Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Шлосман, Конструкция Вульфа в статистической механике и комбинаторике, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 97–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 03:35:06

УДК 531.19

**КОНСТРУКЦИЯ ВУЛЬФА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ И КОМБИНАТОРИКЕ**

С. Б. ШЛОСМАН

Приводятся геометрические решения некоторых вариационных задач статистической механики и комбинаторики. Рассматриваются конструкция Вульфа, которая описывает форму кристалла, а также конструкция, позволяющая определить форму типичной диаграммы Юнга и типичного небоскреба.

Библиография: 37 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	98
1.1. Статистическая механика	98
1.2. Комбинаторика	98
2. Геометрия	99
2.1. Функционал энергии капли	99
2.2. Задача Вульфа о минимизации	100
2.3. Двумерный случай	101
2.4. Задача максимизации	102
2.5. Грани	103
3. Статистическая механика	104
3.1. Основные сведения о модели Изинга	105
3.2. “Большая капля имеет форму Вульфа”. Размерность 2	107
3.3. “Большая капля имеет форму Вульфа”. Размерность ≥ 3	108
3.4. Грани фигур Вульфа и случайных капель	109
3.5. Метастабильность и критические капли	110
4. Комбинаторика	113
4.1. Типичные диаграммы Юнга	113
4.2. Грани небоскребов и асимптотическое число небоскребов	116
4.3. Представление в независимых переменных и некоторые производящие функции	119
4.4. Дальнейшие производящие функции и формула Мак-Магона	120
4.5. Представление в независимых величинах для небоскребов	125
5. Заключение	126
Список литературы	126

1. Введение

В этом обзоре мы рассмотрим феноменологическую геометрическую конструкцию, называемую конструкцией Вульфа. Важность ее состоит в том, что ответы, которые она дает, оказываются верными теоремами математической физики и комбинаторики. Далее мы приведем строгие результаты из нескольких важных областей, на которые эта конструкция дает ответ.

1.1. Статистическая механика. Вариационные задачи статистической механики, которые мы будем рассматривать, – это задачи, связанные с образованием капли или кристалла одного вещества внутри другого. Вопрос состоит в том, какую форму примет это образование. Всегда было ясно, что эта форма определяется минимумом поверхностной энергии при заданном объеме. В изотропном случае, когда поверхностное натяжение не зависит от ориентации поверхности, т.е. просто является положительной константой, искомая фигура, конечно же, будет шаром (силой тяжести мы пренебрегаем). В общем случае искомая фигура не будет столь симметричной. Соответствующая вариационная задача называется *задачей Вульфа*. Она была поставлена Вульфом в 1901 г. в работе [37], где было приведено и геометрическое решение, называемое *конструкцией Вульфа* (см. п. 2.2).

В строгой статистической механике конструкция Вульфа считалась чисто феноменологическим утверждением, несмотря на то, что понятие поверхностного натяжения – одно из центральных в ней. Ситуация изменилась с выходом книги [15], в которой было показано для формализма канонического ансамбля, что в режиме фазового перехода первого рода (случайная) область, занимаемая одной из фаз, асимптотически (в термодинамическом пределе) имеет неслучайный вид, в точности задаваемый конструкцией Вульфа! Другими словами, типичная макроскопическая случайная капля очень близка к форме Вульфа. Результаты, полученные в [15], относятся к случаю двумерного ферромагнетика Изинга, однако методы этой книги применимы для строгого анализа гораздо более общих моделей.

Другой круг задач, где также важна конструкция Вульфа, возникает в теории метастабильности. Это теория, изучающая состояния вещества, которых “не должно быть”, но которые тем не менее наблюдаются, хотя и короткое время. Одним из примеров является вода, охлажденная ниже нулевой температуры. Такая переохлажденная вода может на небольшое время оставаться жидкой, а затем быстро замерзает. Такие состояния называются метастабильными. Их следует рассматривать как продолжения равновесных состояний за точку фазового перехода, в которой они перестают существовать как равновесные. Оказывается, что продолжительность их существования определяется величинами, связанными с конструкцией Вульфа.

1.2. Комбинаторика. Еще одна область, где возникают подобные задачи, – это комбинаторика. Мы имеем в виду задачу об асимптотической форме типичной диаграммы Юнга и другие связанные с ней задачи. Первая постановка этого вопроса и ответ на него принадлежит Вершику и соавторам, см. [33]–[35], [13]. Указанные работы относятся к двумерному случаю; многомерная задача решена лишь недавно, см. [20]. Оказывается, что комбинаторная вариационная задача близка к задаче Вульфа.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00284).

История развития этой комбинаторной задачи выглядит весьма похоже на ситуацию в статистической механике. Единственная разница состоит в том, что комбинаторный аналог конструкции Вульфа не был известен – возможно потому, что здесь не было периода эвристики. Ниже мы опишем такую конструкцию, найденную в [29]. Как и конструкция Вульфа, она дает геометрическое решение соответствующей вариационной задачи при минимальных ограничениях на начальные условия, а также доказывает единственность решения.

В следующем разделе содержатся необходимые геометрические утверждения. Некоторые из них приведены с доказательствами. В разделе 3 мы рассмотрим задачи статистической механики, в которых естественным образом возникают эти геометрические задачи. В последнем разделе 4 рассматриваются соответствующие комбинаторные задачи.

2. Геометрия

В этом разделе мы рассмотрим различные геометрические задачи. Мы опишем задачу Вульфа о минимизации и конструкцию Вульфа (4), дающую решение этой задачи. Затем мы опишем связанную с ней задачу максимизации. Наконец, мы рассмотрим плоские грани фигур Вульфа.

2.1. Функционал энергии капли. Пусть $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ обозначает единичную сферу, и пусть задана действительная функция τ на S^d . Пусть эта функция непрерывна, положительна: $\tau(\cdot) \geq \text{const} > 0$, и четна: $\tau(\mathbf{n}) = \tau(-\mathbf{n})$. Тогда для всякой гиперповерхности M^d , вложенной в $\mathbb{R}^{d+1}$, можно определить *функционал Вульфа*

$$\mathcal{W}_\tau(M^d) = \int_{M^d} \tau(\mathbf{n}_x) ds_x. \quad (1)$$

Здесь $x \in M^d$ – точка многообразия M^d , вектор $\mathbf{n}_x$ – единичный вектор нормали к M^d в точке x , а ds – стандартная d -форма объема на M^d , индуцированная римановой метрикой на $\mathbb{R}^{d+1}$ при вложении $M^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. При этом, конечно, предполагается, что нормаль к M^d определена почти всюду, т.е. гиперповерхность M^d достаточно гладкая.

Кроме того, предположим, что гиперповерхность M^d ограничена, замкнута и тем самым является границей компактной области $N^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$; объем $|N^{d+1}|$ области N^{d+1} мы обозначим через $\text{vol}(M^d)$ и будем называть его *объемом внутри M^d* . Обозначим через D множество всех ограниченных замкнутых гиперповерхностей M^d , вложенных в $\mathbb{R}^{d+1}$. Два элемента из D , отличающиеся только сдвигом, мы считаем равными. Добавим к D элемент $\star$, соответствующий многообразию, вырождающемуся в точку пространства $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть $h > 0$ – действительное число. Рассмотрим *функционал энергии капли* Φ на D , определяемый как

$$\Phi(M^d) = \mathcal{W}_\tau(M^d) - h \text{vol}(M^d). \quad (2)$$

Этот функционал имеет следующий физический смысл: будем рассматривать элементы множества D как возможные формы капель. Функционал $\mathcal{W}_\tau$ отвечает за поверхностную энергию капли. В режиме конденсации энергия капли Φ состоит из двух частей – кроме поверхностного члена есть еще объемный, обуславливающий рост капли.

Этот функционал имеет локальный минимум в точке $M_{\min}^d = \star$, когда капля M^d вырождается в точку, $\Phi(\star) = 0$. Для небольших капель M^d он положителен, а на очень больших M^d , когда объемный член становится доминирующим, он принимает отрицательные значения. Поэтому Φ имеет седловые точки, и они отвечают за процесс конденсации капель. Следующая теорема описывает структуру критических точек функционала Φ , которая оказывается удивительно простой!

ТЕОРЕМА 1. Пусть функционал Φ задан формулой (2), где $h > 0$, а функция τ удовлетворяет условиям, приведенным выше. Тогда Φ имеет ровно две критические точки в D . Одна из них – локальный минимум в точке $M_{\min}^d = \star$, а другая – седло

$$M_{\text{sdl}}^d = \frac{d}{h} \cdot W_\tau. \quad (3)$$

Здесь d/h – коэффициент растяжения, а W_τ – фигура Вульфа, которая определяется как

$$W_\tau = \partial K_\tau^<, \quad \text{где} \quad K_\tau^< = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \forall n \ (x, n) \leq \tau(n)\}. \quad (4)$$

Значение $\Phi(M_{\text{sdl}}^d)$ равно

$$\Phi(M_{\text{sdl}}^d) = \frac{1}{d+1} \left(\frac{d}{h}\right)^d \mathcal{W}_\tau(W_\tau). \quad (5)$$

Заметим, что тело Вульфа $K_\tau^<$ является симметричной выпуклой замкнутой областью в $\mathbb{R}^{d+1}$. Если в некоторой граничной точке область $K_\tau^<$ имеет единственную опорную плоскость, то эта плоскость имеет вид

$$L_\tau(n) = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : (x, n) = \tau(n)\}$$

для соответствующего n . Поэтому

$$\text{vol}(W_\tau) = \frac{1}{d+1} \mathcal{W}_\tau(W_\tau). \quad (6)$$

С учетом этого замечания теорема 1 легко следует из теоремы 2 следующего пункта.

2.2. Задача Вульфа о минимизации. Пусть теперь D_q – множество всех замкнутых гиперповерхностей M^d , вложенных в $\mathbb{R}^{d+1}$, таких, что объем $\text{vol}(M^d)$ внутри M^d равен q . Задача Вульфа состоит в нахождении нижней грани функционала $\mathcal{W}_\tau$ на множестве D_q :

$$w_\tau = \inf_{M \in D_q} \mathcal{W}_\tau(M), \quad (7)$$

а также минимизирующей поверхности $W_\tau^{(q)}$, т.е. такой, что $\mathcal{W}_\tau(W_\tau^{(q)}) = w_\tau^{(q)}$, если она существует.

