Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Гельфанд, М. И. Граев, $\mathcal{N}$ -функции и их связь с решениями общих гипергеометрических систем и GG -систем, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 07:04:21

УДК 517.58

 **$\mathcal{N}$ -ФУНКЦИИ И ИХ СВЯЗЬ С РЕШЕНИЯМИ ОБЩИХ
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ И GG -СИСТЕМ**

И. М. ГЕЛЬФАНД, М. И. ГРАЕВ

Каждой невырожденной комплексной матрице ω размера $n \times N$, где n и $N \geq n$ – любые натуральные числа, поставлена в соответствие функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$. Установлена связь между введенными функциями и решениями общих гипергеометрических систем дифференциальных уравнений и их обобщений – GG -систем. Функции $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ естественно трактовать как регуляризацию решений этих систем. Обратно, по каждой функции $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ можно восстановить совокупность решений GG -системы. Рассмотрены также аналоги GG -систем и связанных с ними функций $\mathcal{N}(z, x, \omega)$, получаемые заменой операторов дифференцирования $\partial/\partial x_j$ операторами более общего вида, в частности, операторами q -дифференцирования.

Библиография: 16 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§ 1. Обобщенные GG -функции и $\mathcal{N}$ -функции	7
1.1. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций	7
1.2. Обобщенные GG -функции	8
1.3. $\mathcal{N}$ -функции	10
1.4. Соотношения между $\mathcal{N}$ -функциями; свертка $\mathcal{N}$ -функций	12
1.5. Добавление: многоэтажные экспоненты и их преобразование Фурье ...	12
§ 2. $\mathcal{N}$ -функции для случая $n = 1$	13
2.1. Функция $\Gamma_0(z, x)$	14
2.2. Выражение $\mathcal{N}$ -функций через функцию $\Gamma_0(z, x)$ (формулы приведения)	15
2.3. Связь с GG -функциями. Регуляризация GG -функций	16
2.4. Пример: случай $N = 2, n = 1$	16
2.5. $\mathcal{N}$ -функции, связанные с целочисленными векторами $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$	17
2.6. Случай $N = 2, n = 1, \omega \in \mathbb{Z}^2$	18
§ 3. $\mathcal{N}$ -функции, ассоциированные с произвольными матрицами ω	19
3.1. $\mathcal{N}$ -функции и GG -функции, ассоциированные с квадратными матрицами ω	19
3.2. Формулы приведения для $\mathcal{N}$ -функций. Регуляризация решений GG -систем	21
3.3. $\mathcal{N}$ -функции, ассоциированные с целочисленными матрицами ω , и их связь с общими гипергеометрическими функциями	23

3.4. Пример: $n = 3, N = 4, \omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	24
3.5. Обобщение примера из п. 3.4 на случай $n = 2p - 1, N = p^2$, где p произвольно	27
§ 4. Аналоги GG -систем и $\mathcal{N}$ -функций	28
4.1. GG -системы, связанные с последовательностями $(u_1, \dots, u_N)$ целых функций	28
4.2. Описание решений при $N = n$	30
4.3. Описание решений при $N > n$	30
4.4. Обобщенные GG -функции	32
4.5. $\mathcal{N}$ -функции	33
Список литературы	33

Введение

Каждой комплексной невырожденной матрице $\omega = \|\omega_{ij}\|$ размера $n \times N$, где $N \geq n$, поставлена в соответствие следующая функция от $z \in \mathbb{C}^n$ и $x \in \mathbb{C}^N$:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{z_i + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} k_j} \prod_{j=1}^N \frac{x_j^{k_j}}{k_j!} \right). \quad (1)$$

Исследуется связь между функциями $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ и решениями общих гипергеометрических систем дифференциальных уравнений и их обобщений – GG -систем.

1. Сформулируем исходные определения. Каждая общая гипергеометрическая система дифференциальных уравнений (см. [12], [15], [16]) задается парой натуральных чисел n и $N > n$, целочисленной невырожденной матрицей $\omega = \|\omega_{ij}\|$ размера $n \times N$ и вектором $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, играющим роль параметра. Она состоит из следующих уравнений в пространстве функций $f(x)$ на $\mathbb{C}^N$:

$$z_i f + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$\prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{l'_j} f = \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{l''_j} f \quad (3)$$

для любых $l'_j \geq 0$ и $l''_j \geq 0$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} l'_j = \sum_{j=1}^N \omega_{ij} l''_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Решения системы (2), (3) в классе аналитических функций называются общими гипергеометрическими функциями, ассоциированными с матрицей ω и вектором z .¹

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00754).

¹Они являются обобщением введенных в [3] гипергеометрических функций, связанных с грасманианами. Это направление в классической теории зародилось в [14], где определение гипергеометрических функций было основано на преобразовании Радона в интегральной геометрии.

Почти все известные классические гипергеометрические функции одного и многих переменных получаются как решения общих гипергеометрических систем, отвечающих подходящим матрицам ω . Например, гипергеометрическая функция Гаусса является решением гипергеометрической системы, ассоциированной с (3×4) -матрицей $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. GG -система, ассоциированная с матрицей ω , получается из соответствующей общей гипергеометрической системы заменой уравнений (3) следующими дифференциально-разностными уравнениями ([4]–[6], см. также [1], [10]):

$$\frac{\partial f(z, x)}{\partial x_j} = f(z + \omega_j, x), \quad j = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где векторы ω_j – столбцы матрицы ω .

Таким образом, в отличие от общих гипергеометрических систем, координаты вектора $z \in \mathbb{C}^n$ рассматриваются здесь не как параметры, а как равноправные с $x \in \mathbb{C}^N$ переменные.

Решения $f(z, x)$ системы (2), (4) в классе аналитических функций от z и x называются GG -функциями, ассоциированными с ω , см. [6]. Существенно, что система уравнений (3) является простым следствием системы уравнений (4). Поэтому любое решение GG -системы является при фиксированном z решением общей гипергеометрической системы.

Заметим, что с учетом уравнений (4) система (2) эквивалентна следующей разностной системе:

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j f(z + \omega_j, x) + z_i f(z, x) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Система, подобная (4), (5), известна уже для гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b, c, x)$, зависящей от одного переменного x и трех комплексных параметров a , b и c . Именно, при подходящей перенормировке производная функции F равна ее сдвигу по параметрам,

$$\frac{dF(a, b, c, x)}{dx} = F(a + 1, b + 1, c + 1, x), \quad (6)$$

а сдвиги $F(a \pm 1, b \pm 1, c \pm 1, x)$ по параметрам связаны линейными соотношениями (соотношения Гаусса). Уравнение (5) и соотношения Гаусса можно принять в качестве исходного определения функции Гаусса F . Дифференциальное уравнение Гаусса для F получается как следствие из этих соотношений.

Таким образом, система (4) обобщает уравнение (6), а система (5) – соотношения Гаусса между сдвигами функции F .

В отличие от общих гипергеометрических систем, элементы матрицы ω в определении GG -системы могут быть любыми комплексными числами. Такая система уже не сводится, вообще говоря, к общей гипергеометрической системе; однако структура ее решений по существу не меняется.

3. В статье строится решение GG -системы в пространстве обобщенных функций от z , зависящих от x как от параметра. Таким образом, в постановке задачи переменные z и x меняются ролями: основным переменным становится $z \in \mathbb{C}^n$. В качестве пространства основных функций берется пространство $\mathcal{D}$ преобразований Фурье

финитных C^∞ -функций на $\mathbb{R}^n$; его структура определяется известной теоремой Пэли–Винера.

Оказывается, что в пространстве обобщенных функций существует единственное, с точностью до постоянного множителя, решение GG -системы. Эта обобщенная GG -функция – Φ -преобразование Фурье по $t \in \mathbb{R}^n$ следующей функции $F(t, x)$, зависящей от $x \in \mathbb{C}^N$ как от параметра:

$$F(t, x) = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j e^{i \sum_{i=1}^n t_i \omega_{ij}}\right). \quad (7)$$

Действие Φ на пространстве $\tilde{\mathcal{D}}$ основных функций задается формулой:

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = (2\pi)^n \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \varphi(-\omega k) \frac{x^k}{k!}, \quad \varphi \in \tilde{\mathcal{D}}, \quad (8)$$

где

$$\omega k = \left(\sum_{j=1}^N \omega_{1j} k_j, \dots, \sum_{j=1}^N \omega_{nj} k_j \right), \quad \frac{x^k}{k!} = \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{x_N^{k_N}}{k_N!}.$$

4. Введенную нами функцию $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ можно также трактовать как преобразование Фурье обобщенной функции $F(t, x)$. Именно, естественно определять спаривание функций $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}$ с функциями вида $\Phi_a(z) = \prod_{i=1}^n (z_i - a_i)^{-1}$ по формуле

$$\langle \Phi_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

При таком определении функции $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ отвечает линейный функционал, совпадающий, с точностью до множителя, с линейным функционалом Φ , т.е. с преобразованием Фурье обобщенной функции $F(t, x)$.

Существует другое определение этой функции: функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ удовлетворяет системе уравнений (4) и уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left(z_i f + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

и является единственным решением этой системы, регулярным относительно x .

Отметим, что функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ не удовлетворяет системе уравнений (2), а потому не является GG -функцией.

5. Исследуется связь между функциями $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ и решениями общих гипергеометрических систем и GG -систем. Каждая функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ интерпретируется как регуляризация, вообще говоря, многозначных относительно x решений соответствующей GG -системы. Обратно, исходя из функции $\mathcal{N}(z, x, \omega)$, можно строить решения GG -системы, ассоциированной с матрицей ω .

В случае целочисленных матриц ω функции $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ приводятся к виду:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{i=1}^n (z_i + m_i)^{-1} P_m(x, \omega) \right),$$

где $P_m(x, \omega)$ – регулярное решение общей гипергеометрической системы, ассоциированной с матрицей ω и вектором $z = -m$. Таким образом, $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ является произвольной функцией для всех таких решений.

В последнем параграфе результаты статьи переносятся на аналоги GG -систем и связанных с ними $\mathcal{N}$ -функций. Эти аналоги получаются заменой в уравнениях (4) GG -системы операторов дифференцирования $\partial/\partial x_j$ операторами более общего вида, в частности, операторами q -дифференцирования.

Краткое изложение результатов §§ 1–3 приведено в [8], см. также [7].

