Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. М. Суидан, Одномерный гравитационно взаимодействующий газ и выпуклая миноранта броуновского движения, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 73–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm416>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:54:40

УДК 517.95+519.21

**ОДНОМЕРНЫЙ ГРАВИТАЦИОННО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ ГАЗ
И ВЫПУКЛАЯ МИНОРАНТА БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ**

Т. М. Суидан

Эта статья посвящена удивительной связи между динамикой одномерного гравитационно взаимодействующего газа частиц с прилипанием и выпуклой минорантой броуновского движения на $[0, 1]$. Мы изучаем эту динамику, устанавливая три различных кластеризующих режима и временные масштабы, на которых они происходят. Распределение масс газа в критический момент времени может быть вычислено в терминах функционалов от процесса выпуклой миноранты.

Библиография: 16 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	74
2. Выпуклые миноранты случайных блужданий и броуновского движения	75
2.1. Введение	75
2.2. Самый длинный отрезок выпуклой миноранты случайного блуждания длины N	76
2.3. Выпуклая миноранта броуновского движения	77
2.4. Число отрезков, составляющих выпуклую миноранту случайного блуждания длины N	79
3. Динамика с прилипанием и случайные блуждания	82
3.1. Введение	82
3.2. Отсутствие макроскопических масс при $\tau < 0 < \gamma$	84
3.3. Агрегация масс в критический момент времени $\tau = 0$	86
3.4. Агрегат полной массы при $\tau > 0$	87
3.5. Равномерный контроль предельного процесса: последовательность моментов времени	88
3.6. Баллистическая агрегация: $\gamma = 0$	89
4. Заключительные замечания	89
5. Приложение	90
5.1. Некоторые теоремы о конечных последовательностях вещественных чисел	90
5.2. Разложение $\mathbb{R}^n$	93
5.3. $W(\partial \mathcal{M}_s^r) = 0$	94
5.4. Неравенство Марцинкевича–Зигмунда и большие отклонения	94
Список литературы	95

1. Введение

Статья состоит из двух частей. Первая часть (раздел 2) содержит анализ выпуклой миноранты броуновского движения на конечном временном интервале. В частности, мы изучаем совместные распределения длин r самых длинных сегментов выпуклой миноранты. Во второй части (раздел 3) мы используем эти распределения для анализа упрощенной астрофизической модели, предложенной Зельдовичем [16] для изучения неравномерного распределения масс во вселенной. Конкретная формулировка задачи и изучаемая здесь модель принадлежат Филиппу Мартену и Ярославу Пясецки [10]. Они поставили и затем изучили следующий вопрос: пусть дано N равномерно распределенных одинаковых частиц на единичном отрезке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ с независимыми одинаково распределенными гауссовыми начальными скоростями и с вполне неупругим законом столкновения и одномерной гравитацией; что можно сказать об их динамике? В точной постановке, гамильтониан, описывающий динамику между столкновениями, имеет вид

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \gamma \sum_{i < j} m_i m_j |x_i - x_j|,$$

где γ – гравитационная постоянная, m_i , x_i и p_i – масса, положение и импульс частицы i , а потенциалом является стандартный одномерный гравитационный потенциал. Столкновения считаются вполне неупругими, при которых сохраняются импульс и масса, но не энергия.

У описанной задачи есть связь с трехмерной задачей Зельдовича: можно рассматривать частицы и процесс их агрегации как результат равномерного распределения масс, при котором образуются галактики во вселенной (кластеры масс, разделенные бескрайними просторами). С другой стороны, одномерная гравитация отличается от трехмерной гравитации, да и одномерный закон столкновений тоже.

Вот утверждение, доказанное Мартеном и Пясецки [10]. Существует неслучайное время, t^* , не зависящее от второго момента гауссова распределения скоростей, такое, что в непрерывном пределе (при $N \rightarrow \infty$ и $m_i \rightarrow 0$ так, что $m_i N = M = \text{const}$) выполняется следующее утверждение: с вероятностью 1 для любого фиксированного момента времени $t < t^*$ макроскопические массы не образуются; с вероятностью 1 для любого фиксированного момента времени $t > t^*$ существует одна макроскопическая масса M . Грубо говоря, макроскопическая масса – это агрегат, содержащий конечную долю полной массы системы. Иначе говоря, этот критический неслучайный момент времени разделяет два различных режима агрегации масс. В разделе 3 эта задача изучается в случае, когда начальные распределения скоростей не обязательно гауссовы; мы показываем, что упомянутое выше поведение универсально в том смысле, что оно применимо к большому классу начальных распределений скоростей. В частности, единственное требуемое свойство состоит в том, чтобы начальное распределение скоростей имело моменты порядка $4 + \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Мы воспроизводим результаты Мартена и Пясецки и приводим более сильные результаты о размере масс перед критическим моментом времени. Наши методы отличаются от использованных в [10] и учитывают флуктуации случайных сумм. Наиболее интересна динамика в критический момент. Она подробно исследуется, для чего процесс агрегации реализуется в терминах случайных блужданий и связанных с ними выпуклых

минорант. Этот подход позволяет высказывать содержательные утверждения о критическом моменте времени в непрерывном пределе, изучая выпуклую миноранту броуновского движения. В этом анализе используются вычисления, включающие асимптотическое поведение функционалов от случайных перестановок.

Автор выражает признательность Я. Г. Синаю за помощь и поддержку. Автор также благодарит А. Бородину, Р. Кармона, В. И. Ч. Голди, Я. Пясецки, Дж. Питмана, М. Стили и М. Йора за полезные обсуждения.

2. Выпуклые миноранты случайных блужданий и броуновского движения

2.1. Введение. В этом разделе мы обсуждаем свойства выпуклых минорант случайных блужданий, порожденных вещественными независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими плотности. Выпуклая миноранта любой непрерывной функции f на отрезке $[0, t]$ определяется как наибольшая выпуклая функция g на $[0, t]$, удовлетворяющая неравенству $g \leq f$. Перечислим основные результаты этого раздела.

(i) Для случайного блуждания длины N вероятность того, что соответствующая выпуклая миноранта содержит отрезок длины n , равна $\frac{1}{n}$ при $n > \frac{N}{2}$. Для любого $n \leq N$ математическое ожидание числа отрезков длины n равно $\frac{1}{n}$.

(ii) При $s \in [0, 1]$ и для любого натурального r вероятность того, что длина $\mathcal{L}_W^r$ r -го по длине отрезка выпуклой миноранты броуновского движения на $[0, 1]$ меньше числа s , равна $F_r(s)$, где $F_r(s)$ задается явной формулой; совместная плотность $p_r(x_1, \dots, x_r)$ для набора длин r самых длинных отрезков может быть выражена явно через элементарные функции. Математическое ожидание числа отрезков длины l с $1 \geq t \geq l \geq s > 0$ равно $\log \frac{t}{s}$.

(iii) Для случайного блуждания длины N вероятность того, что отвечающая этому блужданию выпуклая миноранта составлена из m отрезков, равна

$$\frac{1}{m! N!} \frac{d^N}{dz^N} (-\log(1-z))^m \Big|_{z=0}.$$

Математическое ожидание числа этих отрезков равно $\sum_{i=1}^N \frac{1}{i}$. Дисперсия числа отрезков равна $\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} \right)$.

В каждом из этих утверждений под длиной отрезка понимается длина проекции на $[0, N]$ или $[0, 1]$ в зависимости от контекста. Очевидно, случайное блуждание может иметь не более одного отрезка длины $n > \frac{N}{2}$. Поэтому формула в (i) для вероятности может быть применена и к длине самого длинного отрезка выпуклой миноранты. Чарльз Голди указал нам, что утверждение (iii) было доказано другими методами Спарре Андерсеном [13].

Раздел организован следующим образом. В п. 2.2 мы доказываем утверждение (i). В п. 2.3 мы используем случайные перестановки и замечательные асимптотические результаты Шеппа–Ллойда [12] и Вершика–Шмидта [15] для доказательства утверждения (ii). В п. 2.4 мы доказываем (iii) и обнаруживаем связь с числами Стирлинга первого рода. Важно отметить, что от случайных величин порождающих рассматриваемые нами случайные блуждания мы не требуем существования первых моментов, за исключением п. 2.3, где мы требуем существования вторых моментов. Кроме того, результаты этого раздела справедливы и в случае, когда случайные величины, порождающие случайные блуждания, имеют непрерывные распределения, не обязательно допускающие плотности; однако для простоты изложения мы формулируем результаты для случайных величин в предположении, что плотности у них есть. В этом анализе мы используем некоторые теоремы, доказанные в приложении. Эти теоремы касаются свойств последовательностей вещественных чисел и их вероятностных следствий, а также полезного разложения пространства $\mathbb{R}^n$. В частности, мы используем следующее утверждение: вероятность того, что случайное блуждание длины N остается над прямой, соединяющей начало координат с конечной точкой, равно $\frac{1}{N}$; приведен также условный вариант этого утверждения. М. Стили указал нам, что Бакстер [3] и Спитцер [14] уже знали это утверждение.