ТЕОРЕМА 2. *Вариационная задача (7) имеет единственное (с точностью до сдвигов) решение*

$$W_\tau^{(q)} = \left(\frac{q(d+1)}{\mathcal{W}_\tau(W_\tau)} \right)^{1/(d+1)} W_\tau.$$

Оно является растяжением фигуры Вульфа (4).

В [32] дано простое доказательство того, что $\mathcal{W}_\tau(W_\tau^{(q)}) \leq \mathcal{W}_\tau(M)$ для любого многообразия $M \in D_q$. Оно состоит из четырех шагов. Пусть $M = \partial N$ и $W_\tau = \partial K_\tau^<$.

1. Заметим, что

$$\mathcal{W}_\tau(M) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|N + \varepsilon K_\tau^<| - |N|}{\varepsilon}. \quad (8)$$

Здесь мы используем обозначение $A + B = \{z \in \mathbb{R}^{d+1} : z = x + y, x \in A, y \in B\}$, где $A, B \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Чтобы убедиться в справедливости (8), заметим вначале, что по непрерывности достаточно проверить (8) для случая, когда N — многогранник. В этом случае (8) следует из того, что для гиперплоскости $L(\mathbf{n})$, ортогональной к $\mathbf{n}$, сумма $L(\mathbf{n}) + K_\tau^<$ является полосой ширины $\leq 2\tau(\mathbf{n})$ вокруг $L(\mathbf{n})$, а вклады в $|N + \varepsilon K_\tau^<|$ от граней многогранника N меньших размерностей имеют порядок не выше ε^2 .

2. Теперь применим неравенство Брунна–Минковского, которое утверждает, что

$$|A + B| \geq (|A|^{1/(d+1)} + |B|^{1/(d+1)})^{d+1}.$$

Из него следует, что

$$\begin{aligned} |N + \varepsilon K_\tau^<| &\geq (|N|^{1/(d+1)} + \varepsilon |K_\tau^<|^{1/(d+1)})^{d+1} \\ &\geq |N| + (d+1)\varepsilon |N|^{d/(d+1)} |K_\tau^<|^{1/(d+1)}. \end{aligned}$$

3. Без потери общности можно ограничиться случаем $q = \text{vol}(W_\tau)$. Тогда

$$\frac{|N + \varepsilon K_\tau^<| - |N|}{\varepsilon} \geq (d+1) \text{vol}(W_\tau).$$

4. С другой стороны, $\mathcal{W}_\tau(W_\tau) = (d+1) \text{vol}(W_\tau)$, см. (6).

Единственность минимизирующей поверхности доказана в [31]. Доказательство значительно сложнее.

2.3. Двумерный случай. Для дальнейшего зафиксируем объем $q = \text{vol}(W_\tau)$ и будем опускать его в обозначениях. Специфика размерности 2 состоит в том, что поверхность W_τ , минимизирующая функционал $\mathcal{W}_\tau$, не только единственна, но и устойчива в метрике Хаусдорфа. Чтобы сформулировать это утверждение, напомним вначале, что расстояние Хаусдорфа ρ_H между двумя множествами $A, C \in \mathbb{R}^d$ определяется как

$$\rho_H(A, C) = \min\{\inf[r : A \subset C + B_r], \inf[r : C \subset A + B_r]\},$$

где B_r — шар радиуса r .

ТЕОРЕМА 3. Пусть γ – замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$, и пусть площадь внутри нее равна площади W_τ . Предположим, что

$$\mathcal{W}_\tau(\gamma) \leq \mathcal{W}_\tau(W_\tau) + \varepsilon,$$

с $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует сдвиг $\tilde{\gamma}$ кривой γ на вектор $x = x(\gamma)$ в $\mathbb{R}^2$ такой, что

$$\rho_H(\tilde{\gamma}, W_\tau) \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

где $C = C(\tau) > 0$.

Из теоремы 3 следует единственность кривой, минимизирующей функционал $\mathcal{W}_\tau$. В больших размерностях теорема 3 неверна.

Доказательство см. в [15; разд. 2.4].

2.4. Задача максимизации. В двойственной задаче снова имеется функция η на единичных векторах, но на этот раз она определена только на подмножестве $\Delta^d = S^d \cap \mathbb{R}_+^{d+1}$ векторов, лежащих в положительном октанте. Эта функция опять предполагается непрерывной и неотрицательной: $\eta(\cdot) \geq 0$. Кроме того, дополнительно предполагается, что

$$\eta(n) \rightarrow 0 \text{ равномерно при } n \rightarrow \partial\Delta^d. \quad (9)$$

Пусть $G \subset \mathbb{R}_+^{d+1}$ – вложенная гиперповерхность. Предположим, что для почти всех $x \in G$ определен нормальный вектор n_x и, более того,

$$n_x \in \Delta^d \text{ для п.в. } x \in G. \quad (10)$$

Тогда можно определить функционал

$$\mathcal{V}_\eta(G) = \int_G \eta(n_x) ds_x. \quad (11)$$

Аналогично п. 2.2 введем семейство $\overline{D}_q, q > 0$, поверхностей G таких, что:

- i) G разбивает октант $\mathbb{R}_+^{d+1}$ на две части, причем граница $\partial\mathbb{R}_+^{d+1}$ принадлежит одной из них;
 - ii) $((d+1)$ -мерный) объем тела $Q(G)$, заключенного между $\partial\mathbb{R}_+^{d+1}$ и G , равен q ;
- в дальнейшем мы будем обозначать объем $Q(G)$ через $\text{vol}(G)$.

Например, пусть $f(y) \geq 0$ – функция на $\mathbb{R}_+^d$, невозрастающая по каждой из d переменных, а $G[f] \subset \mathbb{R}_+^{d+1}$ – ее график. Тогда

$$\text{vol}(G[f]) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f(y) dy, \quad (12)$$

так что если $\int_{\mathbb{R}_+^d} f(y) dy = q$, то $G[f]$ – элемент $\overline{D}_q$ при условии, что функция f достаточно гладкая.

Задача теперь состоит в том, чтобы найти *верхнюю грань* функционала $\mathcal{V}_\eta$ на множестве $\overline{D}_1$:

$$v_\eta = \sup_{G \in \overline{D}_1} \mathcal{V}_\eta(G), \quad (13)$$

а также максимизирующую поверхность $V_\eta \in \overline{D}_1$, т.е. такую, что $\mathcal{V}_\eta(V_\eta) = v_\eta$, если она существует. Заметим, что эта задача существенно отличается от (7), поскольку здесь мы ищем *супремум*. В частности, в отличие от задачи (7), эта верхняя грань будет расходиться, если ее брать по всем поверхностям, а не только по “монотонным” в смысле (10).

Оказывается, что существует геометрическая конструкция, которая дает решение вариационной задачи (13), аналогичная конструкции Вульфа, решающей задачу (7). Этот факт обнаружен в [29]. Пусть

$$K_\eta^> = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \forall n \in \Delta^d (x, n) \geq \eta(n)\}, \quad (14)$$

$$G_\eta = \partial(K_\eta^>). \quad (15)$$

В силу (9) поверхность G_η является графиком функции $f_\eta(y)$, $y \in \mathbb{R}_+^d$, т.е. $G_\eta = G[f_\eta]$. Заметим, что интеграл $\text{vol}(G_\eta)$ (см. (12)) удовлетворяет равенству

$$\text{vol}(G_\eta) = \frac{\mathcal{V}_\eta(G_\eta)}{d+1} \quad (16)$$

(ср. (6)) при условии, что обе части равенства (16) конечны.

ТЕОРЕМА 4. Пусть интеграл $\text{vol}(G_\eta)$ сходится. Тогда функционал $\mathcal{V}_\eta$ имеет единственную максимизирующую поверхность V_η в множестве $\overline{D}_1$. Она получается растяжением поверхности (15):

$$V_\eta = \left(\frac{d+1}{\mathcal{V}_\eta(G_\eta)} \right)^{1/(d+1)} G_\eta. \quad (17)$$

Если интеграл $\text{vol}(G)$ расходится, то $v_\eta = \infty$.

2.5. Грани. В этом пункте мы рассмотрим грани – плоские участки поверхностей W_τ и V_η .

Вообще говоря, различные функции τ могут соответствовать одной и той же фигуре Вульфа W_τ . Это соответствие можно сделать взаимно однозначным, если дополнительно потребовать, чтобы функция τ удовлетворяла неравенству пирамиды, введенному в [14]. Сформулируем его для двумерного случая. Пусть A, B, C – три точки в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим три единичных вектора n_{AB}, n_{BC}, n_{CA} , ортогональных соответствующим сторонам треугольника ABC . Неравенство пирамиды (или, в данном случае, треугольника) – это условие, что

$$|AB|\tau(n_{AB}) + |BC|\tau(n_{BC}) \geq |CA|\tau(n_{CA})$$

для любого треугольника ABC . Неравенство пирамиды равносильно тому свойству, что каждая плоскость

$$L_\tau^-(n; \lambda) = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : (x, n) = \lambda\tau(n)\}$$

является опорной плоскостью для (выпуклого) тела $K_\tau^<(\lambda)$ (см. (4)). В случае, когда τ является реальной функцией поверхностного натяжения некоторой стат-механической системы, это свойство по-видимому всегда выполняется. Для двумерной модели Изинга неравенство треугольника становится строгим, см. [15]. Из строгого неравенства пирамиды следует гладкость соответствующей фигуры Вульфа. В [24] доказано, что неравенство пирамиды выполнено для некоторого достаточно общего класса моделей. В дальнейшем мы будем предполагать, что оно выполнено; это равносильно выпуклости аффинного продолжения $\hat{\tau}$ функции τ на $\mathbb{R}^{d+1}$, которое определяется как $\hat{\tau}(x) = \|x\|\tau(x/\|x\|)$. Тем самым, функция τ дифференцируема почти всюду и имеет производную по направлению в любой точке $\mathbf{n} \in S^d$ для любого касательного направления. Обозначим через $\tau'(\boldsymbol{\nu}_\mathbf{n})$ производную функции τ в точке $\mathbf{n}$ по направлению, заданному единичным вектором $\boldsymbol{\nu}_\mathbf{n}$, касательным к S^d в точке $\mathbf{n}$. Множество всех таких единичных касательных векторов обозначим $S_\mathbf{n}^{d-1}$.

