетением групп A и B называется полупрямое произведение A и $\sum_A B$, где A действует сдвигом на $\sum_A B$: если $a \in A$, $f: A \rightarrow B$, $f \in \sum_A B$, то $f^a(x) = f(xa^{-1})$, $x \in A$. Обозначим сплетение $A \wr B$.

ТЕОРЕМА 1. 1. Пусть F – конечная группа. Рассмотрим следующие группы, определенные рекуррентно:

$$G_1 = \mathbb{Z}^2 \wr F; \quad G_{i+1} = \mathbb{Z}^2 \wr G_i.$$

Тогда для некоторого простого случайного блуждания на G_i и для любого достаточно большого n

$$L_n^{G_i} \asymp \frac{n}{\underbrace{\ln(\ln(\dots \ln(n) \dots))}_i}.$$

2. Рассмотрим следующие группы, определенные рекуррентно:

$$F_1 = \mathbb{Z}; \quad F_{i+1} = \mathbb{Z} \wr F_i,$$

и пусть

$$H_{1,i} = \mathbb{Z}^2 \wr F_i; \quad H_{j+1,i} = \mathbb{Z}^2 \wr H_{j,i}.$$

Тогда для некоторого простого случайного блуждания на $H_{j,i}$ и для любого достаточно большого n

$$L_{H_{j,i}}(n) \asymp \frac{n}{2^i \underbrace{\sqrt{\ln(\ln(\dots \ln(n) \dots))}}_j}.$$

Основным техническим средством доказательства является следующее утверждение. В нем мы рассматриваем простое случайное блуждание на $\mathbb{Z}^2$. Пусть $b_z^{(n)}$ – это количество раз, которое случайное блуждание посетило элемент z ($z \in \mathbb{Z}^2$) до момента i .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $T > 0$, а f – вогнутая возрастающая функция такая, что

- 1) для любого $C > 1$ $Cf(x) \geq f(Cx)$,
- 2) $f(0) = 0$ и существует x такое, что $f(x) > 1$,
- 3) для любого $n \geq 1$ функция $xf(n/x)$ вогнута на отрезке $(0, n/T]$.

Тогда для достаточно больших n

$$\mathbb{E} \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} f(b_z^{(n)}) \right) \asymp f(\ln(n)) \frac{n}{\ln(n)}.$$

Оценим теперь энтропию случайного блуждания на группе. Известно (см. [5]), что для широкого класса мер на нильпотентных группах $H(n) \asymp \ln(n)$. Как уже отмечалось, для любой неамenable группы энтропия $H(n)$ асимптотически линейна. Мы покажем, что существует бесконечно много промежуточных асимптотик роста энтропии.

Пусть $v(n)$ – количество элементов группы длины не больше n ,

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(v(n))}{n}.$$

Следующая лемма обобщает фундаментальное неравенство из [6], [7].

ЛЕММА 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$ такое, что

$$H(n) \leq (v + \varepsilon)L(n) + \ln(n) + C.$$

Другая лемма оценивает энтропию снизу. Эта лемма является следствием результата из [1].

ЛЕММА 2. Существует $C > 0$ такое, что

$$H(n) \geq C \mathbb{E}_{\mu^{*n}} l^2(g)/n - \ln(n) \geq CL^2(n)/n - \ln(n).$$

Как следствие из двух предыдущих лемм и теоремы 1 мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G_i – это группа, определенная в теореме 1. Тогда для некоторого случайного блуждания на G_i

$$K_1 n / (\underbrace{\ln(\ln \dots \ln(n) \dots)}_i)^2 \leq H_{G_i}(n) \leq K_2 n / \underbrace{\ln(\ln \dots \ln(n) \dots)}_i$$

для некоторых положительных констант K_1 и K_2 . В частности, все G_i имеют разные асимптотики энтропии.

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Varopoulos // Bull. Sci. Math. 1985. V. 109. P. 225–252. [2] V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik // Ann. Probab. 1983. V. 11. № 3. P. 457–490. [3] А. Дюбина // УМН. 1999. Т. 54, № 5. С. 159–160. [4] А. Эршлер (Дюбина). Об асимптотике скорости ухода на бесконечность // Записки науч. семин. ПОМИ (в печати). [5] Y. Derriennic // Probability measures on groups VIII. Proc. 8th Conf., Oberwolfach/Germany, 1985. Berlin: Springer-Verlag, 1986. P. 241–284. (Lecture Notes in Math. V. 1210.) [6] А. М. Вершик // Записки науч. семин. ПОМИ. 1999. Т. 256. С. 1–11. [7] А. М. Вершик // УМН. 2000. Т. 55. № 4. С. 59–128.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Принято редколлегией
29.03.2001