§ 1. Обобщенные GG -функции и $\mathcal{N}$ -функции

1.1. Преобразование Фурье основных и обобщенных функций. Обозначим через $\mathcal{D}$ пространство всех C^∞ -функций в $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями и через $\mathcal{D}'$ двойственное пространство (пространство обобщенных функций в $\mathbb{R}^n$). Введем пространство $\tilde{\mathcal{D}}$ преобразований Фурье $\mathcal{F}f$ функций $f \in \mathcal{D}$:

$$\varphi(z) = \mathcal{F}f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{\sqrt{-1}zt} dt,$$

где $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $zt = z_1 t_1 + \dots + z_n t_n$ и $dt = dt_1 \dots dt_n$. По теореме Пэли–Винера $\tilde{\mathcal{D}}$ состоит из всех целых аналитических функций на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих оценкам

$$|z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n} \varphi(z_1, \dots, z_n)| \leq C_q e^{\alpha_1 |\operatorname{Im} z_1| + \dots + \alpha_n |\operatorname{Im} z_n|}$$

для любых $q_1, \dots, q_n = 0, 1, \dots$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{D}}'$ пространство, двойственное к $\tilde{\mathcal{D}}$. Угловыми скобками $\langle F, f \rangle$ и $\langle \Phi, \varphi \rangle$ будет обозначаться спаривание функций из двойственных пространств.

Определение преобразования Фурье естественно переносится с пространства $\mathcal{D}$ основных функций на пространство $\mathcal{D}'$ обобщенных функций. Именно, преобразование Фурье функций $F \in \mathcal{D}'$ определяется равенством

$$\langle \mathcal{F}F, \mathcal{F}f \rangle = (2\pi)^n \langle F, f(-t) \rangle$$

для любой основной функции $f \in \mathcal{D}$.

Любая непрерывная функция F в $\mathbb{R}^n$ задает элемент пространства $\mathcal{D}'$:

$$\langle F, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} F(t) f(t) dt,$$

а потому определено ее преобразование Фурье $\mathcal{F}F \in \tilde{\mathcal{D}}'$:

$$\langle \mathcal{F}F, \mathcal{F}f \rangle = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} F(t) f(-t) dt. \quad (1.1)$$

Простейший пример: преобразование Фурье Φ непрерывной функции e^{iat} , где $at = a_1 t_1 + \dots + a_n t_n$, задается равенством

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = (2\pi)^n \varphi(-a)$$

для любой функции $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}$.

Другими важными примерами являются преобразования Фурье функций $e^{e^a t}$, $e^{e^{e^a} t}$ и т. д. Например, чтобы получить преобразование Фурье Φ функции $e^{e^{ia} t}$, разложим эту функцию в ряд:

$$e^{e^{ia} t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{ina t}.$$

Отсюда следует, что

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = (2\pi)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \varphi(-na)$$

для любой функции $\varphi \in \widetilde{\mathcal{D}}$.

1.2. Обобщенные GG -функции. Фиксируем произвольные натуральные числа n и $N \geq n$, вектор $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ и комплексную невырожденную $(n \times N)$ -матрицу $\omega = \|\omega_{ij}\|$. Поставим в соответствие вектору x и матрице ω следующую функцию от $t \in \mathbb{R}^n$:

$$F(t, x, \omega) = e^{\sum_{j=1}^N x_j e^{i(\omega_{1j} t_1 + \dots + \omega_{nj} t_n)}}. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем обобщенной GG -функцией, ассоциированной с x и ω , преобразование Фурье по t функции $F(t, x, \omega)$, т.е. линейный функционал Φ на $\widetilde{\mathcal{D}}$, заданный формулой:

$$\langle \Phi, \mathcal{F}f \rangle = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} F(t, x, \omega) f(-t) dt \quad (1.3)$$

для любой функции $f \in \mathcal{D}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Обобщенная функция Φ , ассоциированная с N -вектором $x = (x_1, \dots, x_N)$ и $(n \times N)$ -матрицей $\omega = \|\omega_{ij}\|$, имеет вид*

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = (2\pi)^n \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \varphi(-\omega k) \frac{x^k}{k!}, \quad \varphi \in \widetilde{\mathcal{D}}, \quad (1.4)$$

где

$$\omega k = \left(\sum_{j=1}^N \omega_{1j} k_j, \dots, \sum_{j=1}^N \omega_{nj} k_j \right), \quad \frac{x^k}{k!} = \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_N^{k_N}}{k_N!}.$$

В самом деле, разложим $F(t, x, \omega)$ в степенной ряд:

$$F(t, x, \omega) = \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^N e^{ik_j(t_1 \omega_{1j} + \dots + t_n \omega_{nj})} \right) \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_N^{k_N}}{k_N!}.$$

Тогда если

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{izt} dt, \quad f \in \mathcal{D},$$

то из (1.3) следует:

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \varphi \rangle &= (2\pi)^n \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t) \prod_{s=1}^n e^{-i(\omega_{s1}k_1 + \dots + \omega_{sN}k_N)t_s} dt \right) \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_N^{k_N}}{k_N!} \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \varphi(-\omega k) \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Удобно выражение для Φ представлять в следующей форме:

$$\Phi(z, x, \omega) = (2\pi)^n \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \delta(z + \omega k) \frac{x^k}{k!}, \quad (1.5)$$

где $\delta(z)$ – обобщенная функция, заданная равенством $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

Из (1.4) следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Обобщенная GG -функция Φ удовлетворяет системе уравнений:*

$$\frac{\partial \Phi(z, x, \omega)}{\partial x_j} = \Phi(z + \omega_j, x, \omega), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.6)$$

где ω_j – j -й столбец матрицы ω , а z надо понимать как вектор-столбец,

$$z_i \Phi + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Заметим, что с учетом (1.6) система (1.7) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$z_i \Phi + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \Phi(z + \omega_j, x, \omega) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

Система (1.6), (1.7) была введена в [5], [6] и названа GG -системой, ассоциированной с матрицей ω , а ее решения в классе аналитических функций от z и x – GG -функциями, ассоциированными с ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Пусть Φ_1 – обобщенная функция от $z \in \mathbb{C}^n$, непрерывная и дифференцируемая по параметру $x \in U$, где U – некоторая область в $\mathbb{C}^N$ (другими словами, Φ_1 – непрерывное дифференцируемое отображение $U \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}'$). Тогда если Φ_1 удовлетворяет уравнениям (1.6) и (1.8), то Φ_1 совпадает, с точностью до постоянного множителя, с обобщенной функцией Φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ_1 удовлетворяет условиям предложения. Из определения пространства $\tilde{\mathcal{D}}'$ следует, что Φ_1 является преобразованием Фурье по $t \in \mathbb{R}^n$ обобщенной функции F_1 от t , зависящей от параметра $x \in U$. Уравнения (1.6), (1.8) на функцию Φ_1 эквивалентны следующей системе уравнений на функцию F_1 :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_j} = e^{i(t\omega)_j} F_1, \quad j = 1, \dots, N, \quad \text{где} \quad (t\omega)_j = \sum_{k=1}^n t_k \omega_{kj}; \quad (1.9)$$

$$i \frac{\partial F_1}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j e^{i(t\omega)_j} F_1 = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.10)$$

Исходная функция F удовлетворяет уравнениям (1.9) и (1.10). Поэтому из уравнений (1.10) следует, что функция F_1 представима в виде

$$F_1(t, x) = a(x) + b(x)F(t, x).$$

Подставив это выражение в (1.9), получаем:

$$\frac{\partial a(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial b(x)}{\partial x_j} F(t, x) = e^{i(t\omega)_j} a(x), \quad j = 1, \dots, N.$$

Отсюда следует, что $a \equiv 0$ и $b = \text{const}$. Значит, $F_1 = cF$, а потому $\Phi_1 = c\Phi$.

1.3. $\mathcal{N}$ -функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем $\mathcal{N}$ -функцией, ассоциированной с $(n \times N)$ -матрицей ω , следующую функцию $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ от $z \in \mathbb{C}^n$ и $x \in \mathbb{C}^N$:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{z_i + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} k_j} \right) \frac{x^k}{k!}, \quad \text{где } \frac{x^k}{k!} = \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{x_N^{k_N}}{k_N!}. \quad (1.11)$$

Обозначим через M_ω объединение гиперплоскостей $z_i + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} k_j = 0$ в $\mathbb{C}^n$, где $i = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{Z}_+^N$, и через $\overline{M}_\omega$ — замыкание M_ω . Очевидно, что ряд (1.11) сходится при любом $x \in \mathbb{C}^N$ и $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{M}_\omega$, и его сумма при любом фиксированном x — голоморфная функция от z в области $\mathbb{C}^n \setminus \overline{M}_\omega$. Для любой вещественной матрицы ω область $\mathbb{C}^n \setminus \overline{M}_\omega$ всюду плотна в $\mathbb{C}^n$. Для комплексных матриц ω это, вообще говоря, не так: $\mathbb{C}^n \setminus \overline{M}_\omega$ может быть и пустым множеством. Поставим в соответствие функции $\mathcal{N}$ линейный функционал на $\tilde{\mathcal{D}}$. Для этого определим спаривание функций $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}$ с функциями вида

$$\Phi_a(z) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{z_i - a_i}, \quad a \in \mathbb{C}^n,$$

равенством

$$\langle \Phi_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Из этого определения и предложения 1.1 следует, что линейный функционал на $\tilde{\mathcal{D}}$, отвечающий функции $\mathcal{N}$, равен, с точностью до множителя $(2\pi)^n$, преобразованию Фурье по t функции $F(t, x, \omega) = e^{\sum x_j e^{i(\omega_1 j t_1 + \dots + \omega_n j t_n)}}$. Естественно называть функцию $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ преобразованием Фурье функции $F(t, x, \omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. $\mathcal{N}$ -функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial \mathcal{N}(z, x, \omega)}{\partial x_j} = \mathcal{N}(z + \omega_j, x, \omega), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1.12)$$

где ω_j — j -й столбец матрицы ω_j , а $z = (z_1, \dots, z_n)$ понимается как вектор-столбец;

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left(z_i \mathcal{N} + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_j} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.13)$$

Обратно, любое решение системы (1.12), (1.13), регулярное относительно x , совпадает, с точностью до постоянного множителя, с функцией $\mathcal{N}(z, x, \omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (1.12) следует непосредственно из определения функции $\mathcal{N}$. Далее, из определения $\mathcal{N}$ следует, что

$$z_i \mathcal{N} + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x_j} = \sum_k \frac{z_i + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} k_j}{\prod_{s=1}^n (z_s + \sum_{j=1}^N \omega_{sj} k_j)} \frac{x^k}{k!}, \quad (1.14)$$

где $k = (k_1, \dots, k_N)$. Так как правая часть в (1.14) не зависит от z_i , то из (1.14) следует равенство (1.13).

Обратно, пусть $f(z, x)$ – любое решение системы (1.12), (1.13), регулярное относительно x , т.е.

$$f(z, x) = \sum_k a_k(z) \frac{x^k}{k!}.$$

Положим

$$a_k(z) = \frac{b_k(z)}{\prod_{s=1}^n (z_s + \sum_{j=1}^N \omega_{sj} k_j)}.$$

Тогда

$$z_i f + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_k \frac{b_k(z)}{\prod_{s \neq i} (z_s + \sum_{j=1}^N \omega_{sj} k_j)} \frac{x^k}{k!}.$$

Поэтому из равенства (1.14) следует, что $\frac{\partial b_k(z)}{\partial z_i} = 0$, $i = 1, \dots, n$, и, значит, все $b_k(z)$ суть постоянные. Из (1.12) следует, что эти постоянные равны между собой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ не удовлетворяет уравнениям (1.7), а потому не является GG -функцией.