Скажем, что функция τ в точке $\mathbf{n}_0$ имеет точку возврата, если для любого $\boldsymbol{\nu} \in S_{\mathbf{n}_0}^{d-1}$ выполнено

$$\tau'(\boldsymbol{\nu}) \neq -\tau'(-\boldsymbol{\nu}) \quad (18)$$

(заметим, что в любой точке гладкости τ выполняется $\tau'(\boldsymbol{\nu}) = -\tau'(-\boldsymbol{\nu})$). Если это так, то пересечение опорной плоскости $L_\tau^-(\mathbf{n}_0; \lambda)$ с телом Вульфа $K_\tau^<(\lambda)$ является выпуклым замкнутым подмножеством этой плоскости, множество внутренних точек которого непусто. Такой плоский участок границы $\partial(K_\tau^<(\lambda))$ называется *гранью*. Форму грани можно найти с помощью аналога конструкции Вульфа (4), примененного к функции $\tau'(\boldsymbol{\nu})$ на $S_{\mathbf{n}_0}^{d-1}$. Этот аналог особенно прост, если функция τ обладает дополнительной симметрией в точке $\mathbf{n}_0$ – а именно, если для любого $\boldsymbol{\nu} \in S_{\mathbf{n}_0}^{d-1}$ выполнено $\tau'(\boldsymbol{\nu}) = \tau'(-\boldsymbol{\nu})$. Заметим, что тогда из (18) следует, что $\tau'(\boldsymbol{\nu}) > 0$ для любого $\boldsymbol{\nu} \in S_{\mathbf{n}_0}^{d-1}$. В этом случае вышеупомянутый аналог просто совпадает с собственно конструкцией Вульфа, см. [25]. Именно, форма грани задается как

$$F(\tau, \mathbf{n}_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \forall \boldsymbol{\nu} (x, \boldsymbol{\nu}) \leq \tau'(\boldsymbol{\nu})\}. \quad (19)$$

Все вышесказанное применимо и к граням поверхности V_η . Единственная разница состоит в том, что кроме ограниченных граней у нее могут быть и неограниченные, лежащие в ортантах $\mathbb{R}_+^d \subset \partial\mathbb{R}_+^{d+1}$. Форма ограниченных граней задается непосредственным аналогом равенства (19). Неограниченные грани, скажем, в плоскости xy (в случае размерности $d+1=3$) возникают, когда функция η имеет ненулевые производные $\eta'(\boldsymbol{\nu})$ в точке $\mathbf{n}_z = (0, 0, 1)$ по касательным направлениям $\boldsymbol{\nu} \in [0, \pi/2] \equiv \Delta^1$ к сферическому треугольнику $\Delta^2 = S^2 \cap \mathbb{R}_+^3$. В таком случае форма грани определяется аналогом равенства (14):

$$F(\eta, \mathbf{n}_z) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \forall \boldsymbol{\nu} (x, \boldsymbol{\nu}) \geq \eta'(\boldsymbol{\nu})\}. \quad (20)$$

3. Статистическая механика

Конструкция Вульфа имеет прямое отношение к строгой статистической механике, поскольку она описывает асимптотическую форму капли одной фазы на фоне другой в режиме сосуществования фаз. Первый результат подобного рода получен в книге [15].

Далее мы вкратце опишем его, а также более поздние результаты. Речь пойдет только о модели Изинга, хотя можно изучать и более общие модели.

Этот раздел устроен так: сначала мы напоминаем основные сведения о модели Изинга. Затем мы формулируем результаты о форме капель $(+)$ -фазы в $(-)$ -фазе для двумерного случая и для больших размерностей. В заключение мы описываем связь этих результатов с теорией метастабильности.

3.1. Основные сведения о модели Изинга. Гиббсовские состояния. В каждом узле решетки $\mathbb{Z}^{d+1}$ имеется спин, который может принимать значения -1 или $+1$. Таким образом, конфигурациями являются элементы множества $\{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^{d+1}} = \Omega$. Для данной конфигурации $\sigma \in \Omega$ через $\sigma(x)$ обозначается спин в узле $x \in \mathbb{Z}^{d+1}$. Особо выделены две конфигурации – одна, в которой все спины равны -1 , и другая, где все спины равны $+1$. Их мы будем обозначать просто $-$ и $+$.

Наблюдаемые – это функции на Ω . Локальные наблюдаемые – те, которые зависят лишь от значений конечного числа спинов.

Рассмотрим формальный гамильтониан

$$H_h(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{|x-y|=1} \sigma(x)\sigma(y) - \frac{h}{2} \sum_x \sigma(x), \quad (21)$$

где $h \in \mathbb{R}^1$ – внешнее поле, а $\sigma \in \Omega$ – произвольная конфигурация. Для каждого множества $\Lambda \subset \mathbb{Z}^{d+1}$ и каждого *граничного условия* $\xi \in \Omega$ определим

$$H_{\Lambda, \xi, h}(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x, y \in \Lambda}} \sigma(x)\sigma(y) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{|x-y|=1 \\ x \in \Lambda, y \notin \Lambda}} \sigma(x)\xi(y) - \frac{h}{2} \sum_{x \in \Lambda} \sigma(x).$$

Введем подмножество $\Omega_{\Lambda, \xi} \subset \Omega$, определив его как

$$\Omega_{\Lambda, \xi} = \{\sigma \in \Omega : \sigma(x) = \xi(x) \text{ при } x \notin \Lambda\}.$$

Далее определим большую каноническую статсумму

$$Z_{\Lambda, \xi, T, h} = \sum_{\sigma \in \Omega_{\Lambda, \xi}} \exp(-\beta H_{\Lambda, \xi, h}(\sigma)), \quad (22)$$

где $\beta = 1/T$.

Распределение Гиббса большого канонического ансамбля на множестве Λ , с граничным условием ξ , во внешнем поле h при температуре T – это вероятностная мера на Ω , определенная равенством

$$\mu_{\Lambda, \xi, T, h}(\sigma) = \begin{cases} Z_{\Lambda, \xi, T, h}^{-1} \exp(-\beta H_{\Lambda, \xi, h}(\sigma)), & \text{если } \sigma \in \Omega_{\Lambda, \xi}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (23)$$

Для каждого значения T и h распределение Гиббса $\mu_{\Lambda(l), \pm, T, h}$ с $(\pm)$ -граничными условиями в квадрате $\Lambda(l)$ со стороной l слабо сходится при $l \rightarrow \infty$ к вероятностной мере; обозначим ее $\mu_{\pm, T, h}$. Если $h \neq 0$, то $\mu_{-, T, h} \neq \mu_{+, T, h}$, и эту меру можно

обозначать просто $\mu_{T,h}$. При $h = 0$ то же самое верно, если температура больше критического значения $T_c = T_c(d+1)$ или равна ему, и неверно при $T < T_c$, в этом случае говорят о сосуществовании фаз. Критическая температура зависит от размерности: $T_c(1) = 0$, но $T_c(d+1) > 0$ при $d \geq 1$. Мера $\mu_{+,T,0} \equiv \mu_{+,T}$ называется (+)-фазой, а $\mu_{-,T} - (-)$ -фазой.

В случае, когда Λ – куб $\Lambda(l)$, можно также говорить о *периодических граничных условиях* в Λ , что соответствует сворачиванию $\Lambda(l)$ в тор. Тогда можно аналогично определить конфигурационные пространства $\Omega_{\Lambda(l)} = \{-1, +1\}^{\Lambda(l)}$, гамильтониан $H_{\Lambda(l),\text{per},h}(\sigma)$ для $\sigma \in \Omega_{\Lambda(l)}$, статсумму $Z_{\Lambda(l),\text{per},T,h}$ и соответствующее распределение Гиббса большого канонического ансамбля $\mu_{\Lambda(l),\text{per},T,h}$ в $\Lambda(l)$ – с периодическими граничными условиями во внешнем поле h при температуре T .

Далее нам нужно ввести понятие *распределения Гиббса канонического ансамбля*. Для этого вначале зафиксируем действительное число ρ , $-1 < \rho < 1$. Теперь для каждого конечного параллелепипеда Λ рассмотрим подмножество $\Omega_{\Lambda,\xi}^\rho \subset \Omega_{\Lambda,\xi}$, заданное следующим условием:

$$\sigma \in \Omega_{\Lambda,\xi}^\rho \iff \sum_{x \in \Lambda} \sigma(x) = [\rho|\Lambda|],$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Каноническая статсумма $Z_{\Lambda,\xi,T,h}^\rho$ определяется аналогично формуле (22), только область суммирования $\Omega_{\Lambda,\xi}$ заменяется на $\Omega_{\Lambda,\xi}^\rho$. Распределение Гиббса канонического ансамбля $\mu_{\Lambda,\xi,T,h}^\rho$ определяется аналогично формуле (23), где $Z_{\Lambda,\xi,T,h}$ заменяется на $Z_{\Lambda,\xi,T,h}^\rho$, а $\Omega_{\Lambda,\xi}$ – на $\Omega_{\Lambda,\xi}^\rho$. Очевидным образом вводятся распределения $\mu_{\Lambda(l),\text{per},T,h}^\rho$. Легко проверить, что распределения $\mu_{\Lambda,\xi,T,h}^\rho$, $\mu_{\Lambda(l),\text{per},T,h}^\rho$ на самом деле не зависят от магнитного поля h , поэтому будем обозначать их просто $\mu_{\Lambda(l),\text{per},T}^\rho$, $\mu_{\Lambda,\xi,T}^\rho$.