2.2. Самый длинный отрезок выпуклой миноранты случайного блуждания длины N . Пусть $X_1, \dots, X_N$ – вещественные независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностями. Для $n > \frac{N}{2}$ мы вычислим сейчас вероятность L_n того, что длина самого длинного отрезка выпуклой миноранты, связанной со случайным блужданием, порожденным $X_1, \dots, X_N$, равна n . Пусть $p_n(u)$ – плотность случайной величины $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. $L_n = \frac{1}{n}$ при $n > \frac{N}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вероятность того, что отрезок длины n начинается в точке с координатой $j \leq N - n$, равна

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} du p_n(u) & \left\{ \mathbb{P} \left(\sum_{l=1}^i X_{j+l} > ui, 1 \leq i < n \mid \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n X_{j+l} = u \right) \right. \\ & \times \mathbb{P} \left(\sum_{s=0}^r X_{j-s} < u(r+1), 0 \leq r < j \right) \\ & \times \mathbb{P} \left(\sum_{t=1}^m X_{j+n+t} > um, 1 \leq m \leq N - (j+n) \right) \Big\} \\ & = \int_{\mathbb{R}} du p_n(u) \frac{1}{n} K_j(u) G_{N-(n+j)}(u), \end{aligned}$$

где $K_j(u)$ и $G_{N-(n+j)}(u)$ – второй и третий сомножители в нашем произведении вероятностей. Первый сомножитель равен $\frac{1}{n}$ в силу замечания в конце п. 2.1; доказательство этого факта приведено в приложении 5.1. Так как событие, состоящее в том, что

отрезок выпуклой миноранты, размер которого в точности равен $n > \frac{N}{2}$, начинается в точке с координатой j , и событие, состоящее в том, что такой отрезок начинается в точке с другой координатой l , несовместны, то вероятность того, что отрезок размера $n > \frac{N}{2}$ есть, равна

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N-n} \int_{\mathbb{R}} du p_n(u) \frac{1}{n} K_j(u) G_{N-(n+j)}(u) \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} du p_n(u) \sum_{j=0}^{N-n} K_j(u) G_{N-(n+j)}(u) \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} du p_n(u) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношение $\sum_{j=0}^{N-n} K_j(u) G_{N-(n+j)}(u) = 1$, доказанное в приложении 5.2.

Заметим, что при $1/2 < s < t \leq 1$ вероятность того, что имеется отрезок выпуклой миноранты длины n , где $sN \leq n \leq tN$, равна $\sum_{sN \leq n \leq tN} 1/n$, а эта сумма стремится к $\log(t/s)$ при $N \rightarrow \infty$. Из доказательства теоремы 2.2.1 вытекает также следующий факт.

Следствие 2.2.1. *Для любого $n \in \{1, \dots, N\}$ математическое ожидание числа отрезков длины n в выпуклой миноранте равно $1/n$.*

Доказательство. Если не настаивать на несовместности событий на втором шаге доказательства теоремы 2.2.1, то наше вычисление дает выражение для математического ожидания числа отрезков длины n выпуклой миноранты, связанной с рассматриваемыми случайными блужданиями.

2.3. Выпуклая миноранта броуновского движения. Начнем с напоминания замечательных результатов Шеша–Ллойда [12] и Вершика–Шмидта [15] об асимптотическом распределении длин циклов в случайных перестановках. Обозначим через $\mathcal{S}_n$ симметрическую группу n символов и введем на ней равномерное вероятностное распределение P . Для $\pi \in \mathcal{S}_n$ обозначим через $\alpha_i(\pi)$, $i = 1, 2, \dots, n$, число циклов длины i в π ; набор $(\alpha_1(\pi), \dots, \alpha_n(\pi))$ называется *цикловым типом* π . Пусть $L_r^n(\pi)$ – длина r -го по длине цикла в $\pi \in \mathcal{S}_n$ (мы считаем, что $L_r^n(\pi) = 0$, если число циклов в π меньше r). Легко видеть, что

$$P(\pi \in \mathcal{S}_n : \alpha_1(\pi) = a_1, \dots, \alpha_n(\pi) = a_n) = \prod_{j=1}^n \frac{(1/j)^{a_j}}{a_j!}.$$

Как мы увидим в следующем пункте, эта величина в точности равна вероятности того, что соответствующая выпуклая миноранта случайного блуждания длины n составлена из a_1 отрезков длины 1, a_2 отрезков длины 2, и т. д.; этот факт порождает естественную биекцию между цикловыми типами $\mathcal{S}_n$ и классами длин составляющих отрезков (без учета порядка) выпуклой миноранты случайных блужданий длины n .

Мы сейчас используем эту биекцию. На самом деле связь между этими двумя объектами имеет некоторую историю, отраженную в статье Голди [8]. В [12] доказано, что предельное распределение L_r^n/n может быть описано явно с помощью следующей функции распределения $F_r(\xi)$ на $[0, \infty)$:

$$F_r(\xi) = 1 - \sum_{p=r}^{p < \xi^{-1}} \frac{(-1)^{p-r}}{(r-1)!(p-r)!p} \int_{A_p(\xi)} \dots \int \frac{du_1 \dots du_p}{u_1 \dots u_p} \quad \text{при } 0 < \xi < \frac{1}{r}, \quad (1)$$

$$F_r(\xi) = 1 \quad \text{при } \frac{1}{r} \leq \xi < \infty,$$

где $A_p(\xi)$ – область интегрирования, заданная неравенствами $u_1, \dots, u_p \geq 1$ и $u_1 + \dots + u_p \leq \xi^{-1}$. Мы можем сказать даже больше. В [15] доказано, что предельное распределение набора $\left(\frac{L_1^n}{n}, \dots, \frac{L_r^n}{n}\right)$ существует и имеет плотность $p_r(x_1, \dots, x_r)$ на множестве $\Lambda_r = \{x \in \mathbb{R}^r : x_1 \geq \dots \geq x_r \geq 0, \sum_{i=1}^r x_i \leq 1\}$, заданную формулой

$$\frac{1}{x_1 \dots x_{r-1} \bar{x}_r} f\left(\frac{x_r}{\bar{x}_r}\right)$$

где $f(\xi) = \frac{dF_1(\xi)}{d\xi}$ и $\bar{x}_i = 1 - x_1 - \dots - x_{i-1}$.

Напомним вкратце понятия броуновского движения, меры Винера и приближения Донскера. Пусть $C[0, 1]$ – банахово пространство непрерывных функций на $[0, 1]$ со стандартной суп-нормой; обозначим через $\mathcal{C}$ борелевскую сигма-алгебру на $C[0, 1]$ и через W стандартную меру Винера на измеримом пространстве $(C[0, 1], \mathcal{C})$ [4]. Введем перенормированные процессы случайных блужданий Y_t^N на $[0, 1]$ формулой

$$Y_t^N = \frac{S_{\lfloor Nt \rfloor} + (Nt - \lfloor Nt \rfloor)X_{\lfloor Nt \rfloor + 1}}{\sqrt{NEX_1^2}},$$

где $S_i = \sum_{j=1}^i X_j$, а $X_1, \dots, X_N$ – такие же, как и выше, и имеют вторые моменты. Теория слабой сходимости мер на метрических пространствах и приближение Донскера [4] упрощают вычисление некоторых интересных величин. Если $A \in \mathcal{C}$ и $W(\partial A) = 0$, то $W_N(A) \rightarrow W(A)$ при $N \rightarrow \infty$; здесь W_N обозначает меру на $(C[0, 1], \mathcal{C})$ индуцированную перенормированными процессами случайных блужданий Y_t^N , а ∂A обозначает границу A в смысле топологии метрического пространства на $C[0, 1]$.

Пусть $s \in [0, 1]$. Обозначим через $\mathcal{M}_r^s$ множество таких функций $\omega \in C[0, 1]$, что длина r -го по длине отрезка выпуклой миноранты ω принимает значение в $(0, s]$. Заметим, что $W(\partial \mathcal{M}_r^s) = 0$; набросок доказательства этого факта приведен в приложении. Мы сейчас вычислим $W(\mathcal{M}_r^s)$, непосредственно вычисляя $\lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\mathcal{M}_r^s)$. Из приведенного выше рассуждения о случайных перестановках и выпуклых минорантах и из простых масштабных соображений следует, что

$$F_r(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{L_r^N}{N} \leq s\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\mathcal{M}_r^s) = W(\mathcal{M}_r^s),$$

где F_r определено выше. Пусть $\mathcal{L}_W^r$ – длина r -го по длине отрезка выпуклой миноранты броуновского движения на $[0, 1]$. Мы получаем требуемое утверждение:

ТЕОРЕМА 2.3.1. При $s \in [0, 1]$ имеем $P(\mathcal{L}_W^r \in [0, s]) = F_r(s)$, где $F_r(\xi) = 1$ при $\xi \geq 1/r$ и $F_r(\xi)$ при $0 < \xi < 1/r$ определяется формулой

$$F_r(\xi) = 1 - \sum_{p=r}^{p < \xi^{-1}} \frac{(-1)^{p-r}}{(r-1)!(p-r)! p} \int_{A_p(\xi)} \dots \int \frac{du_1 \dots du_p}{u_1 \dots u_p},$$

а $A_p(\xi)$ определено выше.