Приведем другую систему соотношений для $\mathcal{N}$ -функций. Обозначим:

$$L_i = z_i E + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где E – единичный оператор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ удовлетворяет уравнениям

$$L_1 \dots L_n \mathcal{N} = e^{x_1 + \dots + x_N} \quad (1.15)$$

и является единственным решением (1.15), регулярным относительно x .

В самом деле, очевидно, что функция $\mathcal{N}$ удовлетворяет уравнению (1.15). Обратно, если f – любое решение уравнения (1.15), регулярное относительно x , то в обозначениях предложения 1.4 имеем

$$L_1 \dots L_n f = \sum_k b_k(z) \frac{x^k}{k!}.$$

Значит, из равенства (1.15) следует, что $b_k(z) = 1$ для любого k , а потому $f = \mathcal{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Если $\operatorname{Re}(\omega_{ij}) \geq 0$ для любых i и j , то функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ имеет следующее интегральное представление:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{\sum_{j=1}^N x_j t_1^{\omega_{1j}} \dots t_n^{\omega_{nj}}} t_1^{z_1-1} \dots t_n^{z_n-1} dt_1 \dots dt_n. \quad (1.16)$$

Интеграл сходится при $\operatorname{Re}(z_i) > 0, i = 1, \dots, n$. При других z_i его надо понимать как аналитическое продолжение по z_i .

1.4. Соотношения между $\mathcal{N}$ -функциями; свертка $\mathcal{N}$ -функций. Следующие утверждения непосредственно вытекают из определения $\mathcal{N}$ -функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. $\mathcal{N}$ -функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ инвариантна относительно любой перестановки одновременно столбцов матрицы ω и координат вектора x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Обозначим через $\omega^{(i)}$ и $\tilde{\omega}^{(j)}$ матрицы, полученные из ω отбрасыванием соответственно i -й строки и j -го столбца. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} L_i \mathcal{N}(z_1, \dots, z_n, x, \omega) &= \mathcal{N}(z_1, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n, x, \omega^{(i)}), \\ \mathcal{N}(z, x_1, \dots, x_N, \omega) &= \sum_{k_j=0}^{\infty} \mathcal{N}(z + k_j \omega_j, x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_N, \tilde{\omega}^{(j)}) \frac{x_j^{k_j}}{k_j!}; \\ i &= 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.17)$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $\omega = (\omega', \omega'')$ – разбиение ω на блоки из p и q столбцов соответственно, то

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(z, x, \omega) &= \sum_{k_1, \dots, k_p=0}^{\infty} \mathcal{N}\left(z + \sum_{j=1}^p k_j \omega_j, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}, \omega''\right) \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_p^{k_p}}{k_p!} \\ &= \sum_{k_{p+1}, \dots, k_{p+q}=0}^{\infty} \mathcal{N}\left(z + \sum_{j=p+1}^{p+q} k_j \omega_j, x_1, \dots, x_p, \omega'\right) \frac{x_{p+1}^{k_{p+1}}}{k_{p+1}!} \dots \frac{x_{p+q}^{k_{p+q}}}{k_{p+q}!}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем сверткой $\mathcal{N}$ -функций $\mathcal{N}(z, x', \omega')$ и $\mathcal{N}(z, x'', \omega'')$, где $x' = (x_1, \dots, x_p)$, $x'' = (x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$ и ω', ω'' – матрицы размера $n \times p$ и $n \times q$ соответственно, преобразование Фурье произведения $F(t, x', \omega')$ и $F(t, x'', \omega'')$.

Очевидно, что $F(t, x', \omega') F(t, x'', \omega'') = F(t, x, \omega)$, где $x = (x_1, \dots, x_{p+q})$, $\omega = (\omega', \omega'')$. Следовательно, сверткой $\mathcal{N}(z, x', \omega')$ и $\mathcal{N}(z, x'', \omega'')$ является $\mathcal{N}$ -функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$. По предложению 1.8 (следствие) она выражается через $\mathcal{N}(z, x', \omega')$ и $\mathcal{N}(z, x'', \omega'')$ по формулам (1.18).

1.5. Добавление: многоэтажные экспоненты и их преобразование Фурье. Будем называть функции $e^{\omega_1 t_1 + \dots + \omega_n t_n}$ одноэтажными экспонентами, а введенные в п. 1.2 функции $e^{\sum_{j=1}^N x_j e^{\sum_{i=1}^n \omega_{ij} t_i}}$ – двухэтажными экспонентами. Определим по аналогии m -этажные экспоненты, где m – любое натуральное число.

Пусть $n_1, \dots, n_m, \dots$ – любая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $M_{n_1, \dots, n_m}$ пространство комплексных многомерных матриц $x^{(m)} = \|x_{i_1, \dots, i_m}\|$ размера $n_1 \times \dots \times n_m$, где каждый индекс i_s пробегает интервал $[1, n_s]$.

Определим индукцией по m функции $\Phi_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ на $M_{n_1} \times \dots \times M_{n_1, \dots, n_m}$. По определению $\Phi_1(x^{(1)}) = e^{x_1 + \dots + x_{n_1}}$; функция $\Phi_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ получается из функции $\Phi_{m-1}(x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)})$ подстановкой

$$x_{i_1, \dots, i_{m-1}} \longmapsto x_{i_1, \dots, i_{m-1}} e^{\sum_{i=1}^{n_m} x_{i_1, \dots, i_{m-1}, i}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем m -этажной экспонентой и обозначим через $\exp^{(m)}$ функцию от $t \in \mathbb{R}^n$, $x^{(i)} \in M_{n_1, \dots, n_i}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $\omega \in M_{n_1, \dots, n_m}$, полученную из $\Phi_m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ заменой

$$x_{i_1, \dots, i_m} \longmapsto \omega_{i_1, \dots, i_m} t_{i_m}.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \exp^{(1)}(t, \omega) &= e^{\sum \omega_i t_i}, & \exp^{(2)}(t, x^{(1)}, \omega) &= e^{\sum_i x_i e^{\sum_j \omega_{ij} t_j}}, \\ \exp^{(3)}(t, x^{(1)}, \omega) &= e^{\sum_i x_i e^{\sum_j x_{ij} e^{\sum_k \omega_{ijk} t_k}}}, \end{aligned}$$

и т. д.

Найдем преобразование Фурье функции $\exp^{(m)}(t, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}, \omega)$. Обозначим:

$$\begin{aligned} &\psi_k(x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}) \\ &= \sum \left(\prod_{i_1, \dots, i_{m-1}} \frac{x_{i_1}^{k_{i_1}}}{k_{i_1}!} \cdot \frac{(k_{i_1} x_{i_1, i_2})^{k_{i_1, i_2}}}{k_{i_1, i_2}!} \dots \frac{(k_{i_1, \dots, i_{m-2}} x_{i_1, \dots, i_{m-1}})^{k_{i_1, \dots, i_{m-1}}}}{k_{i_1, \dots, i_{m-1}}!} \right), \end{aligned}$$

где $k = \|k_{i_1, \dots, i_{m-1}}\|$ – матрица размера $n_1 \times \dots \times n_{m-1}$ с целыми неотрицательными элементами; суммирование ведется по всем $k_{i_1} \geq 0, \dots, k_{i_1, \dots, i_{m-2}} \geq 0$.

По аналогии с п. 1.3 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. $\mathcal{N}$ -функция, задающая преобразование Фурье функции $\exp^{(m)}(t, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}, \omega)$, имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(z, x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}, \omega) \\ &= \sum_k \left(\prod_{s=1}^{n_m} \frac{1}{z_s + \sum_{i_1, \dots, i_{m-1}} k_{i_1, \dots, i_{m-1}} \omega_{i_1, \dots, i_{m-1}, s}} \right) \psi_k(x^{(1)}, \dots, x^{(m-1)}). \end{aligned}$$

§ 2. $\mathcal{N}$ -функции для случая $n = 1$

Здесь исследуется связь между $\mathcal{N}$ -функциями для случая $n = 1$ и решениями соответствующих GG -систем и общих гипергеометрических систем. Случаю произвольного n посвящен следующий параграф.

При $n = 1$ произвольная $\mathcal{N}$ -функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ задается N -вектором

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$$

и имеет вид

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \frac{1}{z + \omega_1 k_1 + \dots + \omega_N k_N} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_N^{k_N}}{k_N!}. \quad (2.1)$$

Отметим, что $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ существенно зависит только от отношений ω_i/ω_j , поскольку

$$\mathcal{N}(z, x, \lambda\omega) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{N}\left(\frac{z}{\lambda}, x, \omega\right) \quad \text{для любого } \lambda \neq 0.$$

Функция $\mathcal{N}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial f(z, x, \omega)}{\partial x_j} = f(z + \omega_j, x, \omega), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$zf + \sum_{j=1}^N \omega_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = e^{\sum x_j} \quad (2.3)$$

и является единственным решением этой системы, регулярным относительно x .