Можно сказать, что распределение Гиббса канонического ансамбля получается из распределения Гиббса большого канонического ансамбля переходом к условному распределению относительно события $\sum_{x \in \Lambda} \sigma(x) = [\rho|\Lambda|]$. Еще одно множество состояний, которое нам понадобится, получается из распределения Гиббса большого канонического ансамбля переходом к условным распределениям относительно события $|\sum_{x \in \Lambda} \sigma(x)| \leq [\rho|\Lambda|]$. Обозначим их $\mu_{\Lambda,\xi,T,h}^{\leq \rho}$. Другими словами, мы вводим множество $\Omega_{\Lambda,\xi}^{\leq \rho}$, состоящее из конфигураций σ , для которых $|\sum_{x \in \Lambda} \sigma(x)| \leq [\rho|\Lambda|]$, соответствующую статсумму $Z_{\Lambda,\xi,T,h}^{\leq \rho}$ и снова пользуемся аналогом формулы (23).

Для математического ожидания по мере Гиббса $\mu_{\dots}$ будем использовать обозначение $\langle f \rangle_{\dots} = \int f d\mu_{\dots}$, где под $\dots$ подразумеваются произвольные нижние и верхние индексы. Спонтанная намагниченность при температуре T определяется как $m^*(T) = \langle \sigma(0) \rangle_{+,T}$. Известно, что $m^*(T) > 0$ тогда и только тогда, когда $T < T_c$.

Контуры. С каждой конфигурацией σ можно связать множество $\gamma(\sigma)$ поверхностей в $\mathbb{R}^{d+1}$, называемых контурами. Они определяются следующим образом. Рассмотрим множество $\mathfrak{B}(\sigma)$ всех ребер x, y решетки таких, что $\sigma(x)\sigma(y) = -1$. Поверхности множества $\gamma(\sigma)$ образуются множеством $\mathfrak{P}(\sigma)$ d -мерных клеток решетки, двойственных ребрам $\mathfrak{B}(\sigma)$. Каждая связная компонента $\mathfrak{P}(\sigma)$ называется контуром.

Поверхностное натяжение. Поверхностное натяжение (зависящее от направления) определяется следующим образом. Для каждого вектора $\mathbf{n} \in S^d$ рассмотрим

следующую конфигурацию $\xi(\mathbf{n})$, которую будем использовать в качестве граничного условия:

$$\xi(\mathbf{n})(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } (x, \mathbf{n}) \geq 0, \\ -1, & \text{если } (x, \mathbf{n}) < 0, \end{cases}$$

где $(\cdot, \cdot)$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{d+1}$. Определим поверхностное натяжение вдоль плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$, как

$$\tau_T(\mathbf{n}) = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\beta A(l, \mathbf{n})} \log \frac{Z_{\Lambda(l), \xi(\mathbf{n}), T, 0}}{Z_{\Lambda(l), +, T, 0}} \right), \quad (24)$$

где $A(l, \mathbf{n})$ – (d -мерная) площадь пересечения гиперплоскости $\{x : (x, \mathbf{n}) = 0\}$ с кубом $\Lambda(l)$. Известно, что для любого $T < T_c$ поверхностное натяжение $\tau_T(\cdot)$ является непрерывной строго положительной функцией.

3.2. “Большая капля имеет форму Вульфа”. Размерность 2. Мера $\mu_{\Lambda(l), \text{per}, T}^\rho$ на конфигурациях естественно определяет меру на контурах. Следующая теорема объясняет, каковы типичные свойства контуров, и тем самым подтверждает заголовок этого пункта.

В теореме рассматриваются значения плотности ρ , меньшие среднего значения $\langle \sigma(0) \rangle_{\Lambda(l), \text{per}, T} \approx m^*(T)$, что обеспечивает некоторое дополнительное количество $(-)$ -фазы в $(+)$ -фазе. Как наверное и предполагает читатель, это дополнительное количество собирается в одну большую каплю, которая приблизительно имеет форму Вульфа.

Далее в этом пункте рассматривается исключительно случай размерности 2.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $T < T_c(2)$. Тогда для любой плотности ρ такой, что $m^*(T)/2 < |\rho| < m^*(T)$, существует последовательность $\mathfrak{D}_l$ подмножеств конфигураций, $\mathfrak{D}_l \subset \Omega_{\Lambda(l)}^\rho$, которые, во-первых, **типичны**, т.е.

$$\mu_{\Lambda(l), \text{per}, T}^\rho(\mathfrak{D}_l) \rightarrow 1 \quad \text{при } l \rightarrow \infty,$$

а во-вторых, обладают следующими свойствами:

- для любой конфигурации $\sigma \in \mathfrak{D}_l$ множество $\gamma(\sigma)$ ее контуров содержит ровно один “длинный” контур $\Gamma(\sigma) \in \gamma(\sigma)$; все остальные контуры не длиннее, чем $K \ln l$, $K = K(\beta, \rho)$;
- площадь $|\text{Int } \Gamma(\sigma)|$ внутри $\Gamma(\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$|| \text{Int } \Gamma(\sigma) - \lambda l^2 | \leq K l^{6/5} (\ln l)^\varkappa,$$

$$\text{где } \lambda = \frac{m^*(T) - |\rho|}{2m^*(T)}, \quad \varkappa = \varkappa(\rho);$$

- пусть W_τ – кривая Вульфа, соответствующая поверхностному натяжению τ модели Изинга (см. (24)). Контур $\Gamma(\sigma)$ можно сдвинуть на вектор $x = x(\sigma) \in \Lambda(l)$, так что он становится близким к раздутой кривой Вульфа:

$$\rho_H \left(\Gamma(\sigma) + x(\sigma), \sqrt{\frac{2\lambda}{\mathcal{W}_\tau(W_\tau)}} l W_\tau \right) \leq K l^{2/3} (\ln l)^\varkappa. \quad (25)$$

Первый вариант этой теоремы был получен в [15]. Обобщение на все докритические температуры принадлежит Иоффе, а также Иоффе и Шонману [17]–[19]. Показатель степени $2/3$ в (25) – улучшение первоначального результата $3/4$, полученное Александером [1]. Аналогичный результат для теории просачивания получен в [2].

Ограничение $m^*(T)/2 < |\rho|$ в теореме необходимо, поскольку без него капля может предпочесть принять форму сферической полосы между двумя меридианами, а не форму Вульфа, см. [28]. Но форма полосы невыгодна, если объем капли должен быть небольшим.

3.3. “Большая капля имеет форму Вульфа”. Размерность ≥ 3 . Для больших размерностей относительно аналога теоремы 3.1 можно сказать следующее: он, наверное, верен для очень низких температур и, скорее всего, неверен для умеренных субкритических температур.

Доказан ее слабый вариант, где расстояние между случайной каплей и фигурой Вульфа измеряется не в метрике Хаусдорфа, а в метрике L^1 . Чтобы сформулировать соответствующую теорему, мы свяжем с каждой конфигурацией σ из $\Omega_{\Lambda(l)}$ действительную функцию $M_\sigma(t)$ на единичном торе $\mathbb{T}^{d+1}$ и будем сравнивать эту функцию с индикаторной функцией $\mathbb{I}_{\lambda K_\tau^<}$, где $\lambda K_\tau^< \subset \mathbb{T}^{d+1}$ – подходящим образом сжатое тело Вульфа. Функция $M_\sigma(t)$ определяется так. Обозначим через i_l естественное вложение дискретного тора $\Lambda(l)$ в $\mathbb{T}^{d+1}$, так что образ отображения i_l – решетка с шагом $1/l$. Для $t \in \mathbb{T}^{d+1}$ определим $B_l(t) \subset \mathbb{T}^{d+1}$ – шар радиуса $^{d+1}\sqrt{1/l}$ с центром в точке t , и $B_l(t) \subset \Lambda(l)$ – его прообраз при отображении i_l . Тогда

$$M_\sigma(t) = \frac{1}{|B_l(t)|} \sum_{x \in B_l(t)} \sigma(x).$$

(Выбор масштаба $^{d+1}\sqrt{1/l}$ здесь достаточно произволен; важно только, чтобы размер множества $B_l(t)$ рос с ростом l , но оставался бесконечно малым по сравнению с l^{d+1} .)

Мы собираемся рассматривать типичные конфигурации меры $\mu_{\Lambda(l), \text{per}, T, h}^{<\rho}$ при $h = 0$. Для того чтобы появлялась капля, причем такая, чтобы она не оборачивалась вокруг тора, нужно наложить ограничения на ρ . Достаточно, чтобы

$$m^*(T)(1 - 2(d+1)^{-\frac{d+1}{d}}) < |\rho| < m^*(T). \quad (26)$$

Непосредственное вычисление показывает, что при этом ограничении следует ожидать появления капли $\lambda K_\tau^<$, где

$$\lambda = ^{d+1}\sqrt{\frac{d+1}{\mathcal{W}_\tau(W_\tau)}} \frac{m^* - |\rho|}{2m^*}. \quad (27)$$

Чтобы сформулировать точное утверждение, введем для каждого подмножества $A \subset \mathbb{T}^{d+1}$ индикатор

$$\mathbb{I}_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A, \\ -1, & t \in A^c. \end{cases}$$

Для каждой функции v из пространства $L^1(\mathbb{T}^{d+1})$ обозначим через $U(v, \delta)$ ее δ -окрестность в $L^1(\mathbb{T}^{d+1})$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть размерность $d + 1$ больше или равна двум, а температура $T < T_c(d + 1)$ удовлетворяет некоторым дополнительным техническим ограничениям (см. ниже). Тогда в большом объеме и для плотностей ρ , удовлетворяющих (26), типичная функция $M_\sigma(t)$ имеет форму Вульфа: для любого $\delta > 0$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mu_{\Lambda(l), \text{per}, T, 0}^{< \rho} \left\{ \frac{1}{m^*(T)} M_\sigma(\cdot) \in \bigcup_{t \in \mathbb{T}^{d+1}} (U(\mathbb{I}_{\lambda K_\tau^< + t}, \delta) \cup U(-\mathbb{I}_{\lambda K_\tau^< + t}, \delta)) \right\} = 1.$$

Здесь λ определено равенством (27).