Этот результат очевидным образом переносится на броуновское движение на любом конечном отрезке $[0, T]$, $T < \infty$, и соответствующее распределение равно $F_r(\xi/T)$. Таким образом, мы полностью охарактеризовали вероятностное распределение длины r -го по длине отрезка выпуклой миноранты броуновского движения на конечных временных отрезках. Это распределение принимает особенно красивую форму при $r = 1$ и $s > 1/2$, а именно, $F_1(s) = 1 + \log s$. Аналогично, можно использовать приближение Донскера и результаты [15] для доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Совместное распределение $(\mathcal{L}_W^1, \dots, \mathcal{L}_W^r)$ имеет плотность $p_r(x_1, \dots, x_r)$ на Λ_r , заданную формулой

$$\frac{1}{x_1 \dots x_{r-1} \bar{x}_r} f\left(\frac{x_r}{\bar{x}_r}\right),$$

где $f(\xi) = \frac{dF_1(\xi)}{d\xi}$ и $\bar{x}_i = 1 - x_1 - \dots - x_{i-1}$.

Этот результат полностью характеризует совместное распределение длин r наиболее длинных отрезков выпуклой миноранты на $[0, 1]$. Как и выше, этот результат допускает перенесение на броуновское движение на любом конечном отрезке $[0, T]$. Интересно отметить также, что, используя приближение Донскера и результаты п. 2.4, мы можем вычислить математическое ожидание числа отрезков выпуклой миноранты броуновского движения, длины которых содержатся в $[s, t]$, где $0 < s < t \leq 1$; это математическое ожидание равно $\log(t/s)$. Для доказательства мы должны только имитировать доказательство следствия 2.4.1.

Проблема выпуклой миноранты броуновского движения рассматривалась ранее (см., например, [2], [9], [11]). Настоящая работа посвящена исследованию других интересных особенностей этой задачи, в том числе – исследованию распределения последовательных наклонов и его связям с чисто точечными процессами.

2.4. Число отрезков, составляющих выпуклую миноранту случайного блуждания длины N . Пусть $X_1, \dots, X_N$ – вещественные независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие плотности. Мы используем методы, развитые в предыдущих разделах и в приложении, чтобы доказать следующий результат Спарре Андерсена [13].

ТЕОРЕМА 2.4.1. Вероятность того, что выпуклая миноранта, отвечающая случайному блужданию, порожденному $X_1, \dots, X_N$, составлена в точности из m отрезков, равна

$$\frac{1}{m!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_m = N \\ n_1, \dots, n_m > 0}} \frac{1}{n_1 \dots n_m} = \frac{1}{m! N!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^m \right\} \Big|_{z=0}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с некоторых определений. Пусть $\mathbb{Z}_m^N = \{(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Z}^m : b_i > 0, b_1 + \dots + b_m = N\}$. Введем отношение эквивалентности δ на $\mathbb{Z}_m^N$ следующим образом: $(c_1, \dots, c_m) \delta (b_1, \dots, b_m)$ тогда и только тогда, когда $(c_1, \dots, c_m) = \tau(b_1, \dots, b_m)$ для некоторого элемента τ симметрической группы порядка m . Обозначим через $\mathcal{H}$ факторпространство $\mathbb{Z}_m^N / \delta$. Определим функцию кратности g на $\mathcal{H}$ следующим образом: если $b \in \mathcal{H}$, то $g(b) = \frac{1}{r_1! r_2! \dots r_j!}$, где $r_1, \dots, r_j$ – кратности координат набора b ; например, если $N = 20$, $m = 7$ и один из представителей $b \in \mathcal{H}$ равен $(4, 2, 2, 5, 3, 1, 3)$, то $g(b) = \frac{1}{2! 2!} = \frac{1}{4}$. Положим $P(b) = \frac{g(b)}{b_1 \dots b_m}$. Перепиывая левую часть формулы (2), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_m = N \\ n_1, \dots, n_m > 0}} \frac{1}{n_1 \dots n_m} &= \frac{1}{m!} \sum_{b \in \mathcal{H}} \frac{1}{b_1 \dots b_m} (m! g(b)) \\ &= \sum_{b \in \mathcal{H}} \frac{1}{b_1 \dots b_m} g(b) = \sum_{b \in \mathcal{H}} P(b). \end{aligned}$$

Рис. 1. Реализация случайного блуждания и ее выпуклая миноранта

Поясним роль функции $P(b)$ для $b \in \mathcal{H}$. Фиксируем $c \in \mathbb{Z}_m^N$ и определим i -е подблуждание s как случайное блуждание длины c_i , начинающееся в точке с координатой $c_1 + \dots + c_{i-1}$ и заканчивающееся в точке с координатой $c_1 + \dots + c_i$; это – в точности часть случайного блуждания длины N , порожденная $X_{1+c_1+\dots+c_{i-1}}, \dots, X_{c_1+\dots+c_i}$. Рис. 1 изображает одну из реализаций подобного случайного блуждания и его подблужданий. Пусть случайные величины $s_1^c, \dots, s_m^c$ суть наклоны прямых, соединяющих концевые точки подблужданий точек s . Вероятность того, что каждое из m подблужданий s лежит выше прямой, соединяющей концевые точки этого

подблуждания, и при этом $s_1^c < \dots < s_m^c$, равна $\frac{1}{c_1 \dots c_m} P(s_1^c < \dots < s_m^c)$; мультипликативная структура связана с независимостью всех рассматриваемых событий; эта вероятность вычислена с учетом формул из приложения 5.1. Наши ограничения совпадают с условиями, что выпуклая миноранта случайного блуждания длины N составлена из m отрезков с длинами $c_1, \dots, c_m$; см. рис. 1. Суммируя по различным (с точки зрения порядка) перестановкам координат точки c , получаем

$$\frac{g(c)}{c_1 \dots c_m},$$

где на этот раз c рассматривается как элемент $\mathcal{H}$, а не $\mathbb{Z}_m^N$. Полученное выражение для $P(c)$ равно вероятности того, что выпуклая миноранта случайного блуждания длины N содержит в точности m отрезков с длинами $c_1, \dots, c_m$, без учета порядка. Суммируя по всем $c \in \mathcal{H}$, мы получаем последнее выражение предыдущего вычисления и первое выражение в (1).

Это выражение можно непосредственно вычислить с помощью производящих функций. Пусть $\xi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z^i/i$; заметим, что $\xi(z) = -\log(1-z)$ при $|z| < 1$, и, кроме того,

$$(\xi(z))^m = \sum_{j=m}^{\infty} z^j \left\{ \sum_{\substack{i_1+\dots+i_m=j \\ i_1, \dots, i_m > 0}} \frac{1}{i_1 \dots i_m} \right\} = (-\log(1-z))^m.$$

С учетом соотношения

$$\frac{1}{N!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^m \right\} \Big|_{z=0} = \sum_{\substack{n_1+\dots+n_m=N \\ n_1, \dots, n_m > 0}} \frac{1}{n_1 \dots n_m},$$

мы получаем второе выражение в (1). Это завершает доказательство.

Любопытно отметить, что $s(N, m) = \frac{N!}{m!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^m \right\} \Big|_{z=0}$ — это числа Стирлинга первого рода, изученные в теории чисел и комбинаторике. Голди отметил этот факт в своем обзоре [8].

Эта теорема позволяет передоказать результат п. 2.2.

СЛЕДСТВИЕ 2.4.1. *Математическое ожидание числа отрезков, составляющих выпуклую миноранту, отвечающую случайному блужданию длины N , равно $\sum_{m=1}^N 1/m$. Дисперсия числа отрезков равна $\sum_{m=1}^N (1/m - 1/m^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно вычисляем:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N m \frac{1}{m!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^m \right\} \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{N!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \left(\log \frac{1}{1-z} \right) \sum_{m=1}^N \frac{1}{(m-1)!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^{m-1} \right\} \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \left(\log \frac{1}{1-z} \right) \left(\frac{1}{1-z} - \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^m \right) \right\} \Big|_{z=0} \\
&= \frac{1}{N!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \frac{1}{1-z} \log \frac{1}{1-z} \right\} \Big|_{z=0} \\
&= \frac{1}{N!} \sum_{m=1}^N (m-1)! (N-m)! \binom{N}{m} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Аналогичное, но более длинное вычисление, дает формулу для дисперсии.

Таким образом, математическое ожидание числа отрезков, составляющих выпуклую миноранту случайного блуждания длины N , растет как $\log N$.

3. Динамика с прилипанием и случайные блуждания

3.1. Введение. Модель гравитационно взаимодействующих частиц с прилипанием была вначале предложена для изучения задачи о структурах больших масштабов во вселенной [16]. Эта задача привлекла внимание в [7] и [10]; имеется и полезная связь с турбулентностью Бюргерса [1]. Изучаемая нами формулировка задачи восходит к [10] и является упрощенным одномерным вариантом модели Зельдовича; мы обсуждаем также некоторые свойства модели без гравитации.