Соответствующая GG -система, ассоциированная с вектором ω , состоит из уравнений (2.2) и уравнения

$$zf + \sum_{j=1}^N \omega_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0. \quad (2.4)$$

2.1. Функция $\Gamma_0(z, x)$. В простейшем случае $n = N = 1$ $\mathcal{N}$ -функция задается одним комплексным числом ω и является функцией двух комплексных переменных z и x ,

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z + k\omega} \frac{x^k}{k!}.$$

Введем функцию

$$\Gamma_0(z, x) = \mathcal{N}(z, x, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z + k} \frac{x^k}{k!}. \quad (2.5)$$

Отметим, что $\mathcal{N}(z, x, \omega) = (1/\omega)\Gamma_0(z/\omega, x)$ при $\omega \neq 0$. Из определения $\Gamma_0(z, x)$ следует:

1) функция $\Gamma_0(x)$ регулярна относительно x и мероморфна относительно z ; ее особенности относительно z – простые полюсы в точках $z = 0, -1, \dots$ с вычетами

$$\text{Выч}_{z=-k} = \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots;$$

2) $\Gamma_0(z, x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial \Gamma_0(z, x)}{\partial x} = \Gamma_0(z + 1, x), \quad z\Gamma_0 + x \frac{\partial \Gamma_0}{\partial x} = e^x; \quad (2.6)$$

3) функция $\Gamma_0(z, x)$ имеет следующее интегральное представление:

$$\Gamma_0(z, x) = \int_0^1 e^{xt} t^{z-1} dt = \int_{-\infty}^0 e^{xe^s} e^{zs} ds. \quad (2.7)$$

В частности, $\Gamma_0(z, -1)$ является неполной гамма-функцией:

$$\Gamma_0(z, -1) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Интеграл (2.7) сходится только при $\operatorname{Re}(z) > 0$; при $\operatorname{Re}(z) < 0$ его надо понимать в смысле регуляризованного значения (см. [11]). Например, при $0 > \operatorname{Re}(z) > -1$ он задается следующим равенством:

$$\int_0^1 e^{xt} t^{z-1} dt = \int_0^1 (e^{xt} - 1) t^{z-1} dt + \frac{1}{z}.$$

Сравним $\Gamma_0(z, x)$ с решениями GG -системы, отвечающей $N = n = 1$ и $\omega = 1$, т.е. системы уравнений

$$\frac{\partial f(z, x)}{\partial x} = f(z + 1, x), \quad z f + x \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

Любое решение этой системы имеет вид

$$f(z, x) = \varphi(z) \frac{x^{-z}}{\Gamma(1-z)},$$

где $\varphi(z)$ – периодическая функция с периодом 1, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, а x^{-z} – произвольная ветвь многозначной степенной функции. В частности, системе (2.8) удовлетворяет функция

$$\Gamma(z, x) = \frac{x^{-z}}{\Gamma(1-z)}.$$

Существенное различие между функциями Γ_0 и Γ в том, что первая однозначна, а вторая – многозначная функция от x . Сходство же в том, что при фиксированном x обе функции однозначны, имеют полюсы в одних и тех же точках $z = 0, -1, -2, \dots$ и их вычеты в этих точках совпадают. Таким образом, разность $\Gamma_0(z, x) - \Gamma(z, x)$ является целой аналитической функцией от z .

2.2. Выражение $\mathcal{N}$ -функций через функцию $\Gamma_0(z, x)$ (формулы приведения).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. $\mathcal{N}$ -функция, ассоциированная с $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, где $\omega_i \neq 0$, $i = 1, \dots, N$, представима в виде

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_k \Gamma_0\left(\frac{1}{\omega_i} \left(z + \sum_{j \neq i} \omega_j k_j\right), x_i\right) \prod_{j \neq i} \frac{x_j^{k_j}}{k_j!}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.9)$$

В самом деле, из равенства (1.18) следует, что

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \frac{1}{\omega_N} \sum_{k_1, \dots, k_{N-1}} \Gamma_0\left(\frac{z + k_1 \omega_1 + \dots + k_{N-1} \omega_{N-1}}{\omega_N}, x_N\right) \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{x_{N-1}^{k_{N-1}}}{k_{N-1}!}.$$

Отсюда, поскольку $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ сохраняется при любой перестановке координат одновременно у векторов $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ и $x = (x_1, \dots, x_N)$, следует (2.9).

Назовем формулы (2.9) формулами приведения для функции $\mathcal{N}$.

2.3. Связь с GG -функциями. Регуляризация GG -функций. Рассмотрим GG -систему (2.2), (2.4), ассоциированную с $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$. Будем предполагать, что $\omega_i \neq 0, i = 1, \dots, N$. (В противном случае GG -система сводится к GG -системе на функции от меньшего числа переменных.)

Предложение 2.2 [6]. GG -системе (2.2), (2.4) формально удовлетворяют следующие ряды:

$$K_i(z, x, \omega) = \sum_k \Gamma\left(\frac{1}{\omega_i} \left(z + \sum_{j \neq i} \omega_j k_j\right), x_i\right) \prod_{j \neq i} \frac{x_j^{k_j}}{k_j!}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.10)$$

где $\Gamma(\zeta, x) = \frac{x^{-\zeta}}{\Gamma(1-\zeta)}$, а суммирование ведется по всем $k_j \geq 0, j \neq i$.

Сходимость ряда (2.10) зависит от отношений чисел ω_j/ω_i . Если $\operatorname{Re} \omega_j/\omega_i \leq 1$ для всех $j \neq i$, то ряд сходится в окрестности точек x , у которых $x_j = 0$ при $j \neq i$ и $x_i \neq 0$. Если $\operatorname{Re} \omega_j/\omega_i < 1$ для всех $j \neq i$, то ряд сходится при любом $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \neq 0$. Наконец, если $\operatorname{Re} \omega_j/\omega_i > 1$ хотя бы для одного индекса j , то ряд всюду расходится.

Сравним выражения (2.10) для решений GG -системы с формулами приведения (2.9) для $\mathcal{N}$ -функции. Мы видим, что функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ получается из функции $K_i(z, x, \omega)$ заменой $\Gamma(\zeta, x)$ на $\Gamma_0(\zeta, x)$. Назовем эту операцию замены *регуляризацией функции* K_i . Подчеркнем, что регуляризация определяется независимо от того, сходится или расходится ряд (2.10).

Обратно, если в формулах приведения (2.9) для $\mathcal{N}$ -функции заменить $\Gamma_0(\zeta, x)$ функцией $\Gamma(\zeta, x) = \frac{x^{-\zeta}}{\Gamma(1-\zeta)}$, то мы получим решения K_i (возможно, формальные) GG -системы (2.2), (2.4).

Подчеркнем, что, исходя из различных формул приведения одной и той же $\mathcal{N}$ -функции $\mathcal{N}(z, x, \omega)$, получаются, вообще говоря, различные решения GG -системы (2.2), (2.4).

ПРИМЕЧАНИЕ. Если в выражении для K_i заменить гамма-функцию Эйлера $\Gamma(\zeta)$ любым другим решением функционального уравнения $\varphi(\zeta+1) = \zeta\varphi(\zeta)$, то полученная функция также будет решением исходной GG -системы. Согласно [6] такими функциями исчерпываются все решения GG -системы, регулярные в окрестности любой точки $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_j = 0$ при $j \neq i$ и $x_i \neq 0$.

2.4. Пример: случай $N = 2, n = 1$. В этом случае $\mathcal{N}$ -функция задается вектором $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ и имеет вид

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{1}{z + k_1\omega_1 + k_2\omega_2} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \frac{x_2^{k_2}}{k_2!}. \quad (2.11)$$

Она является единственным регулярным относительно x решением системы уравнений

$$\frac{\partial f(z, x, \omega)}{\partial x_j} = f(z + \omega_j, x, \omega), \quad j = 1, 2, \quad (2.12)$$

$$zf + \omega_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \omega_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_1 + x_2}. \quad (2.13)$$

Формулы приведения для $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_0\left(\frac{1}{\omega_2}(z + k\omega_1), x_2\right) \frac{x_1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_0\left(\frac{1}{\omega_1}(z + k\omega_2), x_1\right) \frac{x_2^k}{k!}.$$

GG -система, ассоциированная с $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, состоит из уравнений (2.12) и уравнения

$$zf + \omega_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \omega_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0. \quad (2.14)$$

Уравнениям (2.12), (2.14) удовлетворяют формальные ряды

$$K_1(z, x, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{\omega_2}(z + k\omega_1), x_2\right) \frac{x_1^k}{k!}$$

и

$$K_2(z, x, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{1}{\omega_1}(z + k\omega_2), x_1\right) \frac{x_2^k}{k!}.$$

Первый ряд сходится в окрестности точек $(0, x_2)$, $x_2 \neq 0$, если $\operatorname{Re} \omega_1/\omega_2 \leq 1$, второй – в окрестности точек $(x_1, 0)$, $x_1 \neq 0$, если $\operatorname{Re} \omega_2/\omega_1 \leq 1$. Отсюда следует, что сходится хотя бы один из этих рядов. При этом возможен и случай, когда сходится только один ряд, и случай, когда сходятся оба ряда.

2.5. $\mathcal{N}$ -функции, связанные с целочисленными векторами $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$.

Если все отношения ω_i/ω_j – рациональные числа, то из уравнений

$$\frac{\partial f(z, x, \omega)}{\partial x_j} = f(z + \omega_j, x, \omega)$$

следует система дифференциальных уравнений:

$$\prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{l'_j} f = \prod_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{l''_j} f \quad (2.15)$$

для любых целых неотрицательных l'_j и l''_j таких, что

$$\sum_{j=1}^N l'_j \omega_j = \sum_{j=1}^N l''_j \omega_j.$$

Таким образом, $\mathcal{N}$ -функция, ассоциированная с ω , удовлетворяет уравнению (2.15) и уравнению

$$zf + \sum_{j=1}^N \omega_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = e^{\sum x_j}, \quad (2.16)$$

а любое решение GG -системы, ассоциированной с ω , – уравнению (2.15) и уравнению

$$zf + \sum_{j=1}^N \omega_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0. \quad (2.17)$$

Система уравнений (2.15), (2.17), в которой z – произвольное фиксированное число, называется общей гипергеометрической системой, ассоциированной с ω и z , а ее решения в классе аналитических функций на $\mathbb{C}^N$ – общими гипергеометрическими функциями, ассоциированными с ω и z . Не нарушая общности, будем дальше предполагать, что все ω_i – целые числа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. $\mathcal{N}$ -функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$, ассоциированная с матрицей $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{Z}^N$, представима в виде

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+m} P_m(x, \omega), \quad (2.18)$$

где

$$P_m(x, \omega) = \sum_{k \in M_m(\omega)} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{x_N^{k_N}}{k_N!}; \quad (2.19)$$

суммирование ведется по множеству $M_m(\omega)$ всех $k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ таких, что

$$k_1 \omega_1 + \cdots + k_N \omega_N = m. \quad (2.20)$$

При $M_m(\omega) = \emptyset$ полагаем $P_m(x, \omega) = 0$.

Очевидно, что все P_m являются целыми функциями от x . В случае, когда все ω_i одного знака, множества M_m конечны, а потому функции P_m являются многочленами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Функция $P_m(x, \omega)$ удовлетворяет общей гипергеометрической системе (2.15), (2.17) при $z = -m$ и является единственным, с точностью до множителя, решением этой системы, регулярным относительно x .

СЛЕДСТВИЕ. $\mathcal{N}$ -функция, ассоциированная с ω , является производящей функцией для регулярных относительно x решений общих гипергеометрических систем (2.15), (2.17), в которых параметр z пробегает целочисленные значения.

Представим $P_m(x, \omega)$ в форме ряда по решетке $\mathbb{Z}^{N-1}$. Фиксируем произвольный вектор $k^0 = (k_1^0, \dots, k_N^0) \in \mathbb{Z}^N$ такой, что $\sum_{j=1}^N k_j^0 \omega_j = m$, и систему образующих $l^i = (l_1^i, \dots, l_N^i)$, $i = 1, \dots, N-1$, в подрешетке $L \subset \mathbb{Z}^N$ векторов $l = (l_1, \dots, l_N)$ таких, что $\sum_{j=1}^N l_j \omega_j = 0$. Тогда имеем:

$$P_m(x, \omega) = \prod_{j=1}^N x_j^{k_j^0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{N-1}} c(m) y_1^{m_1} \cdots y_{N-1}^{m_{N-1}},$$

где

$$c(m) = \left(\prod_{j=1}^N \Gamma \left(k_j^0 + \sum_{i=1}^{N-1} m_i l_j^i + 1 \right) \right)^{-1}, \quad y_j = x_j^{\sum_{i=1}^{N-1} m_i l_j^i}.$$

Заметим, что $c(m) = 0$, если $k_j^0 + \sum_{i=1}^{N-1} m_i l_j^i < 0$ хотя бы для одного индекса j .