Сдвиги фигуры Вульфа $\lambda K_\tau^<$ на всевозможные t возникают в этом утверждении, поскольку положение капли может быть произвольным. При этом капля $\Gamma(\sigma)$ может быть как в (+)-фазе, так и в (-)-фазе, поэтому рассматриваются два индикатора: $\mathbb{I}_{\lambda K_\tau^<}$ и $-\mathbb{I}_{\lambda K_\tau^<}$. Заметим, что если точка t такова, что шар $B_l(t)$ удален от границы капли $\Gamma(\sigma)$ конфигурации σ , то значение $M_\sigma(t)$ равно примерно $\pm m^*(T)$ в зависимости от фазы внутри/снаружи капли, что и объясняет множитель $1/m^*(T)$.

Диапазон температур, для которых теорема верна, составляет отрезок $(0, \tilde{T}_c(d + 1))$, за исключением не более чем счетного числа значений. Он обязательно содержит все достаточно низкие температуры. Значение $\tilde{T}_c$, так называемый “порог просачивания в полосу” (slab percolation threshold), предположительно совпадает с T_c .

Доказательство см. в [6], [11] или в обзоре [7]. Этим работам предшествовала статья Серфа [9], где была решена аналогичная задача теории просачивания.

3.4. Грани фигур Вульфа и случайных капель. О функции поверхностного натяжения τ (см. (24)) модели статистической механики известно следующее. Когда размерность модели $(d + 1)$ равна двум, функция τ по-видимому является гладкой и тем самым без точек возврата, поэтому соответствующая фигура Вульфа не имеет планарных граней (т.е. отрезков прямых). Для двумерной модели Изинга известно, что это в самом деле так (из точного решения). Методы книги [15] позволяют доказать, что для некоторого общего класса двумерных моделей (так называемых моделей Пирогова–Синая) функция поверхностного натяжения τ является даже аналитической. Функция поверхностного натяжения низкотемпературной трехмерной модели Изинга имеет точки возврата, а соответствующая фигура Вульфа имеет плоские грани и напоминает кристалл. Это было доказано в [8] и позднее обобщено на другие модели в [25]. Кроме того, в трехмерной модели Изинга при температуре $T_R < T_c$ предположительно происходит так называемый переход ошершавливания (roughening transition), при котором поверхностное натяжение становится гладкой функцией, плоские грани исчезают и, таким образом, фигура Вульфа становится округлой. Эта гипотеза, однако, остается открытой.

Приведенная выше теорема 6 дает некоторую информацию о том, насколько форма случайной капли, возникающей в системе с ограничением (26), схожа с фигурой Вульфа. Этот результат, однако, недостаточно сильный для того, чтобы позволить понять, будет ли сама по себе большая случайная капля (в типичной конфигурации – единственная) в некотором смысле иметь плоские грани. Используя обозначения теоремы 6, можно сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 7. Пусть температура T достаточно низкая. Тогда следующее событие имеет $\mu_{\Lambda(l), \text{per}, T, 0}^{< \rho}$ -вероятность, стремящуюся к 1 при $l \rightarrow \infty$.

Существует шесть различных двумерных плоскостей $L_i = L_i(\sigma) \subset \mathbb{T}^3$, $i = 1, \dots, 6$, по две на каждое координатное направление, таких, что пересечения $L_i \cap \Gamma(\sigma)$ являются плоскими гранями капли $\Gamma(\sigma)$. А именно, для любого i :

- i) $\text{diam}(L_i \cap \Gamma(\sigma)) \geq C_1(T) \text{diam}(\lambda K_\tau^<)l$ (см. (26)), где $C_1(T) \rightarrow \sqrt{2/3}$ при $T \rightarrow 0$;
- ii) $\frac{|L_i \cap \Gamma(\sigma)|}{[\text{diam}(L_i \cap \Gamma(\sigma))]^2} \geq C_2(T)$, где $C_2(T) \rightarrow 1/2$ при $T \rightarrow 0$;
- iii) асимптотическая форма плоских граней $L_i \cap \Gamma(\sigma)$ определяется соответствующей конструкцией Вульфа, описанной в п. 2.5.

При $T \rightarrow 0$ фигура Вульфа стремится к кубу; отсюда и появляются значения $\sqrt{2/3}$ в i) и $1/2$ в ii).

3.5. Метастабильность и критические капли. В этом пункте мы опишем строгие результаты в задаче сходимости к равновесию. На интуитивном уровне можно представлять себе, что мы наблюдаем жидкость при отрицательной температуре, т.е. переохлажденную воду, и интересуемся, как будет развиваться процесс и через какое время вода замерзнет.

Основой для нас опять будет служить двумерная модель Изинга. Нам нужно ввести в нее эволюцию во времени. Для этого используется так называемая глауберова динамика. Это марковский процесс на пространстве состояний Ω , генератор L которого действует на локальную наблюдаемую f следующим образом:

$$(Lf)(\sigma) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} c(x, \sigma)(f(\sigma^x) - f(\sigma)),$$

где σ^x – конфигурация, получаемая из σ переворотом спина в узле x в противоположное значение, а $c(x, \sigma)$ – интенсивность переворачивания спина в узле x , когда система находится в состоянии σ . Можно сказать, что динамика происходит следующим образом: в каждом узле x спин $\sigma(x)$ переворачивается случайно, независимо от других, с интенсивностью $c(x, \sigma)$, где σ – текущая конфигурация. Стандартными примерами являются динамика Метрополиса (Metropolis Dynamics):

$$c_h(x, \sigma) = \exp(-\beta(\Delta_x H_h(\sigma))^+),$$

и динамика теплового резервуара (Heat Bath Dynamics):

$$c_h(x, \sigma) = [1 + \exp(\beta \Delta_x H_h(\sigma))]^{-1}.$$

Здесь $(a)^+ = \max\{a, 0\}$, а $\Delta_x H_h(\sigma) = H_h(\sigma^x) - H_h(\sigma)$. Полученная система эволюционирующих спинов обозначается $(\sigma_{T, h; t}^\xi)_{t \geq 0}$, где ξ – начальная конфигурация в момент времени $t = 0$. Если начальная конфигурация выбирается случайным образом в соответствии с некоторым вероятностным распределением ν , то получающийся

процесс обозначается $(\sigma_{T,h;t}^\nu)_{t \geq 0}$. Известно, что распределения Гиббса инвариантны относительно таких стохастических моделей Изинга. Более того,

$$\sigma_{T,h;t}^- \rightarrow \mu_{-,T,h}, \quad \sigma_{T,h;t}^+ \rightarrow \mu_{+,T,h} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Нас интересует случай, когда h – положительное малое число. Тогда есть только одно инвариантное состояние, $\mu_{+,T,h}$, так что состояние $\mu_{-,T,h}$ равно $\mu_{+,T,h}$, и $\sigma_{T,h;t}^- \rightarrow \mu_{+,T,h}$ при $t \rightarrow \infty$. (На интуитивном уровне можно представлять себе состояние $\sigma_{T,h;t}^-$ при малых t как переохлажденную, но жидкую воду, а состояние $\mu_{+,T,h}$ отождествлять со льдом.) Мы хотим проследить сходимость текущего состояния $\sigma_{T,h;t}^-$ к равновесию $\mu_{+,T,h}$ и по возможности убедиться, что в течение некоторого довольно долгого времени состояние $\sigma_{T,h;t}^-$ очень похоже на $(-)$ -фазу $\mu_{-,T}$, а после некоторого порогового времени оно внезапно изменяется и становится очень похоже на $\mu_{+,T,h}$. Оказывается, что все эти свойства действительно можно доказать.

Если промоделировать эту динамику на компьютере, будет наблюдаться следующая картина: посреди $(-)$ -фазы возникают капельки $(+)$ -фазы, которые некоторое время существуют и исчезают. Такой процесс некоторое время продолжается, до тех пор пока не рождается достаточно большая $(+)$ -капля. Она начинает расти и в конце концов заполняет весь экран компьютера. За это, конечно, отвечает функционал энергии капли Φ , введенный в (2). Нас интересует его двумерный вариант, так что множество D состоит из всех замкнутых кривых $\mathbf{m}$ в $\mathbb{R}^2$, и следует тривиальным образом скорректировать объемный (здесь это площадь) член:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \mathcal{W}_\tau(\mathbf{m}) - m^*(T)h \operatorname{vol}(\mathbf{m}). \quad (28)$$

Эта коррекция нужна, поскольку магнитное поле h входит в гамильтониан (21) таким образом, что выигрыш в энергии на единицу объема, получаемый при замене $(-)$ -фазы на $(+)$ -фазу, равен $m^*(T)h$. Напомним, что функционал Φ имеет единственную седловую точку, а именно кривую $\mathbf{m}_{\text{sdl}} = \mathbf{m}_{\text{sdl}}(T, h) = \frac{1}{hm^*(T)}W_\tau$, где $\Phi(\mathbf{m}_{\text{sdl}}) = \frac{1}{2hm^*(T)}\mathcal{W}_\tau(W_\tau)$, см. (3), (5).

Определим *критическое время* $\lambda_c = \lambda_c(T)$ как

$$\frac{\lambda_c}{h} = \frac{1}{3} \frac{\Phi(\mathbf{m}_{\text{sdl}})}{T}. \quad (29)$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $T < T_c$, $h > 0$. Пусть ν – $(-)$ -фаза $\mu_{-,T}$ либо атом $\delta_{\{\sigma=-\}}$. (На самом деле любое ν “между” этими двумя состояниями тоже годится.) Тогда выполняется следующее.

i) Если $0 < \lambda < \lambda_c$, то для любого $n \in \{1, 2, \dots\}$ и любой локальной наблюдаемой f

$$\mathbb{E}(f(\sigma_{T,h;t=\exp\{\lambda/h\}}^\nu)) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j(f)h^j + O(h^n), \quad (30)$$

где

$$b_j(f) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{d^j \langle f \rangle_{-,T,h}}{dh^j}.$$

(Подчеркнем, что в последнем соотношении мы используем поля Гиббса, соответствующие **отрицательным** значениям магнитного поля.) В частности,

$$\mathbb{E}(\sigma_{T,h;t=\exp\{\lambda/h\}}^\nu(0)) = -m^*(T) + O(h). \quad (31)$$

ii) Если $\lambda > \lambda_c$, то для любого конечного положительного C существует конечное положительное C_1 такое, что для каждой локальной наблюдаемой f

$$|\mathbb{E}(f(\sigma_{T,h;t=\exp\{\lambda/h\}}^\nu)) - \langle f \rangle_{T,h}| \leq C_1 \|f\| \exp\left\{-\frac{C}{h}\right\}. \quad (32)$$

Из соотношения (30) следует, что семейство неравновесных состояний $\langle \cdot \rangle_{T,h;\lambda}^\nu$, $h > 0$, определяемых для каждой локальной наблюдаемой f как

$$\langle f \rangle_{T,h;\lambda}^\nu = \mathbb{E}(f(\sigma_{T,h;t=\exp\{\lambda/h\}}^\nu)),$$

является $\mathcal{C}^\infty$ -продолжением кривой $\{\langle \cdot \rangle_{T,h}, h \leq 0\}$ равновесных состояний. Это выполнено для любого $0 < \lambda < \lambda_c$ и любого ν , указанного выше. Состояния $\langle \cdot \rangle_{T,h;\lambda}^\nu$ – это *метастабильные состояния*, которыми мы интересуемся. Соотношения (30), (31) следует понимать в том смысле, что до момента времени $\exp\{\lambda_c/h\}$ наше текущее состояние все еще “жидкое”, а (32) означает, что после момента времени $\exp\{\lambda_c/h\}$ происходит замерзание.