Рассмотрим систему N точечных масс (частиц) на числовой прямой, притягивающих друг друга с силами, пропорциональными произведениям соответствующих масс и не зависящими от расстояний между частицами. Соответствующий N -частичный гамильтониан имеет вид

$$H_N = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \gamma \sum_{i < j} m_i m_j |x_i - x_j|, \quad (3)$$

где γ – гравитационная постоянная, m_i , x_i и p_i – масса, положение и импульс частицы i , а потенциал – это стандартный одномерный гравитационный потенциал. Этот гамильтониан управляет динамикой системы частиц на временных интервалах между попарными столкновениями. В нашем случае столкновения совершенно неупруги, т.е. импульс сохраняется, а энергия – нет. Для большей наглядности: при столкновении двух частиц создается большая частица, масса которой равна сумме масс исходных столкнувшихся частиц, а импульс этой новой частицы равен сумме импульсов исходных частиц. Последующая динамика управляется гамильтонианом приведенного выше вида, но с другими m_i , x_i и p_i . Это полностью задает правила, определяющие динамику.

Интересная задача, впервые изученная в [10], может быть описана следующим образом. Пусть M – полная масса введенной системы частиц. В начальный момент времени, $t = 0$, имеется N одинаковых частиц, каждая из которых имеет массу $m = M/N$; частицы равномерно распределены на отрезке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ в том смысле, что находятся на одинаковом расстоянии $a = 1/N$ друг от друга. Нам нужно следующее полезное обозначение. Рассмотрим кластер размера n , начинающийся в частице с номером $j + 1$ (при $j + n \leq N$). Обозначим через $X_{j+1}^n(t)$ центр масс этого кластера

частиц $(j+1, \dots, j+n)$ в момент времени t (перед любым столкновением какой-либо частицы этого кластера с частицей вне кластера); тогда $X_{j+1}^n(t)$ равен

$$X_{j+1}^n(t) = \left(j + \frac{n+1}{2}\right)a + \frac{t}{n} \sum_{s=1}^n v_{j+s} + \gamma m(N-n-2j)\frac{t^2}{2}, \quad (4)$$

где v_i — начальная скорость частицы i . В [5] отмечено (см. также [7]), что необходимые и достаточные условия образования агрегата массы mn за время t из кластера $(j+1, \dots, j+n)$, подчиненного ограничению, что все частицы, не принадлежащие этому кластеру, остаются на конечном расстоянии от полученного агрегата по крайней мере вплоть до момента t включительно, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X_{j+1}^r(t) &> X_{j+r+1}^{n-r}(t), \quad r = 1, 2, \dots, n-1, \\ X_{j-s+1}^s(t) &< X_{j+1}^n(t), \quad s = 1, 2, \dots, j, \\ X_{j+1}^n(t) &< X_{j+n+1}^s(t), \quad s = 1, 2, \dots, N-(n+j). \end{aligned}$$

Последнее условие содержательно только при $j < N-n$. Первое условие утверждает, что для любого разбиения набора $(j+1, \dots, j+n)$ на левую и правую часть центры масс этих двух кусков должны пересечься к моменту времени t . Второе и третье условия просто означают тот факт, что кластер $(j+1, \dots, j+n)$ не взаимодействует с частицами, ему не принадлежащими.

Обозначим через $\Theta(x)$ функцию Хевисайда, принимающую значение 1 при $x > 0$ и 0 в противном случае. Непосредственная подстановка соотношения (4) в вышеприведенные условия позволяет нам переписать их в виде

$$\prod_{r=1}^{n-1} \Theta\left(\sum_{l=1}^r v_{j+l} - \frac{r}{n} \sum_{l=1}^n v_{j+l} + \frac{m\tau r(n-r)}{2}\right) = 1, \quad (5)$$

$$\prod_{r=0}^{j-1} \Theta\left(\frac{j-r}{(j-r)+n} \sum_{s=1}^{(j-r)+n} v_{r+s} - \sum_{s=1}^{j-r} v_{r+s} - \frac{mn(j-r)\tau}{2}\right) = 1, \quad (6)$$

$$\prod_{s=1}^{N-(j+n)} \Theta\left(\frac{n}{n+s} \sum_{i=1}^{n+s} v_{j+i} - \sum_{i=1}^n v_{j+i} - \frac{mns\tau}{2}\right) = 1, \quad (7)$$

где $\tau = \gamma t - 1/(\rho t)$ и $\rho = m/a$.

Пусть $v_1, \dots, v_N$ — вещественные независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие плотности, которые симметричны относительно 0; мы предположим также, что случайные величины имеют моменты порядка $4 + \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Мы изучаем следующие вопросы: (i) какие вероятностные утверждения могут быть высказаны об агрегационном процессе для динамики с гравитацией? (ii) какие утверждения такого типа могут быть высказаны об агрегационном процессе для динамики без гравитации? В [5] задача (i) изучена в случае, когда начальное распределение скоростей является гауссовым. Авторы обнаружили критический момент времени t^* и показали, что до момента t^* агрегатов макроскопической массы нет,

а после этого момента макроскопическая масса есть. Используемые в [5] методы включают явные вычисления с гауссовыми распределениями и теорему Спарре Андерсена. В [5] также высказана гипотеза, что до наступления критического момента могут образовываться только кластеры размера $\sqrt{N}$.

В задаче (i) мы определяем такой же критический момент времени t^* , до которого вероятность наличия массивного агрегата равна 0, а после -1 ; мы назовем t^* *моментом скачка* и отметим, что t^* зависит только от γ и ρ (в частности, $t^* = 1/\sqrt{\gamma\rho}$, что соответствует $\tau = 0$). Мы полностью описываем агрегационный процесс в критический момент времени и показываем, что его статистика существенно отличается от упомянутого ранее режима. Эти утверждения должны пониматься в непрерывном пределе, где $N \rightarrow \infty$ так, что $M = mN$, а величина $\rho = m/a$ остается постоянной. В случае конечного числа частиц мы приводим явную формулу для вероятности наличия r масс в момент t^* ; отсюда следует очень простая формула для математического ожидания числа масс в момент t^* . С физической точки зрения важно отметить, что t^* — это в точности момент времени, к которому система с любыми начальными скоростями в момент времени 0 коллапсирует, образуя единственный массивный агрегат; тот факт, что это происходит при больших N , показывает, что динамика, хотя и случайная, на самом деле управляется гравитационными влияниями. Для лучшего понимания предельного процесса мы найдем последовательность моментов времени τ_N , для которых вышеприведенные вероятности допускают равномерный контроль. Мы также найдем частичное подтверждение упомянутой выше гипотезы Мартена–Пясецки [10]. В задаче (ii) мы вычисляем вероятность наличия r масс при данных N начальных массах в пределе при $t \rightarrow \infty$; при этом в баллистическом случае ($\gamma = 0$) динамические свойства существенно отличаются от гравитационного случая.

3.2. Отсутствие макроскопических масс при $\tau < 0 < \gamma$. Зафиксируем $\gamma > 0$, $\varepsilon > 0$ и $\tau < 0$. Вероятность того, что агрегат, масса которого больше εM , создается за время τ , стремится к 0 в непрерывном пределе; однако на самом деле утверждение теоремы несколько сильнее. Пусть δ определено, как во введении. Выберем любое $\nu \in (1 - \delta/(2(6 + \delta)), 1]$ и определим $A_\delta^N(\tau)$ как множество начальных скоростей, для которых агрегат, масса которого не меньше $\varepsilon m N^{1/(2-\nu)}$, создается за время τ ; число N называется *начальным числом частиц* в системе.

ТЕОРЕМА 3.2.1. $P(A_\delta^N(\tau)) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Перед началом вычислений заметим, что часто будут появляться бессмысленные выражения вроде $n/2$ (где n не обязательно четно); они помогают избежать педантичных выражений вроде “наибольшего целого, не превосходящего . . .”; бывает, что эти величины существенны, но в этом разделе они не играют роли и будут игнорироваться. Мы сначала оценим родственную величину, которую мы обозначим через $p_N^n(\tau)$ и определим формулой

$$P\left(\prod_{r=1}^{n-1} \Theta(X_1^r(t) - X_{r+1}^{n-r}(t)) = 1\right) = P\left(\prod_{r=1}^{n-1} \Theta\left(\sum_{l=1}^r v_l - \frac{r}{n} \sum_{l=1}^n v_l + \frac{m\tau r(n-r)}{2}\right) = 1\right);$$

очевидно, что $p_N^n(\tau)$ ограничена величиной

$$\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{n/2} v_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n v_l + \frac{m\tau n^2}{8} > 0\right).$$

При $n > (\varepsilon N)^{1/(2-\nu)}$ мы можем продолжить оценку сверху с помощью величины

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{n/2} v_l - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n v_l + \frac{\varepsilon M \tau n^\nu}{8} > 0\right) &\leq 2\mathbb{P}\left(\left|\sum_{l=1}^n v_l\right| > \left(-\frac{\varepsilon M \tau}{16}\right)n^\nu\right) \\ &\leq \mathcal{C}\left(-\frac{16}{\varepsilon M \tau}\right)^{4+\delta} \frac{1}{n^{(4+\delta)(\nu-1/2)}} \\ &\leq \mathcal{D}\left(-\frac{16}{\varepsilon M \tau}\right)^{4+\delta} \frac{1}{N^{\frac{(4+\delta)(\nu-1/2)}{2-\nu}}}. \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}$ – постоянная, зависящая только от моментов случайных величин v_i , а $\mathcal{D}$ – постоянная, включающая некоторый множитель с ε . Последняя оценка является комбинацией неравенства Чебышева, неравенства Марцинкевича–Зигмунда и небольшого рассуждения; неравенство Марцинкевича–Зигмунда и упомянутое рассуждение приведены в приложении. Эти неравенства нужны в доказательстве соотношения