2.6. Случай $N = 2$, $n = 1$, $\omega \in \mathbb{Z}^2$. Рассмотрим отдельно случаи, когда знаки ω_1, ω_2 совпадают и когда они различны.

2.6.1. $\omega = (p, q)$, $p, q > 0$. В этом случае

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z+m} P_m(x), \quad \text{где} \quad P_m(x) = \sum_{k \in M_m} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{x_2^{k_2}}{k_2!},$$

$k = (k_1, k_2)$ пробегает конечное множество M_m пар, для которых

$$k_1 p + k_2 q = m.$$

Если таких пар не существует, то предполагается, что $P_m = 0$. В частности, $P_m = 0$ при $m < \min(p, q)$. Функция P_m является решением гипергеометрической системы

$$\frac{\partial^q f}{\partial x_1^q} = \frac{\partial^p f}{\partial x_2^p}, \quad p x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + q x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = m f.$$

Например, при $\omega = (1, 1)$ имеем

$$\mathcal{N} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{z+m} \frac{(x_1+x_2)^m}{m!}.$$

2.6.2. $\omega = (-p, q)$, $p, q > 0$. В этом случае

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+m} P_m(x), \quad \text{где } P_m(x) = \sum_{k \in M'_m} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \frac{x_2^{k_2}}{k_2!},$$

$k = (k_1, k_2)$ пробегает множество M'_m пар, для которых

$$-k_1 p + k_2 q = m.$$

Не нарушая общности, можно предполагать, что p и q взаимно просты; тогда все множества M'_m непусты и бесконечны. Функция P_m является решением гипергеометрической системы

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x_1^q \partial x_2^p} = f, \quad -p x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + q x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = m f.$$

Например, при $\omega = (-1, 1)$ имеем

$$\mathcal{N} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+m} P_m(x), \quad \text{где } P_m(x) = x_2^m \sum \frac{(x_1 x_2)^k}{k! (k+m)!}$$

(сумма по $k \geq \max\{0, -m\}$). Функция $P_m(x)$ выражается через функцию Бесселя [2].

§ 3. $\mathcal{N}$ -функции, ассоциированные с произвольными матрицами ω

3.1. $\mathcal{N}$ -функции и GG -функции, ассоциированные с квадратными матрицами ω . Пусть $\omega = \|\omega_{ij}\|$ – произвольная комплексная квадратная невырожденная матрица порядка n . Обозначим через $\Gamma_0(z, x, \omega)$, $z, x \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{N}$ -функцию, ассоциированную с этой матрицей. Согласно определению п. 1.3 $\Gamma_0(z, x, \omega)$ является преобразованием Фурье по $t \in \mathbb{R}^n$ функции

$$F(t, x, \omega) = e^{\sum_{j=1}^N x_j e^{i(\omega_{1j} t_1 + \dots + \omega_{nj} t_n)}}$$

и задается формулой

$$\Gamma_0(z, x, \omega) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{z_i + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} k_j} \right) \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{x_n^{k_n}}{k_n!}. \quad (3.1)$$

Она удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial f(z, x, \omega)}{\partial x_j} = f(z + \omega_j, x, \omega), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left(z_i f + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

и является единственным решением этой системы, регулярным относительно x .

Соответствующая GG -система, ассоциированная с той же матрицей ω , состоит из уравнений (3.2) и уравнений

$$z_i f + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Очевидно, что эта GG -система эквивалентна системе уравнений (3.2) и уравнений

$$z_i f(z, x, \omega) + \sum_{j=1}^n \omega_{ij} x_j f(z + \omega_j, x, \omega) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. GG -системе (3.2), (3.5) удовлетворяет следующая функция от $z, x \in \mathbb{C}^n$:

$$\Gamma(z, x, \omega) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{-\zeta_i}}{\Gamma(1 - \zeta_i)}, \quad \text{где } \zeta = \omega^{-1}z, \quad (3.6)$$

$\Gamma(\zeta_i)$ – гамма-функция Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем от z к переменным $\zeta = \omega^{-1}z$ и обозначим:

$$f_1(\zeta, x, \omega) = f(\omega\zeta, x, \omega).$$

Система уравнений (3.2), (3.5) на функцию f эквивалентна следующей системе уравнений на функцию f_1 :

$$\frac{\partial f_1(\zeta, x, \omega)}{\partial x_j} = f_1(\zeta + e_j, x, \omega), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

где $e_j, j = 1, \dots, n$, – стандартный базис в $\mathbb{C}^n$;

$$\zeta_i f_1(\zeta, x, \omega) + x_i f_1(\zeta + e_i, x, \omega) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Очевидно, что функция $\Gamma(z, x, \omega)$ этой системе уравнений удовлетворяет.

ПРИМЕЧАНИЕ. Любое решение системы (3.2), (3.5) имеет вид

$$f(z, x, \omega) = \varphi(z)\Gamma(z, x, \omega),$$

где функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям периодичности:

$$\varphi(z + \omega_j) = \varphi(z), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

В самом деле, положим $f_1(\zeta, x, \omega) = \psi(\zeta, x)\Gamma(z, x, \omega)$, где $\zeta = \omega^{-1}z$. Из уравнения (3.8) следует, что $\psi(\zeta + e_j, x) = \psi(\zeta, x)$, $j = 1, \dots, n$. Отсюда и из уравнения (3.7) следует, что $\partial\psi/\partial x_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Значит, ψ не зависит от x и функция $\varphi(z) = \psi(\omega^{-1}z)$ удовлетворяет условию периодичности (3.9).

3.2. Формулы приведения для $\mathcal{N}$ -функций. Регуляризация решений GG -системы. Пусть теперь ω – произвольная невырожденная матрица размера $n \times N$, где $N > n$. Из предложений 1.7 и 1.8 (следствие) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для любого n -элементного подмножества $I \subset [1, N]$ функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ представима в виде

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_k \Gamma_0 \left(z + \sum_{j \notin I} k_j \omega_j, x_I, \omega_I \right) \prod_{j \notin I} \frac{x_j^{k_j}}{k_j!}, \quad (3.10)$$

где x_I – вектор с координатами x_i , $i \in I$, ω_I – n -матрица из столбцов ω_i , $i \in I$, матрицы ω , $\Gamma_0(z, x, \omega)$ – $\mathcal{N}$ -функция, ассоциированная с квадратной матрицей ω_I , см. п. 3.1.

Назовем формулу (3.10) формулой приведения для функции $\mathcal{N}(z, x, \omega)$, связанной с подмножеством $I \subset [1, N]$.

Установим связь между функцией $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ и решениями GG -системы уравнений, ассоциированной с той же матрицей ω :

$$\frac{\partial f(z, x, \omega)}{\partial x_j} = f(z + \omega_j, x, \omega), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.11)$$

$$z_i f(z, x, \omega) + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j f(z + \omega_j, x, \omega) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Назовем n -элементное подмножество $I \subset [1, N]$ базисным, если столбцы ω_i , $i \in I$, матрицы ω линейно независимы.

Свяжем с каждым базисным подмножеством $I \subset [1, N]$ следующий формальный ряд:

$$K_I(z, x, \omega) = \sum_k \Gamma \left(z + \sum_{j \notin I} k_j \omega_j, x_I, \omega_I \right) \prod_{j \notin I} \frac{x_j^{k_j}}{k_j!}, \quad (3.13)$$

где $\Gamma(z, x_I, \omega_I)$ определена формулой (3.6), т.е.

$$\Gamma \left(z + \sum_{j \notin I} k_j \omega_j, x_I, \omega_I \right) = \prod_{i \in I} \frac{x_i^{-\zeta_i}}{\Gamma(1 - \zeta_i)}, \quad \text{где } \zeta = \omega_I^{-1} \left(z + \sum_{j \notin I} k_j \omega_j \right).$$

Заметим, что в области сходимости этот ряд является однозначной функцией от z и многозначной функцией от x . Чтобы определить условия его сходимости, подставим в (3.13) выражение для функции $\Gamma(z, x_I, \omega_I)$. Мы получим:

$$K_I(z, x, \omega) = \prod_{i \in I} x_i^{-\zeta_i} \sum_k \left(\left(\prod_{i \in I} \Gamma \left(1 - \zeta_i - \sum_{j \notin I} \sigma_{ij} k_j \right) \right)^{-1} \prod_{j \notin I} \frac{y_j^{k_j}}{k_j!} \right),$$

где ζ_i и σ_{ij} , $i \in I$, — координаты соответственно векторов $\omega_I^{-1}z$ и $\omega_I^{-1}\omega_j$,

$$y_j = x_j \prod_{i \in I} x_i^{-\sigma_{ij}}, \quad j \notin I.$$

Из асимптотики для гамма-функции следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если $\sum_{i \in I} \operatorname{Re}(\sigma_{ij}) \leq 1$ для всех $j \notin I$, то ряд (3.13) сходится в окрестности $y = 0$. Если $\sum_{i \in I} \operatorname{Re}(\sigma_{ij}) < 1$ для всех $j \notin I$, то ряд (3.13) сходится при любом y . Наконец, если $\sum_{i \in I} \operatorname{Re}(\sigma_{ij}) > 1$ хотя бы для одного $j \notin I$, то ряд (3.13) всюду расходится.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Ряды $K_I(z, x, \omega)$ удовлетворяют GG -системе (3.11), (3.12), ассоциированной с матрицей ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для наглядности $I = \{1, \dots, n\}$. Представим ω в блочной форме $\omega = (\omega_I, \omega_J)$, где ω_I — матрица из первых n столбцов, и обозначим: $\sigma = \omega_I^{-1}\omega_J$. Как и в доказательстве предложения 3.1, обозначим: $f_1(\zeta, x, \omega) = f(\omega\zeta, x, \omega)$.