Эта теорема получена в [27]. Поясним скрытую за этой теоремой эвристику. Она имеет две составляющие. Первая состоит в том, что переход в равновесное состояние происходит через образование капель (+)-фазы. Вторая – в том, что как только тепловая флуктуация порождает каплю, размер которой превышает критическое значение, эта капля не умирает, а продолжает расти со скоростью v , имеющей порядок h . (Последнее предположительно верно только в размерности 2.) Посмотрим, как эти две гипотезы могут привести к правильному ответу. Как уже было сказано, чтобы попасть в состояние равновесия, необходимо преодолеть энергетический барьер, который описывается функционалом Φ . Докритические капли постоянно образуются тепловыми флуктуациями в метастабильной фазе, но они стремятся схлопнуться, как это диктуется Φ . С другой стороны, как только в результате большей флуктуации образуется сверхкритическая капля, она будет расти, приводя систему в стабильную фазу. Поскольку минимальная высота барьера равна $\Phi(m_{\text{sd1}})$, можно предсказать, что интенсивность образования критической капли в данной точке должна быть $\exp\left\{-\frac{\Phi(m_{\text{sd1}})}{T}\right\}$.

Сравнивая это с (29), мы видим, что правильный ответ $\exp\left\{-\frac{1}{3} \frac{\Phi(m_{\text{sd1}})}{T}\right\}$ отличается от нашего множителем $1/3$. Причина этого состоит в следующем. Заметим, что мы рассматриваем бесконечную систему, за которой мы наблюдаем с помощью локальной функции f , зависящей от значений спинов на конечном множестве $\text{supp}(f)$. Для нас система придет в равновесие, как только множество $\text{supp}(f)$ будет покрыто большой каплей (+)-фазы, которая спонтанно возникла в каком-то месте и затем росла, как описано выше. Мы хотим оценить, как долго нужно ждать, чтобы вероятность

такого события стала близка к единице. Если предположить, что радиус сверхкритической капли растет со скоростью v , то область пространства-времени, в которой могла появиться капля, покрывающая множество $\text{supp}(f)$ в момент времени t , является, грубо говоря, конусом с вершиной в $\text{supp}(f)$, основание которого состоит из точек с нулевой координатой по времени, находящихся на расстоянии не более tv от $\text{supp}(f)$. Такой конус имеет объем порядка $(vt)^2 t$. Тогда порядок времени релаксации t_{rel} , до истечения которого область $\text{supp}(f)$ не покрыта большой каплей, а после которого скорее всего покрыта, можно получить из уравнения

$$(vt_{\text{rel}})^2 t_{\text{rel}} \exp \left\{ -\frac{\Phi(\mathbf{m}_{\text{sdl}})}{T} \right\} \sim 1.$$

Из него получается почти то, что нужно:

$$t_{\text{rel}} \sim v^{-2/3} \exp \left\{ \frac{1}{3} \frac{\Phi(\mathbf{m}_{\text{sdl}})}{T} \right\}. \quad (33)$$

Если бы мы знали, что $v \sim Ch$, это бы дало

$$t_{\text{rel}} \sim \exp \left\{ \frac{1}{3} \frac{\Phi(\mathbf{m}_{\text{sdl}})}{T} \right\}, \quad (34)$$

так как $\Phi(\mathbf{m}_{\text{sdl}}) \sim \frac{1}{h}$. Гипотеза о том, что $v \sim Ch$, выглядит вполне естественно в нашем контексте, хотя и остается интересным открытым вопросом. К счастью, из соотношения (33) легко увидеть, что для того чтобы получить (34), требуется гораздо меньше. В [27] нам удалось доказать – и этого достаточно для наших целей – следующую более слабую оценку: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C_1 > 0$ такое, что

$$v \geq C_1 \exp \left\{ -\frac{\varepsilon}{h} \right\}.$$

4. Комбинаторика

В этом разделе мы рассмотрим применение результатов раздела 2 к комбинаторике. Мы обсудим типичную форму большой случайной диаграммы Юнга и большого случайного небоскреба (т.е. плоского разбиения). В п. 4.4 мы обсудим знаменитую формулу Мак-Магона и q -ичный аналог формулы крюков.

4.1. Типичные диаграммы Юнга. Разбиением p целого числа N называется набор неотрицательных целых чисел $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq \dots$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N$. Его можно задать последовательностью $\{r_k\}$ целых чисел, где $r_k = l$ тогда и только тогда, когда ровно l элементов разбиения p равны k . Его можно также задать монотонной функцией

$$\phi_p(y) = \sum_{k=\lceil y \rceil}^{\infty} r_k, \quad y > 0. \quad (35)$$

График $G[\phi_p]$ этой функции дает графическое описание разбиения p и называется “*диаграммой Юнга*”. Это же название *диаграмма Юнга* относится к множеству

$Y = \{(y_1, y_2) : \phi_p(y_1) > 0, 0 < y_2 < \phi_p(y_1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Число N единичных клеток в Y называется *объемом* $\text{vol}(Y)$ диаграммы Юнга Y . Множество всевозможных диаграмм Юнга обозначим через $\mathcal{Y}$. Подмножество, состоящее из всех диаграмм объема N , обозначим $\mathcal{Y}_N$.

Аналогично, плоское разбиение S целого числа N – это двумерный массив неотрицательных целых чисел n_{ij} такой, что для любого i выполняется $n_{i1} \geq n_{i2} \geq \dots \geq n_{ik} \geq \dots$ и для любого j выполняется $n_{1j} \geq n_{2j} \geq \dots \geq n_{kj} \geq \dots$, причем снова $\sum_{i,j=1}^{\infty} n_{ij} = N$. Очевидным образом определяется соответствующая функция $\phi_S(y_1, y_2)$, $y_1, y_2 > 0$. Функция $\phi_S(y_1, y_2)$ монотонна по каждой переменной. Назовем ее график $G[\phi_S]$ *небоскребом*. Иногда мы будем называть небоскребом и само разбиение S . Как и ранее, число N называется *объемом* $\text{vol}(S)$ разбиения S . Носитель $\text{supp}(S)$ – это просто носитель функции ϕ_S . Множество всех (конечных) небоскребов обозначим через $\mathcal{S}$, а через $\mathcal{S}_N$ будем обозначать множество небоскребов объема N . Для подмножества $B \subset \mathbb{R}_+^2 = \{(y_1, y_2) : y_1, y_2 > 0\}$, конечного или бесконечного, обозначим через $\mathcal{S}^B \subset \mathcal{S}$ подмножество всех небоскребов с носителем в B .

Многомерные аналоги этих объектов очевидны. Например, можно говорить о пространственных разбиениях (четырёхмерных диаграммах) и т. д.

Можно определить и больше объектов такого рода. Например, можно ввести ограничения на вид ступеней лестницы $G[\phi_p]$: скажем, они должны быть не длиннее, чем 3, а их высота может быть только 1, 2 или 5. Той же свободой мы обладаем и в случае размерности три и выше.

Теперь зафиксируем число N , выберем размерность и тип диаграмм, которые нас интересуют, и рассмотрим соответствующее множество $\mathcal{D}_N$ всех таких диаграмм. Их конечное число, поэтому на $\mathcal{D}_N$ можно задать равномерное распределение. (Здесь, впрочем, опять возможны варианты.) Вопрос теперь таков: как выглядит типичная диаграмма из семейства $\mathcal{D}_N$ при $N \rightarrow \infty$?

Первая задача такого сорта была решена в [35], см. также [33], [34], [13], [26]. Там было обнаружено, что типичная двумерная диаграмма Юнга в описанной статистике, сжатая в $\sqrt{N}$ раз, стремится к кривой $\mathcal{C}_V$, задаваемой уравнением

$$\exp \left\{ -\frac{\pi}{\sqrt{6}}x \right\} + \exp \left\{ -\frac{\pi}{\sqrt{6}}y \right\} = 1. \quad (36)$$

Точнее, для любого $\varepsilon > 0$ вероятность того, что сжатая диаграмма Юнга находится на расстоянии не больше ε от кривой (36), стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$.

Эвристически можно получить (35) (и прочие подобные результаты) так:

i) Пусть $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ – две точки в $\mathbb{Z}^2$, причем $a_1 < b_1$, $a_2 > b_2$. Легко видеть, что число $\#(A, B)$ лестниц, идущих по ребрам решетки, которые начинаются в A , заканчиваются в B и при этом идут только направо или вниз, равно $\binom{(b_1 - a_1) + (a_2 - b_2)}{(b_1 - a_1)}$. Отсюда с использованием формулы Стирлинга получаем

$$\lim_{|B-A| \rightarrow \infty} \frac{1}{|B-A|} \ln \#(A, B) = h(n_{AB}). \quad (37)$$

Здесь $\mathbf{n}_{AB}$ – единичный нормальный вектор для отрезка $[A, B]$, предел $A, B \rightarrow \infty$ берется так, чтобы вектор $\mathbf{n}_{AB}$ не изменялся, и для $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$

$$h(\mathbf{n}) = - \left(n_1 \ln \frac{n_1}{n_1 + n_2} + n_2 \ln \frac{n_2}{n_1 + n_2} \right). \quad (38)$$

ii) Интуитивно ясно, что число диаграмм Юнга площади N , идущих после сжатия в $\sqrt{N}$ раз вдоль монотонной кривой $y = c(x) \geq 0$, интеграл от которой равен единице, приблизительно равно

$$\exp \left\{ \sqrt{N} \int_0^\infty h \left(-\frac{c'(x)}{\sqrt{1 + (c'(x))^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (c'(x))^2}} \right) \sqrt{1 + (c'(x))^2} dx \right\}. \quad (39)$$

iii) В предположении, что рассматриваемая модель имеет при подходящем изменении масштаба некоторое типичное поведение, описываемое хорошей гладкой неслучайной кривой (или поверхностью) $\mathcal{C}$, приходим к выводу, что кривая $\mathcal{C}$ должна максимизировать интеграл в (39).