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n v_i\right|^{4+\delta} = O(n^{2+\delta/2}). \quad (8)$$

Вероятность того, что агрегат, масса которого $mn > m(\varepsilon N)^{1/(2-\nu)}$, образуется к моменту времени τ , может быть очевидным образом оценена величиной

$$\sum_{j=1}^{N-n} p_N^n(\tau) = (N-n)p_N^n(\tau).$$

Эта оценка отражает тот факт, что n -кластер может начинаться с любой из первых $N-n$ частиц. Суммируя по $n > (\varepsilon N)^{1/(2-\nu)}$, получаем:

$$\sum_{n > (\varepsilon N)^{1/(2-\nu)}} (N-n)p_N^n(\tau) \leq N^2 p_N^{(\varepsilon N)^{1/(2-\nu)}}(\tau) \leq \frac{\mathcal{D}(\varepsilon)}{N^{\frac{(\nu-1/2)(4+\delta)}{2-\nu}-2}} \left(-\frac{16}{\varepsilon M \tau}\right)^{4+\delta}.$$

Это последнее выражение стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, вероятность иметь массивный агрегат, являющийся конечной долей полной массы M , к моменту времени $\tau < 0$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$; это утверждение дает также некоторую информацию о несуществовании агрегатов меньших масс. Заметим, что мы не использовали существования плотностей у величин $v_1, \dots, v_N$.

3.3. Агрегация масс в критический момент времени $\tau = 0$. Пусть N – начальное число частиц. Пусть V_r^N – множество таких начальных скоростей $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$, что к моменту $\tau = 0$ имеется в точности r масс. Определим W_n^N как множество таких начальных скоростей $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$, что к моменту времени $\tau = 0$ имеется агрегат с массой, равной в точности Mn/N .

$$\text{ТЕОРЕМА 3.3.1. } P(V_r^N) = \frac{1}{r! N!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^r \right\} \Big|_{z=0}.$$

$$\text{ТЕОРЕМА 3.3.2. } P(W_n^N) = \frac{1}{n} \text{ при } n > \frac{N}{2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. Математическое ожидание числа масс к моменту времени t^* равно $\sum_{j=1}^N \frac{1}{j}$.

Заметим сначала, что случай $\tau = 0$ имеет смысл только при $\gamma > 0$. Мы увидим, что ключ к пониманию статистики агрегационного процесса лежит в понимании статистических свойств выпуклой миноранты процесса симметрического случайного блуждания, порожденного вещественными независимыми одинаково распределенными случайными величинами $v_1, \dots, v_N$. В частности, при $\tau = 0$ соотношения (5), (6) и (7) дают точное соотношение между скоростями $v_1, \dots, v_N$ и выпуклой минорантой функции, начинающейся в нуле и имеющей приращения $v_1, \dots, v_N$ (для блуждания, порожденного $v_1, \dots, v_N$). Мы можем извлечь отсюда следующую информацию: (i) число отрезков в выпуклой миноранте в точности равно числу агрегатов к моменту времени $\tau = 0$ при данных начальных скоростях $v_1, \dots, v_N$; (ii) массы этих агрегатов – это просто длины соответствующих отрезков, умноженные на массу m начальных точечных масс; (iii) порядок следования этих масс совпадает с порядком следования длин отрезков.

Это замечательное соответствие позволяет вычислить статистические свойства агрегации масс в момент времени $\tau = 0$, вычисляя статистические свойства выпуклой миноранты процесса случайного блуждания, порожденного симметричными независимыми одинаково распределенными случайными величинами $v_1, \dots, v_N$. Следующие статистические свойства этого объекта были изучены в разделе 2: (i) при $N/2 < n \leq N$ вероятность получить отрезок длины n в выпуклой миноранте равна $1/n$, поэтому, если $1/2 < s < t \leq 1$, то вероятность получить агрегат массы $\mathcal{M}$ с $sM \leq \mathcal{M} \leq tM$ равна сумме $\sum_{sN \leq n \leq tN} 1/n$, которая стремится к $\log(t/s)$ при $N \rightarrow \infty$ (это совершенно другая величина, чем в случае $\tau < 0$); (ii) при данных N начальных точечных массах вероятность того, что при $\tau = 0$ имеется в точности r агрегатов, равна

$$\frac{1}{r!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_r = N \\ n_1, \dots, n_r > 0}} \frac{1}{n_1 \cdots n_r}. \quad (9)$$

Используя метод порождающих функций, нетрудно показать, что это выражение равно

$$\frac{1}{r! N!} \frac{d^N}{dz^N} \left\{ \left(\log \frac{1}{1-z} \right)^r \right\} \Big|_{z=0}. \quad (10)$$

Заметим, что в этих утверждениях мы не используем условия существования моментов порядка $4 + \delta$.

Далее, мы можем изучить агрегационный процесс в непрерывном пределе в критический момент времени $\tau = 0$. В соответствии со сделанными выше замечаниями, эта задача в точности совпадает со статистической задачей о длинах отрезков в выпуклой миноранте броуновского движения на $[0, 1]$; мы подробно изучили эту задачу в разделе 2. В частности, вероятностное распределение наибольшей массы в точности соответствует вероятностному распределению длины наибольшего отрезка выпуклой миноранты броуновского движения на $[0, 1]$; вероятностное распределение второй по величине массы в точности соответствует вероятностному распределению второго по длине отрезка выпуклой миноранты броуновского движения на $[0, 1]$, и т.д. Это соответствие позволяет установить следующий факт о системе в непрерывном пределе.

ТЕОРЕМА 3.3.3. *Функция распределения для r -й по величине массы равна $F_r(\xi/M)$, где $F_r(\xi)$ определена в разделе 2.*

ТЕОРЕМА 3.3.4. *Плотность совместного распределения r наибольших масс равна $p_r(x_1/M, \dots, x_r/M)$ на Λ_r , где $F_r(\xi)$ и $p_r(x_1, \dots, x_r)$ определены в разделе 2.*

3.4. Агрегат полной массы при $\tau > 0$. Зафиксируем $\rho \in (1 - \delta/(2(4 + \delta)), 1]$, $\tau, \varepsilon > 0$. Пусть дано N начальных частиц, и пусть L_ρ^N — множество таких начальных скоростей $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$, что в момент времени τ имеется агрегат массы Mn/N при некотором n , удовлетворяющем условию $\varepsilon N^\rho \leq n \leq (1 - \varepsilon)N$. Вот основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 3.4.1. $P(L_\rho^N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Вероятность того, что есть агрегат, составленный в точности из n начальных частиц, ограничена величиной

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N-n} P \left(\prod_{r=0}^{j-1} \Theta(X_{j+1}^n(t) - X_{r+1}^{j-r}(t)) = 1 \right) \\ & \quad \times P \left(\prod_{r=1}^{n-1} \Theta(X_{j+1}^r(t) - X_{j+r+1}^{n-r}(t)) = 1 \right) \\ & \quad \times P \left(\prod_{s=1}^{N-(j+n)} \Theta(X_{j+n+1}^s(t) - X_{j+1}^n(t)) = 1 \right) \\ & \leq \sum_{j=0}^{N-n} P \left(\prod_{r=0}^{j-1} \Theta(X_{j+1}^n(t) - X_{r+1}^{j-r}(t)) = 1 \right) \\ & \quad \times P \left(\prod_{s=1}^{N-(j+n)} \Theta(X_{j+n+1}^s(t) - X_{j+1}^n(t)) = 1 \right) \end{aligned}$$

$$\leq \left\{ \sum_{j=0}^{(N-n)/2} + \sum_{j=(N-n)/2}^{N-n} \right\} \\ \times \mathbb{P} \left(\prod_{r=0}^{j-1} \Theta \left(\frac{j-r}{(j-r)+n} \sum_{s=1}^{(j-r)+n} v_{r+s} - \sum_{s=1}^{j-r} v_{r+s} - \frac{mn(j-r)\tau}{2} \right) = 1 \right) \\ \times \mathbb{P} \left(\prod_{s=1}^{N-(j+n)} \Theta \left(\frac{n}{n+s} \sum_{i=1}^{n+s} v_{j+i} - \sum_{i=1}^n v_{j+i} - \frac{mns\tau}{2} \right) = 1 \right).$$

Положим $\Sigma_1 = \sum_{j=0}^{(N-n)/2}$ и $\Sigma_2 = \sum_{j=(N-n)/2}^{N-n}$ в предыдущей формуле. Мы можем следующим образом оценить эти величины:

$$\Sigma_1 \leq (N-n) \mathbb{P} \left(\Theta \left(\frac{1}{n + \frac{N-n}{2}} \sum_{i=1}^{n + \frac{N-n}{2}} v_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i - \frac{m\tau}{2} \frac{N-n}{2} \right) = 1 \right), \quad (11)$$

$$\Sigma_2 \leq (N-n) \mathbb{P} \left(\Theta \left(\frac{1}{n + \frac{N-n}{2}} \sum_{s=1}^{n + \frac{N-n}{2}} v_s - \frac{2}{N-n} \sum_{s=1}^{\frac{N-n}{2}} v_s - \frac{mn\tau}{2} \right) = 1 \right). \quad (12)$$