Система уравнений (3.11), (3.12) для f эквивалентна следующей системе уравнений для функции f_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(\zeta, x, \omega)}{\partial x_j} &= f_1(\zeta + e_j, x, \omega) \quad \text{при } j = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial f_1(\zeta, x, \omega)}{\partial x_{n+j}} &= f_1(\zeta + \sigma_j, x, \omega) \quad \text{при } j = 1, \dots, N-n, \end{aligned}$$

где σ_j — j -й столбец матрицы σ ,

$$\zeta_i f_1(\zeta, x, \omega) + x_i f_1(\zeta + e_i, x, \omega) + \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_{ij} x_{n+j} f_1(\zeta + \sigma_j, x, \omega) = 0, \quad i = 1, \dots, N-n.$$

В переменных ζ функция K_I имеет вид:

$$K_I(z, x, \omega) = \sum_k \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i^{-\zeta_i - \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_{ij} k_j}}{\Gamma(1 - \zeta_i - \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_{ij} k_j)} \prod_{j=1}^{N-n} \frac{x_{n+j}^{k_j}}{k_j!} \right).$$

Легко убедиться, что она удовлетворяет этой системе уравнений.

Сравним формулы приведения (3.10) для $\mathcal{N}$ -функции с формулами (3.13) для решений K_I GG -системы. Мы видим, что $\mathcal{N}$ -функция получается из любого решения K_I GG -системы заменой в выражении для K_I функции $\Gamma(z, x, \omega)$ на функцию $\Gamma_0(z, x, \omega)$. Назовем эту операцию регуляризацией решения GG -системы. Заметим, что эта операция определена независимо от сходимости или расходимости ряда K_I .

Обратно, с каждой формулой приведения для $\mathcal{N}$ -функции, ассоциированной с базисным подмножеством $I \subset [1, N]$, связано (возможно, формальное) решение K_I GG -системы, которое получается заменой в формуле приведения для $\mathcal{N}(z, x, \omega)$ функции Γ_0 на функцию Γ .

ПРИМЕЧАНИЕ. Любое решение GG -системы (3.11), (3.12), регулярное в окрестности точек x с координатами $x_i = 0$ при $i \notin I$, $x_i \neq 0$ при $i \in I$, получается заменой в (3.13) функции $\Gamma(z, x, \omega)$ на функцию $\varphi(z)\Gamma(z, x, \omega)$, где $\varphi(z)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию периодичности:

$$\varphi(z + \omega_i) = \varphi(z) \quad \text{для любого } i \in I$$

(см. [6]).

3.3. $\mathcal{N}$ -функции, ассоциированные с целочисленными матрицами ω , и их связь с общими гипергеометрическими функциями. Из уравнений (3.11) непосредственно следует:

$$\prod_{l_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{l_j} f = \prod_{l_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{-l_j} f \quad (3.14)$$

для любого $l = (l_1, \dots, l_N) \in \mathbb{Z}^N$, удовлетворяющего условию

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} l_j = 0. \quad (3.15)$$

Множество векторов l , удовлетворяющих условию (3.15), образует подрешетку $L \subset \mathbb{Z}^N$. Если матрица ω целочисленна или, более общо, представима в виде $a\omega'$, где ω' – целочисленная матрица, а a – любая невырожденная квадратная n -матрица, то решетка L имеет максимально возможный ранг $N - n$. Не нарушая общности, будем предполагать, что ω – целочисленная матрица.

Система дифференциальных уравнений (3.12), (3.14), где $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ – произвольный фиксированный вектор, а ω – произвольная целочисленная невырожденная $(n \times N)$ -матрица, называется общей гипергеометрической системой (или $\mathcal{A}$ -системой), ассоциированной с z и ω , а ее решения в классе аналитических функций на $\mathbb{C}^N$ – общими гипергеометрическими функциями, ассоциированными с z и ω .

Заметим, что общие гипергеометрические системы, ассоциированные с парами (z, ω) и $(az, a\omega)$, где a – любая целочисленная невырожденная квадратная матрица, совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. $\mathcal{N}$ -функция $\mathcal{N}(z, x, \omega)$, ассоциированная с целочисленной $(n \times N)$ -матрицей ω , представима в виде

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{z_i + m_i} \right) P_m(x, \omega), \quad (3.16)$$

где

$$P_m(x, \omega) = \sum_{k \in M_m(\omega)} \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{x_N^{k_N}}{k_N!}; \quad (3.17)$$

суммирование ведется по множеству $M_m(\omega)$ всех $k = (k_1, \dots, k_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ таких, что

$$\sum_{j=1}^N \omega_{ij} k_j = m_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

При $M_m(\omega) = \emptyset$ полагаем $P_m(x, \omega) = 0$.

Из определения следует:

- 1) все P_m – целые функции от x . В частном случае, когда все элементы матрицы ω_i положительны, функции $P_m(x, \omega)$ являются полиномами;
- 2) для любой невырожденной целочисленной квадратной n -матрицы a имеем:

$$P_{am}(x, a\omega) = P_m(x, \omega).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Функция $P_m(x, \omega)$ удовлетворяет общей гипергеометрической системе (3.12), (3.14) при $z = -t$ и является единственным, с точностью до множителя, решением этой системы, регулярным относительно x .*

СЛЕДСТВИЕ. *$\mathcal{N}$ -функция, ассоциированная с ω , является производящей функцией для регулярных относительно x решений общих гипергеометрических систем (3.12), (3.14), в которых $z \in \mathbb{Z}^n$.*

Приведем выражение для $P_m(x, \omega)$ в форме суммы по решетке $\mathbb{Z}^{N-n}$. Пусть $L \subset \mathbb{Z}^N$ – подрешетка векторов l , удовлетворяющих условию (3.15), и $k^0 = (k_1^0, \dots, k_N^0) \in \mathbb{Z}^N$ – произвольный вектор такой, что $\sum_{j=1}^N \omega_{ij} k_j^0 = m, i = 1, \dots, n$. Тогда имеем:

$$P_m(x, \omega) = \sum'_{l \in L} \prod_{j=1}^N \frac{x_j^{k_j^0 + l_j}}{(k_j^0 + l_j)!}; \quad (3.18)$$

суммирование ведется по подмножеству векторов $l \in L$ таких, что $l_j \geq -k_j^0, j = 1, \dots, N$. Это выражение удобно представить в виде

$$P_m(x, \omega) = \sum_{l \in L} \prod_{j=1}^N \frac{x_j^{k_j^0 + l_j}}{\Gamma(k_j^0 + l_j + 1)}; \quad (3.19)$$

суммирование – по всей решетке L . Если в L фиксирован произвольный базис $l^i = (l_1^i, \dots, l_N^i), i = 1, \dots, N - n$, то выражение для P_m можно представить в виде:

$$P_m(x, \omega) = \prod_{j=1}^N x_j^{k_j^0} \sum_{m \in \mathbb{Z}^{N-n}} c(m) y_1^{m_1} \dots y_{N-n}^{m_{N-n}},$$

где

$$c(m) = \left(\prod_{j=1}^N \Gamma \left(k_j^0 + \sum_{i=1}^{N-n} m_i l_j^i + 1 \right) \right)^{-1}, \quad y_i = \prod_{j=1}^N x_j^{l_j^i}.$$

Заметим, что $c(m) = 0$, если $k_j^0 + \sum_{i=1}^{N-n} m_i l_j^i < 0$ хотя бы для одного индекса j .

3.4. Пример: $n = 3, N = 4, \omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Выражение для $\mathcal{N}$ -функции:

$$\mathcal{N}(z, x) = \sum_k \left((z_1 + k_1 + k_4)^{-1} (z_2 + k_2 + k_4)^{-1} (z_3 + k_1 + k_3)^{-1} \prod_{i=1}^4 \frac{x_i^{k_i}}{k_i!} \right).$$

Система уравнений для $\mathcal{N}$ -функции:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_4}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_s} \left(z_s + x_{i_s} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} + x_{j_s} \frac{\partial f}{\partial x_{j_s}} \right) = 0, \quad s = 1, 2, 3, \quad (3.21)$$

где (i_s, j_s) равны соответственно $(1, 4)$, $(2, 4)$ и $(1, 3)$.

Соответствующая общая гипергеометрическая система состоит из уравнений (3.20) и уравнений

$$z_s + x_{i_s} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} + x_{j_s} \frac{\partial f}{\partial x_{j_s}} = 0, \quad s = 1, 2, 3. \quad (3.22)$$

Формулы приведения для $\mathcal{N}$ -функции:

$$\mathcal{N}(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_0(z + n\omega_i, x^{(i)}, \omega^{(i)}) \frac{x_i^n}{n!}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.23)$$

где ω_i — i -й столбец матрицы ω , $x^{(i)}$ — 3-вектор с координатами $x_j, j \neq i$, $\omega^{(i)}$ — матрица, полученная из ω отбрасыванием i -го столбца.

Соответствующие решения общей гипергеометрической системы уравнений:

$$K_i(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(z + n\omega_i, x^{(i)}, \omega^{(i)}) \frac{x_i^n}{n!}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.24)$$

где $\Gamma(z, x^{(i)}, \omega^{(i)})$ выражается через гамма-функцию Эйлера и степенную функцию по формуле (3.6). Подставив в (3.24) это выражение, получим после элементарных упрощений:

$$\begin{aligned} K_1(z, x) &= p(z, x) y^{-z_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_1(n) \frac{y^{-n}}{n!}; & K_2(z, x) &= p(z, x) y^{-z_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_2(n) \frac{y^{-n}}{n!}; \\ K_3(z, x) &= p(z, x) y^{-z_1+z_3} \sum_{n=0}^{\infty} c_3(n) \frac{y^n}{n!}; & K_4(z, x) &= p(z, x) \sum_{n=0}^{\infty} c_4(n) \frac{y^{-n}}{n!}, \end{aligned}$$

где $p(z, x) = (-x_1)^{-z_1} (-x_2)^{-z_2} (-x_3)^{z_1-z_3}, y = \frac{x_3 x_4}{x_1 x_2};$

$$\begin{aligned} c_1(n) &= \Gamma(-z_1 + z_2 - n) \Gamma(z_3 + n) \Gamma(z_1 + n), \\ c_2(n) &= \Gamma(z_1 - z_2 - n) \Gamma(-z_1 + z_2 + z_3 + n) \Gamma(z_2 + n), \\ c_3(n) &= \Gamma(z_3 - n) \Gamma(-z_1 + z_2 + z_3 + n) \Gamma(z_1 - z_3 - n), \\ c_4(n) &= \Gamma(z_1 + n) \Gamma(z_2 + n) \Gamma(-z_1 + z_3 - n). \end{aligned}$$

Связь с решениями гипергеометрического уравнения Гаусса: любое решение гипергеометрической системы (3.20), (3.22) можно представить в виде

$$K(z, x) = p(z, x) F(y), \quad y = \frac{x_3 x_4}{x_1 x_2},$$

где $F(y)$ – решение гипергеометрического уравнения Гаусса

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2} + [(z_1 - z_3 + 1) - (z_1 + z_2 + 1)]\frac{dF}{dy} - z_1 z_2 F = 0.$$

Таким образом, ряды

$$y^{-z_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_1(n) \frac{y^{-n}}{n!}, \quad y^{-z_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_2(n) \frac{y^{-n}}{n!}, \quad y^{-z_1+z_3} \sum_{n=0}^{\infty} c_3(n) \frac{y^n}{n!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_4(n) \frac{y^n}{n!}$$

удовлетворяют этому уравнению. Из них первые два сходятся в окрестности $y = \infty$, а два последних – в окрестности точки $y = 0$.