В общем случае не удастся явно выписать соответствующую плотность энтропии. Единственная информация, доступная в общем случае, – это существование предела типа (37) из соображений субаддитивности. Следует подчеркнуть, что даже если решение вариационной задачи для модели известно, основной трудностью является доказательство того, что в этой модели действительно имеется нетривиальное типичное поведение при подходящем масштабировании.

Описанная программа реализована в [33], [34] (см. также [13]) для вышеуказанного двумерного случая и еще для некоторых случаев. В [5] изучался класс более общих двумерных задач. Первая трехмерная задача была успешно решена в [12]. Методами последней работы можно решить и задачу о небоскребах, см. [20], [10].

Одним из следствий этих результатов является то, что асимптотическую форму для различных случайных комбинаторных объектов, введенных выше, можно получить с помощью конструкции, описанной в п. 2.4 настоящей работы для соответствующей функции η . Например, для диаграмм Юнга получается следующее

СЛЕДСТВИЕ 9. *В обозначениях теоремы 4 кривая $\mathcal{C}_V$, заданная формулой (36), совпадает с кривой V_η , получаемой применением конструкции (14), (15), (17) к функции $\eta(\mathbf{n}) = h(\mathbf{n})$, заданной формулами (37), (38).*

Разумеется, это утверждение легко проверяется непосредственно.

В нашей беседе в мае 2000 г. профессор Эллиот Либ предположил, что используя соотношение (39), можно воспроизвести некоторые результаты Харди–Рамануджана–Радемахера о поведении функции $|\mathcal{Y}_N|$, т.е. о числе разбиений целого числа N . А именно, в главном члене по N эта функция должна быть равна

$$\exp \{ \sqrt{N} \mathcal{V}_h(\mathcal{C}_V) \},$$

где h задано формулами (37), (38), а функционал $\mathcal{V}_h$ определен в (11). Интеграл $\mathcal{V}_h(\mathcal{C}_V)$ на самом деле легко вычисляется с использованием нашей теоремы 4. Действительно, в обозначениях этой теоремы получаем

$$\mathcal{C}_V = \sqrt{\frac{2}{\mathcal{V}_h(G_h)}} G_h. \quad (40)$$

Поэтому

$$\mathcal{V}_h(\mathcal{C}_V) = \sqrt{2\mathcal{V}_h(G_h)}. \quad (41)$$

С другой стороны, непосредственным вычислением получаем, что кривая $\mathcal{C}_V$ пересекается с прямой $\{x = y\}$ в точке $\left(\frac{\sqrt{6}\ln 2}{\pi}, \frac{\sqrt{6}\ln 2}{\pi}\right)$, в то время как кривая G_h пересекает эту прямую в точке $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = (\ln 2, \ln 2)$. Следовательно,

$$\mathcal{C}_V = \frac{\sqrt{6}}{\pi}G_h. \quad (42)$$

Сравнивая (42) и (40), получаем, что $\sqrt{2/\mathcal{V}_h(G_h)} = \sqrt{6}/\pi$, поэтому ввиду (41) имеем

$$\mathcal{V}_h(\mathcal{C}_V) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Для сравнения, результат Харди–Рамануджана–Радемахера гласит, что

$$|\mathcal{Y}_N| \sim \frac{1}{4N\sqrt{3}} \exp\left\{\pi\sqrt{\frac{2N}{3}}\right\},$$

см., например, [3].

Аналогичное вычисление для асимптотического поведения числа $|\mathcal{S}_N|$ планарных разбиений целого числа N проведено в следующем пункте.

4.2. Грани небоскребов и асимптотическое число небоскребов. В этом пункте мы рассмотрим задачу о типичной форме случайного небоскреба, описанную в предыдущем пункте. Как уже объяснялось, эта форма $\mathfrak{S}$ является (неслучайной) вогнутой поверхностью в $\mathbb{R}_+^3$, которая задается двойственной конструкцией Вульфа из п. 2.4. (Подробности об этой и других асимптотических формах см. в [20] и в особенности в [12].)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Поверхность $\mathfrak{S}$ имеет три одинаковых плоских участка (границ); они лежат в трех квадрантах $(\mathbb{R}_+^2)_i$, $i = 1, 2, 3$, образующих границу $\partial\mathbb{R}_+^3$. При этом плоские кривые $\partial(\mathfrak{S} \cap (\mathbb{R}_+^2)_i) \subset \mathbb{R}^2$ в точности являются кривыми Вершика $\mathcal{C}_V$ (36), приведенными к подходящему масштабу.*

В самом деле, пусть $\eta(\cdot)$ обозначает соответствующую плотность энтропии, заданную на $\Delta^2 = S^2 \cap \mathbb{R}_+^3$. Она определяется следующим образом (ср. с (37)).

Для $\mathbf{n} \in \Delta^2$ рассмотрим плоскость $L_{\mathbf{n}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, (\mathbf{x}, \mathbf{n}) = 0\}$. Пусть $\Sigma_{\mathbf{n}}$ – семейство всех поверхностей Q в $\mathbb{R}^3$, обладающих следующими свойствами:

- i) каждая поверхность Q составлена из единичных замкнутых двумерных клеток (квадратов) решетки $\mathbb{Z}^3$,
- ii) ортогональная проекция поверхности Q на $L_{\mathbf{n}}$ является гомеоморфизмом.

Обозначим через $Q_{\mathbf{n}}$ (любую) поверхность из $\Sigma_{\mathbf{n}}$, на которой достигается минимум расстояния $\text{dist}(Q, L_{\mathbf{n}})$. Теперь введем величину $\#(B_R, Q_{\mathbf{n}})$, равную числу поверхностей в $\Sigma_{\mathbf{n}}$, совпадающих с $Q_{\mathbf{n}}$ вне шара B_R радиуса R с центром в начале координат, и определим $\eta(\cdot)$ как

$$\eta(n) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln(\#(B_R, Q_{\mathbf{n}}))}{\pi R^2}.$$

Мы утверждаем теперь, что производная $\eta'(\nu)$ функции $\eta(\cdot)$ в точке $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ по направлению $\nu \in \mathbb{R}_+^2$, касательному к $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, есть не что иное, как $h(\nu)$, см. (37). После этого утверждение о форме граней поверхности $\mathfrak{S}$ получается применением нашей двойственной конструкции Вульфа, см. (20).

Чтобы убедиться, что $\eta'(\nu) = h(\nu)$, зададим вектор $\mathbf{n}_{\theta} \in \Delta^2$ двумя условиями: $\mathbf{n}_{\theta} = a\mathbf{e}_z + b\nu$ для некоторых действительных a, b ; и $(\mathbf{n}_{\theta}, \mathbf{e}_z) = \cos \theta$. Другими словами, вектор $\mathbf{n}_{\theta}$ ведет из $\mathbf{e}_z$ в направлении ν на расстояние θ . Поскольку $\eta(\mathbf{e}_z) = 0$, то $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\eta(\mathbf{n}_{\theta})/\theta) \equiv \eta'(\nu)$.

Пусть θ мало. Тогда поверхность $Q_{\mathbf{n}}$, если смотреть на нее со стороны оси z , состоит из набора периодических лестниц $\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots$, причем расстояние между двумя последовательными лестницами имеет порядок $(\sin \theta)^{-1}$. Если поверхность Q дает вклад в $\#(B_R, Q_{\mathbf{n}})$, то ее тоже можно представить набором лестниц $\dots, s'_{-1}, s'_0, s'_1, \dots$ со следующими свойствами:

- i) лишь конечное число лестниц s'_i отличается от соответствующих s_i ;
- ii) каждая лестница s'_i совпадает с соответствующей ей лестницей s_i вне B_R ;
- iii) две различные s'_i могут касаться и иметь общие ребра, но не могут пересекаться.

Если убрать третье условие, лестницы становятся независимыми, откуда немедленно следует оценка сверху:

$$\eta'(\nu) \leq h(\nu).$$

Чтобы получить противоположное неравенство, введем видоизмененные функции $h_{\varepsilon}(\cdot)$, которые определяются аналогично функции $h(\cdot)$ (см. (37)) с дополнительным ограничением, что лестницам разрешается отстоять от отрезка $[A, B]$ не более чем на $\varepsilon^{-1}/2$. Теперь рассмотрим набор лестниц $\dots, s'_{-1}, s'_0, s'_1, \dots$, удовлетворяющих тем же свойствам i), ii) и свойству

- iii') каждая лестница s'_i может отстоять от соответствующей ей лестницы s_i не более чем на $(\sin \theta)^{-1}/2$.

Ясно, что каждый такой набор определяет поверхность $Q(\dots, s'_{-1}, s'_0, s'_1, \dots)$, которая вносит вклад в $\#(B_R, Q_{\mathbf{n}})$. Отсюда немедленно следует, что для каждого $\theta > 0$

$$h_{\sin \theta}(\nu) \leq \eta'(\nu).$$

Так как $h_{\sin \theta}(\nu) \nearrow h(\nu)$ при $\theta \rightarrow 0$ (см., например, [24]), это доказывает равенство $\eta'(\nu) = h(\nu)$.