Оценки для (11) и (12) похожи, и мы ограничимся кратким обсуждением (11). Мы оцениваем первую вероятность в Σ_1 единицей, а вторую – сознавая, что $N - (j+n) > (N-n)/2$ в области изменения j в сумме Σ_1 и что $v_1, \dots, v_N$ – независимые одинаково распределенные случайные величины; этот факт позволяет подобрать наиболее сильную оценку, общую для всех членов в Σ_1 , и мажорировать Σ_1 произведением этой оценки на $N-n$. Оценка в (12) проводится аналогично и с той лишь разницей, что единицей оценивается вторая вероятность. Суммируя по всем таким n , что $\varepsilon N^\rho \leq n \leq (1-\varepsilon)N$, где $\rho \in (1-\delta/(2(4+\delta)), 1]$, мы получаем оценку

$$\sum_{\varepsilon N^\rho \leq n \leq (1-\varepsilon)N} \left\{ \Sigma_1 + \Sigma_2 \right\} \leq 4N^2 \mathbb{P} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \geq \frac{M\tau}{4N^{1-\rho}} \right). \quad (13)$$

Используя оценки, аналогичные полученным в разделе 2, и наличие моментов порядка $4+\delta$, видим, что последнее выражение стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. В силу результатов п. 3.3 отсюда следует, что для любого $\tau > 0$ вероятность наличия агрегата полной массы стремится к 1 в непрерывном пределе. Важно отметить, что остаточная пыль частиц должна быть пренебрежимой в непрерывном пределе. Заметим также, что в этом рассуждении мы не нуждаемся в предположении, что распределения скоростей имеют плотности.

3.5. Равномерный контроль предельного процесса: последовательность моментов времени. Зафиксируем $\varepsilon, \xi > 0$. Мы сейчас построим последовательность положительных чисел τ_N , стремящуюся к 0 и такую, что вероятность иметь агрегат, составленный из $n > (1-\varepsilon)N$ частиц из N начальных частиц, больше величины $1-\xi$; это есть вероятность получить агрегат массы $\mathcal{M} > (1-\varepsilon)M$ к моменту времени τ_N (где N – начальное число частиц), большая, чем $1-\xi$.

Рассмотрим последовательность $\tau_N = \mathcal{D}N^{-\frac{1}{2}(\rho - (1 - \frac{\delta}{2(4+\delta)}))}$; при подходящем выборе $\mathcal{D}$ рассматриваемая вероятность ограничена снизу числом $1 - \xi$ равномерно по N . Чтобы убедиться в этом, мы должны только заменить τ на τ_N в выражении (13). Оценим эту новую величину с помощью неравенства Чебышева и упомянутых выше фактов, связанных с моментами случайных величин $|\sum_{i=1}^n v_i|$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} 4N^2 \mathbf{P}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i \geq \frac{M\tau_N}{4N^{1-\rho}}\right) &\leq \frac{4N^2 \mathcal{R} N^{2+\delta/2}}{(\mathcal{D}N)^{\frac{1}{2}(\rho+1)(4+\delta)}} \\ &= \frac{4\mathcal{R}}{\mathcal{D}^{\frac{1}{2}(4+\delta)(\rho+1)} N^{\frac{1}{2}(4+\delta)(\rho+1) - (4+\delta/2)}}, \end{aligned}$$

где $\infty > \mathcal{R} > \limsup \mathbf{E}|\sum_{i=1}^n v_i|^{4+\delta}/n^{2+\delta/2}$. Таким образом, беря $\mathcal{D}$ достаточно большим, мы можем оценить эту вероятность равномерно по N со сколь угодно точным контролем; в частности, мы можем оценить эту вероятность величиной $\xi/2$, что показывает, что наш выбор τ_N удовлетворителен.

3.6. Баллистическая агрегация: $\gamma = 0$. В этом пункте мы рассмотрим баллистический случай, в котором $\gamma = 0$; это — случай отсутствия гравитации. В этом режиме $\tau = -1/(\rho t)$ при $t > 0$, и N обозначает начальное число частиц. Пусть Ω_N^r — множество таких начальных скоростей $v_1, \dots, v_N$, что конечное число агрегатов (после завершения агрегационного процесса) равно r . Из условий (5), (6) и (7) следует, что

$$\mathbf{P}(\Omega_N^r) = \frac{1}{r!} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_r = N \\ n_1, \dots, n_r > 0}} \frac{1}{n_1 \dots n_r}.$$

Эту формулу можно получить теми же методами, что и в п. 3.3; соответствие с выпуклой минорантой отличается только в том, что выпуклая миноранта дает поведение на больших временах, в отличие от поведения вблизи $\tau = 0$. Это показывает, что динамические свойства баллистического случая существенно отличаются от динамических свойств гравитационного случая. Как и в разделе 2, заметим, что математическое ожидание числа масс равно $\sum_{j=1}^N 1/j$; при $N \rightarrow \infty$ число масс растет как $\log N$.

4. Заключительные замечания

В разделе 2 мы доказали некоторые утверждения о выпуклых минорантах случайных блужданий, порожденных независимыми одинаково распределенными случайными величинами с непрерывными распределениями. Большая часть этих фактов связана с применением свойств циклических сдвигов, описанных в разделе 2. Единственным дополнительным инструментом является разложение $\mathbb{R}^n$ на части, которые тонко связаны с путями случайного блуждания. Мы полностью охарактеризовали длину r -го по длине отрезка выпуклой миноранты броуновского движения на конечных временных интервалах, а также совместные плотности набора r наиболее длинных отрезков; асимптотические теоремы теории случайных перестановок играют здесь решающую роль.

В разделе 3 рассмотрены некоторые вопросы об одномерном гравитационно взаимодействующем газе со случайными начальными скоростями. Мы видели, что в гравитационном случае имеется такой неслучайный момент времени t^* , что после этого момента вероятность получить массивный агрегат полной массы стремится к 1 в непрерывном пределе; до этого момента вероятность получить агрегат, масса которого является конечной долей полной массы системы, стремится к 0 в непрерывном пределе. Мы называем этот момент времени t^* моментом скачка и характеризуем агрегационный процесс в этот момент, используя результаты раздела 2. Мы также нашли последовательность моментов времени, больших, чем t^* и стремящихся к нему, таких, что контроль указанных выше вероятностей равномерен при увеличении числа частиц. Этот анализ приводит к выводу, что в гравитационном случае динамика управляется гравитацией и по существу неслучайна. Нами рассмотрен также баллистический случай, в котором $\gamma = 0$. Мы исследовали долгосрочное поведение для системы N частиц со случайными начальными скоростями и заключили, что это поведение значительно отличается от поведения в гравитационном случае.

5. Приложение

5.1. Некоторые теоремы о конечных последовательностях вещественных чисел. Начнем с определения некоторых понятий. Пусть $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — оператор циклического сдвига, $T(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, x_1)$. Заметим, что T — биекция, и введем обозначение $T^m = T \circ \dots \circ T$ (m сомножителей). При $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ определим блуждание $R_t(a)$, порожденное a , следующим образом: $R_0(a) = 0$, $R_t(a) = \sum_{i=1}^t a_i$ при $t \in \{1, \dots, n\}$ и, наконец, если $t \in (0, n)$, то $R_t(a) = R_{[t]}(a) + (t - [t])a_{[t]+1}$, где $[t]$ означает наибольшее целое число, меньшее t . Определим m -й циклический сдвиг блуждания $R_t(a)$, порожденного $a \in \mathbb{R}^n$, как блуждание $R_t(T^m(a))$. Пусть μ — положительная T -инвариантная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, и при $r > 0$ определим положительную борелевскую меру μ^r формулой $\mu^r(C) = \mu(C \cap B_r)$, где B_r — открытый шар радиуса r с центром в начале координат и C — произвольное борелевское множество; заметим, что μ^r тоже T -инвариантна. Положим $A = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : R_t(a) > (t/n)R_n(a), \forall t \in (0, n)\}$. Пусть $\mathcal{B}_\alpha = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i = \alpha\}$ при $\alpha \in \mathbb{R}$. Сформулируем две леммы, доказательство которых отложим до конца этого пункта, и затем приведем некоторые теоремы и их вероятностные следствия.

ЛЕММА 5.1.1. Если $0 \leq j \neq l < n$, то $T^j(A) \cap T^l(A) = \emptyset$.

ЛЕММА 5.1.2. $\mu\left\{\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} T^i(A)\right)^c\right\} = 0$.

ТЕОРЕМА 5.1.1. При $\infty > r > 0$ мера μ^r конечна. Кроме того,

$$\frac{\mu^r(A)}{\mu^r(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{n}, \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu^r(A)}{\mu^r(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{n}.$$

В частности, если μ — вероятностная мера, то $\mu(A) = 1/n$.

Доказательство. Это – простое следствие лемм 5.5.1 и 5.1.2 и того факта, что мера μ T -инвариантна.

Следствие 5.1.1. Если $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные вещественные случайные величины с плотностями, то

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^i X_j > \frac{i}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\right) = \frac{1}{n},$$

где $\mathbf{P}$ – совместная вероятностная мера, порожденная $X_1, \dots, X_n$.