Представление функции $\mathcal{N}(z, x)$ через решения гипергеометрической системы (3.20), (3.22):

$$\mathcal{N}(z, x) = \sum_{m_1, m_2, m_3=0}^{\infty} \frac{1}{(z_1 + m_1)(z_2 + m_2)(z_3 + m_3)} P_m(x),$$

где $P_m(x)$ – полиномы, заданные равенствами

$$P_m(x) = \sum \left(\prod_{i=1}^4 \frac{x_i^{k_i}}{k_i!} \right);$$

сумма берется по всем $k_i \geq 0$ таким, что $k_1 + k_4 = m_1$, $k_2 + k_4 = m_2$, $k_1 + k_3 = m_3$. Каждый полином $P_m(x)$ удовлетворяет гипергеометрической системе уравнений (3.20), (3.22) при $z = -m$.

Полиномы $P_m(x)$ можно представить в виде

$$P_m(x) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3 - m_1} F(y), \quad y = \frac{x_3 x_4}{x_1 x_2},$$

где F удовлетворяет гипергеометрическому уравнению Гаусса:

$$y(1-y)F''(y) + [(m_3 - m_1 + 1) + (m_1 + m_2 - 1)y]F'(y) - m_1 m_2 F(y) = 0.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Отметим связь полиномов P_m с представлениями группы $GL(2, \mathbb{C})$. Представим x в матричной форме: $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix}$, и для каждого $k > 1$ поставим в соответствие (2×2) -матрицам x матрицы $L^k(x) = \|L_{ij}^k(x)\|$ порядка $k+1$ с элементами

$$L_{ij}^k(x) = i! (k-i)! P_{i,j,k-i}(x), \quad i, j = 0, 1, \dots, k.$$

Определенные так матрицы L^k удовлетворяют соотношению

$$L(xy) = L(x)L(y) \quad \text{для любых матриц } x, y,$$

а потому отображение $x \mapsto L(x)$ является представлением группы $GL(2, \mathbb{C})$, см. [9].

3.5. Обобщение примера из п. 3.4 на случай $n = 2p - 1$, $N = p^2$, где p произвольно. Отождествим векторы $x \in \mathbb{C}^{p^2}$ с квадратными матрицами $x = \|x_{ij}\|$ порядка p . Соответственно элементы $((2p - 1) \times p^2)$ -матрицы ω обозначим через ω_s^{ij} , где $s = 1, \dots, 2p - 1$ и $i, j = 1, \dots, p$. Определим матрицу $\omega = \|\omega_j^{kl}\|$ равенствами:

$$\begin{aligned} \omega_s^{ij} &= 1 \quad \text{при } i = s, \quad s = 1, \dots, p; \\ \omega_{p+s}^{ij} &= 1 \quad \text{при } j = s, \quad s = 1, \dots, p-1; \end{aligned}$$

остальные элементы равны нулю.

$\mathcal{N}$ -функция, ассоциированная с x и ω , имеет вид:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_k \left(\prod_{i=1}^p \frac{1}{z_i + \sum_{j=1}^p k_{ij}} \right) \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{1}{z_{p+j} + \sum_{i=1}^p k_{ij}} \right) \prod_{i,j=1}^p \frac{x_{ij}^{k_{ij}}}{k_{ij}!}; \quad (3.25)$$

суммирование ведется по множеству p -матриц $k = \|k_{ij}\|$ с целыми неотрицательными элементами.

Выражение (3.25) можно представить так:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{\alpha, \beta} \left(\prod_{i=1}^p \frac{1}{z_i + \alpha_i} \right) \left(\prod_{j=1}^{p-1} \frac{1}{z_{p+j} + \beta_j} \right) P_{\alpha, \beta}(x), \quad (3.26)$$

где

$$P_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k \in M_{\alpha, \beta}} \left(\prod \frac{x_{ij}^{k_{ij}}}{k_{ij}!} \right). \quad (3.27)$$

Суммирование в (3.26) ведется по множеству всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\alpha_i \geq 0$, и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{p-1})$, $\beta_j \geq 0$; суммирование в (3.27) – по множеству $M_{\alpha, \beta}$ всех p -матриц $k = \|k_{ij}\|$ с целыми неотрицательными элементами такими, что

$$\sum_{j=1}^p k_{ij} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, p; \quad \sum_{i=1}^p k_{ij} = \beta_j, \quad j = 1, \dots, p-1.$$

Каждый полином $P_{\alpha, \beta}(x)$ удовлетворяет общей гипергеометрической системе уравнений, ассоциированной с матрицей ω_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_{ij} \partial x_{i'j'}} &= \frac{\partial f}{\partial x_{ij'} \partial x_{i'j}}, \quad i, j, i', j' = 1, \dots, p; \\ \sum_{j=1}^p x_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} &= \alpha_i f, \quad i = 1, \dots, p; \\ \sum_{i=1}^p x_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} &= \beta_j f, \quad j = 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Для удобства в обозначении полинома $P_{\alpha,\beta}$ заменим $(p-1)$ -вектор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{p-1})$ p -вектором $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$, где β_p определяется из уравнения

$$\sum_{i=1}^p \beta_i = \sum_{i=1}^p \alpha_i.$$

Подобно случаю $p = 2$, рассмотренному в п. 3.4, полиномы $P_{\alpha,\beta}$ естественно возникают в теории представлений группы $GL(p, \mathbb{C})$. Именно, свяжем с каждым натуральным числом $m \geq p$ матрицы

$$L^{(m)}(x) = \|\alpha! P_{\alpha,\beta}(x)\|,$$

где индексы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ пробегает разбиения числа m :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = \beta_1 + \dots + \beta_p = m;$$

$\alpha! = \prod_{i=1}^p \alpha_i!$. Матрицы $L^{(m)}$ удовлетворяют соотношениям

$$L^{(m)}(xy) = L^{(m)}(x)L^{(m)}(y) \quad \text{для любых } p\text{-матриц } x \text{ и } y,$$

а потому для каждого m отображение $x \mapsto L^{(m)}(y)$ является представлением группы $GL(p, \mathbb{C})$. Это представление изоморфно m -й симметрической степени основного p -мерного представления.

§ 4. Аналоги GG -систем и $\mathcal{N}$ -функций

4.1. GG -системы, связанные с последовательностями $(u_1, \dots, u_N)$ целых функций. Введем новые системы уравнений, получающиеся из уравнений GG -систем заменой операторов $\partial/\partial x_j$ операторами более общего вида, например, операторами q -дифференцирования (см. [12], [13]).

Пусть

$$u = (u_1, \dots, u_N)$$

– произвольная последовательность целых функций на $\mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $u_j(0) = 0$;
- 2) $u_j(k) > c_j$ для любого $k \in \mathbb{N}$, где $c_j > 0$;
- 3) существует аналитическая функция $\Gamma_j(t)$, удовлетворяющая соотношению

$$\Gamma_j(t+1) = u_j(t)\Gamma_j(t). \quad (4.1)$$

Отметим, что все решения уравнения (4.1) различаются только множителями $\varphi(t)$, удовлетворяющими условию периодичности: $\varphi(t+1) = \varphi(t)$.

Свяжем с функциями u_j следующие линейные операторы на $\mathbb{C}^N$:

$$\partial_j = x_j^{-1} u_j \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad j = 1, \dots, N.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем GG -системой, ассоциированной с последовательностью N целых функций u_j и невырожденной $(n \times N)$ -матрицей ω , следующую систему уравнений в пространстве функций $f(z, x)$ на $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$:

$$z_i f + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.2)$$

$$(\partial_j f)(z, x) = f(z + \omega_j, x), \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Заметим, что исходная GG -система получается при $u_1(t) = \dots = u_N(t) = t$. В этом случае $\Gamma_j(t)$ – гамма-функция Эйлера.

Другой важный пример: $u_j(t) = \frac{q_j^t - 1}{q_j - 1}$, $j = 1, \dots, N$. В этом случае ∂_j – операторы q -дифференцирования:

$$(\partial_j f)(t) = \frac{f(q_j t) - f(t)}{t(q_j - 1)},$$

а Γ_j – q -аналоги гамма-функции Эйлера.

В случае, когда ω – целочисленная матрица, из (4.2) следует:

$$\prod_{j=1}^N \partial_j^{l'_j} f = \prod_{j=1}^N \partial_j^{l''_j} f \quad (4.4)$$

для любых $l'_j, l''_j \geq 0$, удовлетворяющих условиям $\sum_{j=1}^N \omega_{ij} (l'_j - l''_j) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Система уравнений (4.2), (4.4) была ранее введена в [13].

Отметим два свойства операторов ∂_j .

1) Коммутационные соотношения:

$$\left[\partial_j, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = \delta_{ij} \partial_j.$$

2) Действие на мономы $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$:

$$\partial_j x^\alpha = u_j(\alpha_j) x^{\alpha - e_j}. \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует: если

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} a(k) x^k,$$

то

$$(\partial_j f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} a(k + e_j) u_j(k_j + 1) x^k.$$

4.2. Описание решений при $N = n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. При $N = n$ общее решение системы (4.2), (4.3) имеет вид:

$$\Gamma(z, x, \omega) = \varphi(z) \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{-\zeta_i}}{\Gamma_i(1 - \zeta_i)}, \quad (4.6)$$

где $\zeta = \omega^{-1}z$, $\Gamma_i(t)$ – произвольное фиксированное решение функционального уравнения (4.1), а $\varphi(z)$ удовлетворяет условию периодичности:

$$\varphi(z + \omega_j) = \varphi(z), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем от z к переменным $\zeta = \omega^{-1}z$ и положим $f_1(\zeta, x) = f(\omega\zeta, x)$. В переменных ζ уравнения (4.2), (4.3) имеют вид:

$$\zeta_i f_1 + x_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.8)$$

$$(\partial_j f_1)(\zeta, x) = f_1(\zeta + e_j, x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.9)$$

где e_j – векторы стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$. Общее решение системы (4.8) таково:

$$f_1(\zeta, x) = \psi(\zeta) \prod_{i=1}^n x_i^{-\zeta_i}. \quad (4.10)$$

Подставив это выражение в (4.9), получим, согласно (4.4) соотношения для $\psi(\zeta)$:

$$\psi(\zeta) u_i(-\zeta_i) = \psi(\zeta + e_i). \quad (4.11)$$

Системе (4.11) удовлетворяет функция $(\prod_{i=1}^n \Gamma_i(1 - \zeta_i))^{-1}$; следовательно, общее решение этой системы есть $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta) (\prod_{i=1}^n \Gamma_i(1 - \zeta_i))^{-1}$, где $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям периодичности: $\varphi(\zeta + e_i) = \varphi(\zeta)$, $i = 1, \dots, n$. Итак,

$$f_1(\zeta, x) = \varphi(\zeta) \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{-\zeta_i}}{\Gamma_i(1 - \zeta_i)}.$$

Перейдя от ζ к исходным переменным z , получаем (4.6).