Заметим, что мы не предполагаем существования никаких моментов.

Доказательство. Достаточно проверить, что мера-произведение на $\mathbb{R}^n$, порожденная плотностями величин $X_1, \dots, X_n$, удовлетворяет приведенным выше требованиям к μ .

Пусть $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – плотность меры μ относительно лебеговой меры. Определим существенный носитель $\text{ess}(\mu)$ меры μ следующим образом. Пусть Ω – семейство таких открытых множеств $\omega \subset \mathbb{R}^n$, что $g(x) = 0$ для μ -почти всех $x \in \omega$. Пусть $\omega^* = \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega$; тогда $\text{ess}(\mu) = (\omega^*)^c$. Пусть $\mathcal{A}_\mu$ – множество всех таких $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\text{ess}(\mu) \cap \mathcal{B}_\alpha \cap (\partial(\text{ess}(\mu)))^c \neq \emptyset$. Для $\alpha \notin \mathcal{A}_\mu$ положим $\mu(A \mid \mathcal{B}_\alpha) = 0$, и при $\alpha \in \mathcal{A}_\mu$ введем величину $\mu(A \mid \mathcal{B}_\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon(A \mid \mathcal{B}_\alpha)$, где

$$\mu_\varepsilon(A \mid \mathcal{B}_\alpha) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu^r(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon)}{\mu^r(\mathcal{B}_\alpha^\varepsilon)}, \quad \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon = \left\{ a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \left| \alpha - \sum_{i=1}^n a_i \right| < \varepsilon \right\}.$$

Как мы увидим в доказательстве следующей теоремы, эти пределы существуют почти всюду.

Теорема 5.1.2. Если $\alpha \in \mathcal{A}_\mu$, то $\mu(A \mid \mathcal{B}_\alpha) = 1/n$.

Доказательство. Начнем со следующих наблюдений:

- (i) $T\mathcal{B}_\alpha^\varepsilon = \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon$;
 - (ii) поскольку $x \in B_r$ тогда и только тогда, когда $Tx \in B_r$, и мера μ^r является T -инвариантной, то $\mu^r(T\mathcal{B}_\alpha^\varepsilon) = \mu^r(\mathcal{B}_\alpha^\varepsilon)$;
 - (iii) если $0 \leq j \neq l < n$, то, по лемме 5.1.1, из соотношений $T^j(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon) = T^j(A) \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon$ и $T^l(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon) = T^l(A) \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon$ следует, что $T^j(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon) \cap T^l(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon) = \emptyset$;
 - (iv) так как мера μ^r T -инвариантна, то $\mu^r(T^j(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon)) = \mu^r(T^l(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon))$;
 - (v) $\mu^r(\mathcal{B}_\alpha^\varepsilon \cap (\bigcup_{i=0}^{n-1} T^i(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon))^c) \leq \mu^r((\bigcup_{i=0}^{n-1} T^i(A))^c) = 0$ по лемме 5.1.2.
- Отсюда следует, что при $\alpha \in \mathcal{A}_\mu, \varepsilon > 0$ и достаточно большом r имеем $\mu^r(A \cap \mathcal{B}_\alpha^\varepsilon) = \frac{1}{n} \mu^r(\mathcal{B}_\alpha^\varepsilon)$. Таким образом, вышеприведенные пределы существуют, что доказывает требуемый результат.

Следствие 5.1.2. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – вещественные независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие плотности. Пусть $\mathbf{P}$ – совместное вероятностное распределение, порожденное $X_1, \dots, X_n$, $\mathbf{P}'$ – мера на $\mathbb{R}^n$, индуцированная $\mathbf{P}$. Для любого $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbf{P}'}$ имеем

$$\mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^i X_j > \frac{i}{n} \sum_{j=1}^n X_j, \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \mid \sum_{j=1}^n X_j = \alpha\right) = \frac{1}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно только проверить, что индуцированная вероятностная мера $\mathbf{P}'$ на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям теоремы 5.1.2. Эта проверка может быть произведена непосредственно.

Теорему 5.1.2 следует рассматривать как утверждение об условных мерах для A , определенных семейством гиперплоскостей $\mathcal{B}_\alpha$.

При $a \in \mathbb{R}^n$ функция $R_t(a)$ непрерывна на $[0, n]$. Выпуклая миноранта для $R_t(a)$ определяется, как во введении, и обозначается $\text{co}(a)$. Теперь мы можем доказать леммы 5.1.1 и 5.1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1.1. Положим

$$E = \left\{ a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \exists i \in \{1, \dots, n-1\}, \right. \\ \left. \exists m \in \{0, 1, \dots, n-1\}, R_i(T^m a) = \frac{i}{n} R_n(a) \right\}.$$

Так как E – конечное объединение подмногообразий коразмерности один в $\mathbb{R}^n$, то лебегова мера E равна нулю, откуда следует, что $\mu(E) = 0$. Полагая $F = E^c$, мы сейчас покажем, что $F = \bigcup_{j=0}^{n-1} T^j A$ и что для любого $a \in F$ есть только один индекс j , $0 \leq j < n$, зависящий от a , для которого $T^j a \in A$. Этот факт, вместе с биективностью T , завершит доказательство леммы. При $a \in A$ нижеследующее вычисление показывает, что $T^m a \notin A$ при $m = 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} \frac{R_m(a)}{m} > \frac{R_n(a)}{n} &\Leftrightarrow \frac{R_m(a)}{n-m} > \frac{m}{n(n-m)} R_n(a) \\ &\Leftrightarrow \frac{R_m(a)}{n-m} > \left(\frac{1}{n-m} - \frac{1}{n} \right) R_n(a) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n-m} (R_n(a) - R_m(a)) < \frac{R_n(a)}{n} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n-m} R_{n-m}(T^m a) < \frac{R_n(a)}{n}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $a \in F$ имеется по крайней мере один индекс $j \in \{0, \dots, n-1\}$, удовлетворяющий условию $T^j a \in A$. Мы должны лишь указать алгоритм нахождения такого индекса. Положим $s(a) = R_n(a)/n$ и рассмотрим параметризованное семейство прямых в $\mathbb{R}^2$, заданное формулой $y_c^a(x) = s(a)x + c$. Пусть $\mathcal{C}_a$ – множество таких $c \in \mathbb{R}$, что $y_c^a(x)$ лежит ниже $\text{co}(a)$ при $x \in [0, n]$, и пусть $c^* = \sup_{c \in \mathcal{C}_a} c$. Так как $a \in F$, то прямая $y_{c^*}^a(x)$ лежит под $\text{co}(a)$, за исключением одной точки $t_a \in [0, n]$, где она пересекает $\text{co}(a)$, и $t_a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, поскольку $R_t(a)$ – кусочно линейная функция с целочисленными “угловыми” точками. В такой точке с помощью простых геометрических рассуждений, которые могут быть легко формализованы, можно убедиться, что $T^{t_a} a \in A$. Если $t_a = 0$, то $a \in A$, в чем можно убедиться с помощью рисунка (пусть $R_t(a)$ нигде не пересекает отрезок прямой, соединяющий начало координат с $(n, R_n(a)) \in \mathbb{R}^2$; а это в точности совпадает с определением условия, что $a \in A$). Если $t_a \neq 0$, то мы разобьем $R_t(a)$ на две части точкой t_a и будем их называть левой и правой частями. Присоединим правую часть к началу координат и левую часть к концу правой части. Это соответствует построению блуждания $R_t(T^{t_a} a)$, порожденного

$T^{t_a}a$, и полученное блуждание имеет свойство не пересекать прямую, соединяющую начало координат с $(0, R_n(a))$. Таким образом, $T^{t_a}a \in A$, что завершает доказательство леммы 5.1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.1.2. Определим E так же, как и выше, и напомним, что $\mu(E) = 0$. Как мы уже знаем, если $a \in F = E^c$, то существует индекс $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, удовлетворяющий условию $T^j a \in A$. Поэтому $(\bigcup_{j=0}^{n-1} T^j A)^c = E$; итак, $\mu((\bigcup_{j=0}^{n-1} T^j A)^c) = 0$.

5.2. Разложение $\mathbb{R}^n$. Положим

$$E_u = \left\{ a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \exists a_{i_1}, \dots, a_{i_l}, \beta_1, \dots, \beta_l = \pm 1, \sum_{j=1}^l \beta_j a_{i_j} = lu \right\}$$

и $F_u = E_u^c$. При $a \in F_u$ мы введем u -разложения a , которые разделяют $R_t(a)$ на правую и левую части, одна из которых может быть тривиальной. Рассуждения, подобные использованным в доказательстве леммы 5.1.1, показывают, что имеется единственная пара $(i, c^*) \in \{0, 1, \dots, n\} \times \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $R_t(a) > ut + c^*$ для всех $t \in [0, n] \setminus \{i\}$ и условию $R_i(a) = ui + c^*$. Иначе говоря, имеется единственная прямая с наклоном u , для которой $\text{co}(a)$ лежит выше этой прямой, за исключением одной точки $(i, R_i(a))$, где прямая пересекает $\text{co}(a)$. Пусть $I_u: F_u \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ сопоставляет каждому $a \in F_u$ момент i только что описанного единственного пересечения. Это u -разложение $a \in F_u$ определяет разбиение $R_t(a)$ в точке $I_u(a)$ на левую и правую части, одна из которых может быть пуста или тривиальна (такое бывает при $I_u(a) = 0$ или n). Правая часть этого разбиения удовлетворяет условию $a_{I_u(a)+1} + \dots + a_{I_u(a)+i} > ui$ при $1 \leq i \leq n - I_u(a)$, в то время как левая часть этого разбиения удовлетворяет условию $-(a_{I_u(a)} + \dots + a_{I_u(a)-j}) > -(j+1)u$ при $0 \leq j < I_u(a)$. Единственность u -разложения приводит к следующему разбиению F_u : $F_u = \bigcup_{j=0}^n \mathcal{D}_j^u$, $\mathcal{D}_j^u \cap \mathcal{D}_l^u = \emptyset$ при $j \neq l$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_j^u &= \{a \in F_u : I_u(a) = j\} \\ &= \{a \in F_u : a_{j+1} + \dots + a_{j+i} > ui, 1 \leq i \leq n-j, \\ &\quad a_j + \dots + a_{j-l} < (l+1)u, 1 \leq l < j\} \\ &= \{a \in F_u : a_{j+1} + \dots + a_{j+i} > ui, 1 \leq i \leq n-j\} \\ &\quad \cap \{a \in F_u : a_j + \dots + a_{j-l} < (l+1)u, 0 \leq l < j\}. \end{aligned}$$

Это разбиение F_u сейчас поможет нам вычислить одну полезную величину. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — вещественные независимые одинаково распределенные случайные величины, распределения которых имеют плотности, и пусть $\mathbf{P}$ обозначает совместную вероятностную меру, индуцированную $X_1, \dots, X_n$; мы не предполагаем существования моментов. Определим $\mathbf{P}'$ как совместное вероятностное распределение на $\mathbb{R}^n$, порожденное этими случайными величинами. Для $u \in \mathbb{R}$ положим $G_j(u) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_i > ui, 0 < i \leq j)$ при $j = 1, \dots, n$, и пусть $G_0(u) = 1$; положим также $K_j(u) = \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_i < ui, 0 < i \leq j)$ при $j = 1, \dots, n$, и пусть $K_0(u) = 1$.

ТЕОРЕМА 5.2.1. $\sum_{j=0}^n K_j(u)G_{n-j}(u) = 1$ для любого $u \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $u \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{L}$ – лебегова мера на $\mathbb{R}^n$. Так как $P' \ll \mathcal{L}$ и $P'(E_u) = 0$, то $P'(F_u) = 1$, поскольку E_u – конечное объединение подмногообразий коразмерности один (гиперплоскостей) в $\mathbb{R}^n$, и поэтому оно имеет нулевую лебегову меру. Так как $F_u = \bigcup_{j=0}^n \mathcal{D}_j^u$ и множества $\{\mathcal{D}_j^u\}_{j=0}^n$ попарно не пересекаются, то $\sum_{j=0}^n P(\mathcal{D}_j^u) = 1$. Следующая цепочка вычислений доказывает теорему:

$$\begin{aligned} P'(\mathcal{D}_j^u) &= P'(a \in F_u : a_{j+1} + \dots + a_{j+i} > ui, 1 \leq i \leq n-j) \\ &\quad \times P'(a \in F_u : a_j + \dots + a_{j-l} < u(l+1), 0 \leq l < j) \\ &= G_{n-j}(u)K_j(u). \end{aligned}$$

Первое равенство следует из того факта, что P' – произведение мер, а второе справедливо потому, что P' – индуцированное произведение мер на $\mathbb{R}^n$, порожденное независимыми одинаково распределенными случайными величинами, и потому инвариантное относительно перестановок координат. Это завершает доказательство.

5.3. $W(\partial \mathcal{M}_s^r) = 0$. В этом приложении обсуждается равенство $W(\partial \mathcal{M}_s^r) = 0$. Во-первых, равномерно разобьем единичный отрезок на 2^n частей. Поставим следующий вопрос: пусть известно, что броуновские траектории принимают значения в $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ в момент времени 1 и лежат выше прямой, соединяющей начало координат с конечной точкой (в момент времени 1) в каждой точке вида $i2^{-n}$ при $i = 1, \dots, 2^n - 1$; чему равна вероятность того, что броуновская траектория принимает значения в $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ в некоторый момент времени $j2^{-n}$, где $j = 1, 2, \dots, 2^n - 1$? Это – простое вычисление при известных конечномерных распределениях броуновского движения и уже доказанных результатах раздела 2:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{1}{j(2^n-j)} \frac{\int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} \frac{\exp(-\frac{x^2}{2j2^{-n}})}{\sqrt{2\pi j2^{-n}}} dx \int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} \frac{\exp(-\frac{y^2}{2(1-j)2^{-n}})}{\sqrt{2\pi(1-j)2^{-n}}} dy}{\frac{1}{2^n} \int_{-2^{-n}}^{2^{-n}} \frac{\exp(-\frac{z^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dz} \\ &\leq \sum_{j=1}^{2^n-1} \frac{2}{2^{2n}} \left(\frac{j}{2^n} \left(1 - \frac{j}{2^n} \right) \right)^{-3/2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Последнее выражение может быть получено с помощью аппроксимации римановскими суммами. Наше вычисление показывает, что на самом деле все высказанные выше утверждения справедливы. При изучении $\partial \mathcal{M}_s^r$ мы видим, что мы имеем дело именно с нужными типами вероятностей.

5.4. Неравенство Марцинкевича–Зигмунда и большие отклонения.

В этом приложении мы формулируем неравенство, принадлежащее Марцинкевичу и Зигмунду, доказательство которого использует неравенство Хинчина и приведено в [6]. Мы используем это неравенство для оценки p -х моментов случайной величины $|\sum_{i=1}^n v_i|$, где $v_1, \dots, v_n$ – вещественные независимые одинаково распределенные случайные величины с $Ev_i = 0$ и с конечным p -м моментом; как обычно, Ev_i обозначает математическое ожидание v_i .

ТЕОРЕМА 5.4.1 (Марцинкевич–Зигмунд). Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ – независимые случайные величины с $EX_n = 0$. Для любого $p \geq 1$ существуют положительные постоянные A_p, B_p , зависящие только от p и удовлетворяющие условиям

$$A_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|_p \leq B_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \quad (14)$$

Вот следствие, которое дает нужный нам результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.4.1. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $EX_i = 0$ и $E|X_1|^p < \infty$, где $p \geq 2$. Пусть $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Тогда $E|S_n|^p = O(n^{p/2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. При $p > 2$ имеем

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \leq n^{(p-2)/p} \left(\sum_{i=1}^n |X_i|^p \right)^{2/p}$$

ввиду неравенства Гёльдера, и утверждение следствия вытекает из неравенства Марцинкевича–Зигмунда.

Используя это следствие и неравенство Чебышева, легко видеть, что справедливы все неравенства в разделах 2 и 4; все они являются неравенствами больших отклонений, что отражено в названии этого приложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Avellaneda, W. E. Statistical properties of shocks in Burgers turbulence // Comm. Math. Phys. 1995. V. 172. №1. P. 13–38.
- [2] R. Bass. Markov processes and convex minorants // Séminaire de Probabilités XVIII. 1982/83. Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 29–41. (Lecture Notes in Math. V. 1059.)
- [3] G. Baxter. A combinatorial lemma for complex numbers // Ann. Math. Statist. 1961. V. 32. P. 901–904.
- [4] П. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [5] J. C. Bonvin, Ph. Martin, J. Piasecki, X. Zotos. Statistics of mass aggregation in a self-gravitating one-dimensional gas // J. Statist. Phys. 1998. V. 91. №1–2. P. 177–197.
- [6] Y. S. Chow, H. Teicher. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
- [7] W. E, Yu. G. Rykov, Ya. G. Sinai. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Comm. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 349–380.
- [8] C. Goldie. Records, permutations, and greatest convex minorants // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1989. V. 106. №1. P. 169–177.
- [9] P. Groeneboom. The concave majorant of Brownian motion // Ann. Probab. 1983. V. 11. №4. P. 1016–1027.
- [10] P. A. Martin, J. Piasecki. Aggregation dynamics in a self-gravitating one-dimensional gas // J. Statist. Phys. 1996. V. 84. №3–4. P. 837–857.
- [11] J. Pitman. Remarks on the convex minorant of Brownian motion // Progr. Probab. Statist. 1983. V. 5. P. 219–227.
- [12] L. A. Shepp, S. P. Lloyd. Ordered cycle lengths in a random permutation // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 121. P. 340–357.

- [13] E. Sparre Andersen. On the fluctuations of sums of random variables. II // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 195–223.
- [14] F. Spitzer. A combinatorial lemma and its application to probability theory // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 82. P. 323–339.
- [15] А. М. Вершик, А. А. Шмидт. Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп. I // Теория вероятн. и ее примен. 1977. Т. 22. № 1. С. 72–88.
- [16] Ya. B. Zeldovich. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations // Astron. Astrophys. 1970. V. 5. P. 84–89.

Принстонский университет, США
E-mail: tmsuidan@math.princeton.edu

Поступила в редакцию
13.06.2001