4.3. Описание решений при $N > n$. Воспользуемся определениями и обозначениями из §3. Пусть $I \subset [1, N]$ – произвольное базисное подмножество, x_I – n -вектор с координатами x_i , $i \in I$, ω_I – матрица из столбцов ω_i , $i \in I$, матрицы ω .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Любое решение GG -системы (4.2), (4.3), регулярное относительно x в окрестности точки x с координатами $x_i = 0$ при $i \notin I$ и $x_i \neq 0$ при $i \in I$, имеет вид:

$$K_I(z, x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{N-n}} \left(\varphi \left(z + \sum_{j \notin I} \omega_j k_j \right) \Gamma(z, x_I, \omega_I) \prod_{j \notin I} \frac{x_j^{k_j}}{[u_j(k_j)]!} \right), \quad (4.12)$$

где функция $\Gamma(z, x_I, \omega_I)$ задается формулой (4.6), функция φ удовлетворяет условию периодичности

$$\varphi(z + \omega_i) = \varphi(z) \quad \text{при} \quad i \in I \quad (4.13)$$

и

$$[u_j(k_j)]! = u_j(1)u_j(2) \cdots u_j(k_j) = \frac{\Gamma_j(k_j + 1)}{\Gamma_j(1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для простоты $I = \{1, \dots, n\}$; формула для произвольного I получается подходящей перестановкой индексов $1, \dots, N$. Представим матрицу ω в блочной форме $\omega = (\omega_I, \omega_J)$, где ω_I, ω_J — соответственно матрицы из первых n и последних $N - n$ столбцов. Положим

$$\zeta = \omega^{-1}z, \quad \sigma = \omega_I^{-1}\omega_J, \quad f_1(\zeta, x) = f(\omega\zeta, x).$$

Перейдем в уравнениях GG -системы от переменных z к переменным $\zeta = \omega_I^{-1}z$. В этих переменных GG -система имеет вид:

$$\zeta_i f_1 + x_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_{ij} x_{n+j} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+j}} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.14)$$

$$(\partial_i f_1)(\zeta, x) = f_1(\zeta + e_i, x), \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.15)$$

$$(\partial_{n+j} f_1)(\zeta, x) = f_1(\zeta + \sigma_j, x), \quad j = 1, \dots, N - n, \quad (4.16)$$

где σ_{ij} — элементы матрицы σ , а σ_j — ее j -й столбец.

Пусть $f_1(\zeta, x)$ — решение этой системы, регулярное относительно x в окрестности точки с координатами $x_i \neq 0$ при $i \leq n$ и $x_i = 0$ при $i > n$. Представим f_1 в окрестности этой точки в виде ряда:

$$f_1(\zeta, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^{N-n}} c_k(\zeta, x_I) x_{n+1}^{k_1} \cdots x_N^{k_{N-n}}.$$

Подставив этот ряд в уравнения (4.14)–(4.16), получаем соотношения для коэффициентов ряда:

$$\left(\zeta_i + \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_{ij} k_j \right) c_k + x_i \frac{\partial c_k}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.17)$$

$$(\partial_i c_k(\zeta, x_I)) = c_k(\zeta + e_i, x_I), \quad i = 1, \dots, n; \quad (4.18)$$

$$u_j(k_j + 1) c_{k+e_j}(\zeta, x_I) = c_k(\zeta + \sigma_j, x_I), \quad j = 1, \dots, N - n. \quad (4.19)$$

Согласно п. 4.2 общее решение системы (4.17), (4.18) имеет вид:

$$c_k(\zeta, x_I) = \psi_k \left(\zeta + \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_j k_j \right) \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{-\zeta_i - \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_{ij} k_j}}{\Gamma_i(1 - \zeta_i - \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_{ij} k_j)},$$

где $\psi_k(\zeta)$ удовлетворяет условию периодичности: $\psi_k(\zeta + e_i) = \psi_k(\zeta)$, $i = 1, \dots, n$. Из уравнений (4.19) следует, что

$$u_j(k_j + 1) \psi_{k+e_j}(\hat{\zeta}) = \psi_k(\hat{\zeta}), \quad j = 1, \dots, N - n,$$

где $\hat{\zeta} = \zeta + \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_j k_j + \sigma_j$. Отсюда получаем:

$$\psi_k(\zeta) = c \left(\prod_{j=1}^{N-n} [u_j(k_j)]! \right)^{-1} \varphi \left(\zeta + \sum_{j=1}^{N-n} \sigma_j k_j \right),$$

где $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условиям периодичности. Перейдя от ζ к исходным переменным z , получаем выражение (4.12) для случая $I = \{1, \dots, n\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для каждого базисного подмножества I ряды K_I формально удовлетворяют GG -системе. Если для заданного I все они расходятся, то для этого I не существует решений GG -системы, удовлетворяющих условиям предложения 4.2.

4.4. Обобщенные GG -функции. Определение обобщенной GG -функции, приведенное в § 1, без изменений переносится на новый класс GG -систем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для каждой вещественной матрицы ω в окрестности $x = 0$ существует единственная регулярная относительно x обобщенная GG -функция, удовлетворяющая GG -системе (4.2), (4.3). Именно,

$$\Phi(z, x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \delta(z + \omega k) \prod_{j=1}^N \frac{x_j^{k_j}}{[u_j(k_j)]!}. \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ – искомая функция. По условию она представима в окрестности $x = 0$ сходящимся рядом

$$\Phi(z, x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} a_k(z) x^k,$$

где $a_k(z) \in \widetilde{\mathcal{D}}'$. Подставив это выражение в (4.2), получим:

$$(z + \omega k) a_k(z) = 0,$$

откуда $a_k(z) = c(k) \delta(z + \omega k)$. Значит,

$$\Phi(z, x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} c(k) \delta(z + \omega k) x^k.$$

Подставив это выражение в (4.3), получим:

$$u_j(k_j + 1) c(k + e_j) = c(k),$$

откуда

$$c(k) = c \left(\prod_{j=1}^N [u_j(k_j)]! \right)^{-1}.$$

Убедимся, что для любого x из окрестности точки $x = 0$ равенство (4.20) задает линейный функционал на $\widetilde{\mathcal{D}}$. Для этого заметим, что δ -функция $\delta(z + \omega k)$ является преобразованием Фурье по $t \in \mathbb{R}^n$ функции $e^{it\omega k}$. Следовательно, Φ есть преобразование Фурье функции

$$F(t, x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \left(\prod_{j=1}^N \frac{(e^{i(t\omega)_j} x_j)^{k_j}}{[u_j(k_j)]!} \right), \quad (4.21)$$

где $(t\omega)_j = t_1 \omega_{1j} + \dots + t_n \omega_{nj}$. Из условий на функции u_j следует, что ряд

$$F(t, x, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^N} \left(\prod_{j=1}^N \frac{x_j^{k_j}}{[u_j(k_j)]!} \right)$$

сходится при $|x_j| < c_j$, $j = 1, \dots, N$. Значит, для вещественной матрицы ω ряд (4.21) также сходится при $|x_j| < c_j$ и задает обобщенную функцию на $\mathcal{D}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $u_j(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$ для всех $j = 1, \dots, N$, то ряд (4.21) сходится для любой комплексной матрицы ω и при любом x . Таким образом, в этом случае предложение остается справедливым для всех комплексных матриц ω , причем обобщенная функция Φ определена для любого x . Если $u_j(k)$ ограничена хотя бы для одного j , то для комплексных матриц ω предложение, вообще говоря, неверно.

4.5. $\mathcal{N}$ -функции. Определим $\mathcal{N}$ -функцию, ассоциированную с последовательностью $u = (u_1, \dots, u_N)$ целых функций и $(n \times N)$ -матрицей ω следующим равенством:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{z_i + \sum_{j=1}^N \omega_{ij} k_j} \prod_{j=1}^N \frac{x_j^{k_j}}{[u_j(k_j)]!} \right). \quad (4.22)$$

В случае, когда хотя бы одна из последовательностей $\{u_j(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ ограничена, матрица ω в определении $\mathcal{N}$ -функции предполагается вещественной. Будем через $\Gamma_0(z, x, \omega)$ обозначать $\mathcal{N}$ -функции, ассоциированные с квадратными матрицами ω . Как и в § 3, каждому базисному подмножеству $I \subset [1, N]$ отвечает следующая формула приведения для $\mathcal{N}$ -функции:

$$\mathcal{N}(z, x, \omega) = \sum_k \Gamma_0 \left(z + \sum_{j \notin I} k_j \omega_j, x_I, \omega_I \right) \prod_{j \notin I} \frac{x_j^{k_j}}{[u_j(k_j)]!}. \quad (4.23)$$

Результаты § 3 о связи между $\mathcal{N}$ -функциями и решениями GG -систем без изменений переносятся на общий случай.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Aomoto, K. Iguchi. On quasi-hypergeometric functions // Methods Appl. Anal. 1998. V. 6. № 1. P. 55–66.
- [2] Р. Бейтмен, А. Эрдеи. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973.
- [3] И. М. Гельфанд. Общая теория гипергеометрических функций // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 1. С. 14–18.
- [4] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. GG -функции одной переменной // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 2. С. 155–158.
- [5] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. GG -функции многих переменных и их связь с общими гипергеометрическими функциями // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 5. С. 583–586.
- [6] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. GG -функции многих переменных и их связь с общими гипергеометрическими функциями // УМН. 1997. Т. 52. № 4. С. 3–48.
- [7] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Преобразование Фурье быстро растущих функций и вычисление интегралов, возникающих в теории GG -функций // Докл. РАН. 1998. Т. 360. № 5. С. 598–602.
- [8] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Гипергеометрические $\mathcal{N}$ -функции // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 1.
- [9] И. М. Гельфанд, М. И. Граев. Полиномы Люка и их связь с общими гипергеометрическими функциями и GG -функциями // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 2. С. 151–154.
- [10] I. M. Gelfand, M. I. Graev. GG -functions and their relations to general hypergeometric functions // Lett. Math. Phys. 1999. V. 50. P. 1–28.
- [11] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.
- [12] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах. Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // УМН. 1992. Т. 47. № 4. С. 3–82.

- [13] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, В. С. Ретах. Общие гамма-функции и гипергеометрические функции // УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 3–60.
- [14] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
- [15] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, А. В. Зелевинский. Голономные системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 1. С. 14–19.
- [16] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов. Гипергеометрические функции и торические многообразия // Функци. анализ и его прил. 1988. Т. 23. № 2. С. 12–26.

Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН, Москва

Поступила в редакцию
04.07.2001