В недавней работе [10] Кеньон и Серф получили новые сведения о поверхности $\mathcal{C}$. Оказывается, что соответствующая функция η задается формулой

$$\eta(n) = |n|_1 \text{ent}(n),$$

где $|\mathbf{n}|_1 = |\mathbf{n}_1| + |\mathbf{n}_2| + |\mathbf{n}_3|$,

$$\text{ent}(\mathbf{n}) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^3 L\left(\pi \frac{|\mathbf{n}_i|}{|\mathbf{n}|_1}\right),$$

а L – функция Лобачевского на отрезке $[0, \pi]$, равная

$$L(x) = - \int_0^x \ln(2 \sin t) dt.$$

Поверхность G_η в $\mathbb{R}^3$ есть

$$G_\eta = \{(f(A, B, C) - \ln A, f(A, B, C) - \ln B, f(A, B, C) - \ln C) \mid A, B, C > 0\},$$

где для $A, B, C > 0$

$$f(A, B, C) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0, 2\pi]} \int_{[0, 2\pi]} \ln(A + Be^{iu} + Ce^{iv}) du dv.$$

Кроме того,

$$\text{vol}(G_\eta) = \frac{\zeta(3)}{4},$$

так что поверхность $\mathcal{C}$ состоит из трех граней, описанных выше, и “криволинейной” части $(\zeta(3)/4)^{-1/3} G_\eta$. Используя эту информацию, можно найти число трехмерных диаграмм Юнга объема N . Действительно, из (16) и (17) имеем

$$v_\eta = \mathcal{V}_\eta(V_\eta) = 3 \left(\frac{\zeta(3)}{4} \right)^{1/3},$$

поэтому число планарных разбиений целого числа N в главном члене по N равно

$$|\mathcal{S}_N| \sim \exp\{v_\eta N^{2/3}\} = \exp\left\{3 \left(\frac{\zeta(3)}{4} \right)^{1/3} N^{2/3}\right\}.$$

Этот результат согласуется с более точным выражением, полученным Райтом в [36]:

$$|\mathcal{S}_N| \sim (\zeta(3)2^{-11})^{1/36} N^{-25/36} \exp\left\{3 \left(\frac{\zeta(3)}{4} \right)^{1/3} N^{2/3} + 2C\right\},$$

где

$$C = \int_0^\infty \frac{y \ln y dy}{e^{2\pi y} - 1}.$$

Из приведенных соотношений, конечно, можно вывести и информацию о форме граний поверхности $\mathcal{C}$, см. [10].

4.3. Представление в независимых переменных и некоторые производящие функции. В этом пункте мы опишем один технический прием, который можно использовать для доказательства некоторых из упомянутых выше комбинаторных утверждений.

Назовем (планарное) разбиение *строгим*, если все элементы (двумерного) массива различны. Всюду ниже мы обозначаем через $\pi_2(N)$ ($\pi_2^s(N)$) число различных (строгих) разбиений целого числа N , а через $\pi_3(N)$ ($\pi_3^s(N)$) – число (строгих) планарных разбиений N .

Нетрудно видеть, что производящая функция $\mathfrak{g}_2(x)$ последовательности $\{\pi_2(i), i = 1, 2, \dots, N, \dots\}$ задается равенством

$$\mathfrak{g}_2(x) = \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^l}. \quad (43)$$

В самом деле, разлагая в ряд каждый сомножитель в (43), получаем

$$\mathfrak{g}_2(x) = \sum_{r_1, r_2, r_3, \dots} x^{r_1} x^{2r_2} x^{3r_3} \dots,$$

где суммирование ведется по всем бесконечным последовательностям $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ неотрицательных чисел, имеющим конечное число ненулевых элементов. Каждая такая последовательность определяет согласно (35) диаграмму Юнга. Аналогично, производящая функция последовательности $\pi^s(N)$ есть

$$\mathfrak{g}_2^s(x) = \prod_{l=1}^{\infty} (1+x^l).$$

С точки зрения статистической механики выражение (43) – не что иное, как *функция разбиения большого канонического ансамбля* одномерной системы невзаимодействующих частиц ζ_l , $l = 1, 2, \dots$, где $\zeta_l = 0, 1, 2, \dots$. Частицы ζ_l неодинаковы; статистический вес l -й частицы, находящейся в состоянии k , равен $(x^l)^k$. Параметр x здесь играет роль химического потенциала. Припишем каждой частице ζ_l объем $v(\zeta_l)$, так что когда частица находится в состоянии k , ее объем равен lk . Тогда статистический вес $w_x(\zeta)$ конфигурации $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ есть

$$w_x(\zeta) = x^{v(\zeta_1)+v(\zeta_2)+v(\zeta_3)+\dots}. \quad (44)$$

Отсутствие взаимодействия частиц выражено в том, что степень в (44) не содержит перекрестных членов. Произведение $(\mathfrak{g}_2(x))^{-1} w_x(\zeta)$ определяет вероятностное распределение на конфигурациях ζ . На языке статистической механики это называется *большим каноническим ансамблем*.

Заметим теперь, что если $x < 1$, то распределение (44) сосредоточено на конфигурациях ζ с конечным общим объемом $\text{vol}(\zeta) = v(\zeta_1) + v(\zeta_2) + v(\zeta_3) + \dots$. Это означает, что лишь конечное число значений $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ могут быть ненулевыми. Заметим также, что по любой такой конфигурации ζ можно построить диаграмму Юнга $Y(\zeta)$ следующим образом: сначала сложим ζ_1 блоков 1×1 в горизонтальный ряд, затем

следом за ними положим ζ_2 блоков 1×2 (здесь 2 – высота блока), потом ζ_3 блоков 1×3 , и т. д., пока не используем все ненулевые элементы конфигурации ζ . Если мы складываем эти блоки справа налево, получается настоящая диаграмма Юнга $Y(\zeta)$. Таким образом, (нормализованное) распределение (44) задает при каждом x вероятностное распределение P_x на $\mathcal{Y} = \{Y\}$.

С каждым *большим каноническим ансамблем* можно связать *канонический ансамбль*, который в нашем случае является условным распределением $P_x(\cdot \mid \text{vol}(\cdot) = N)$ на $\mathcal{Y}$. Он получается из P_x ограничением на подмножество $\mathcal{Y}_N = \{Y \subset \mathcal{Y} : \text{vol}(Y) = N\}$ и нормализацией до вероятностного распределения. Решающим наблюдением теперь является тот факт, что распределение канонического ансамбля $P_x(\cdot \mid \text{vol}(\cdot) = N)$ не зависит от x и, более того, является равномерным распределением на $\mathcal{Y}_N$. Это очевидно из (44). Поэтому вопрос о поведении типичной диаграммы, заданный в п. 4.1, – это вопрос о свойствах определенного канонического ансамбля.

Именно в этот момент язык статистической механики приносит свои плоды. В статистическом фольклоре наш вопрос сразу узнаваем как стандартный, для ответа на который есть стандартное средство: принцип эквивалентности ансамблей! Этот общий принцип в нашем случае утверждает, грубо говоря, что свойства типичной диаграммы Юнга одинаковы в ансамблях $P_x(\cdot \mid \text{vol}(\cdot) = N)$ и в ансамблях P_x . Более точно, типичные свойства диаграмм Юнга, распределенных в соответствии с $P_x(\cdot \mid \text{vol}(\cdot) = N)$ асимптотически при $N \rightarrow \infty$ такие же, как свойства диаграмм Юнга с распределением $P_{x(N)}$, где $x(N)$ удовлетворяет уравнению

$$E_{P_{x(N)}}(\text{vol}(Y)) = N.$$

Другими словами, значение $x(N)$ должно быть таким, чтобы среднее значение случайной величины $\text{vol}(Y)$ при распределении $P_{x(N)}$ было таким же, как (неслучайное) значение $\text{vol}(Y)$ при распределении $P_x(\cdot \mid \text{vol}(\cdot) = N)$, т.е. N . Преимущества перехода к $P_{x(N)}$ очевидны: случайные величины ζ_l независимы относительно P_x для любого x . За это, конечно, приходится платить: вначале нужно доказать, что эквивалентность ансамблей действительно имеет место. Но это стандартная задача, хотя иногда и трудная. Именно такой подход применяется в [13]. То же самое можно сделать и для случая строгих разбиений, опять же см. [13]; в итоге получается множество невзаимодействующих частиц ζ_l , принимающих только значения 0 или 1. Более общие случаи можно разбирать, разрешая частицам ζ_l локально взаимодействовать, см. [5].

4.4. Дальнейшие производящие функции и формула Мак-Магона.

Изложенное в предыдущем пункте вызывает желание повторить эту программу для планарных разбиений. Производящая функция $g_3(x)$ последовательности $\pi_3(N)$ известна. Она дается знаменитой формулой Мак-Магона, приведенной ниже, (54). Прежде чем приступить к ее обсуждению, сделаем несколько подготовительных замечаний.

Пусть S – некоторое планарное разбиение числа N , или небоскреба. Определим разбиение

$$p = \Pi(S) \tag{45}$$

числа N (т.е. диаграмму Юнга), последовательно выписывая все элементы двумерного массива S в порядке невозрастания. Можно попытаться рассмотреть и обратное

отображение, которое каждому разбиению p числа N ставит в соответствие его прообраз $\Pi^{-1}(p)$, в надежде получить таким образом способ подсчета планарных разбиений. Трудность состоит в том, что прообразы $\Pi^{-1}(p_1)$, $\Pi^{-1}(p_2)$ могут содержать различное число плоских разбиений, даже когда p_1, p_2 – разбиения числа N с одинаковым числом слагаемых. Причина этого в том, что разбиения p_i могут содержать повторяющиеся целые числа, и чем их меньше, тем прообраз больше; самые большие прообразы имеют строгие разбиения.

Тем не менее мы хотим реализовать эту идею подсчета небоскребов путем подсчета диаграмм Юнга. Для этого введем подкласс планарных разбиений, которые будем называть *пьедесталами*. Чтобы их определить, вначале следует зафиксировать полное упорядочение $(i_1, j_1) \succ (i_2, j_2) \succ \dots \succ (i_k, j_k) \succ \dots$ на множестве $\mathbb{Z}_+^2 = \{(i, j) : i, j > 0\}$. Выбор упорядочения несущественен, важно только, чтобы оно происходило из некоторого строгого планарного разбиения. Точнее, упорядочение $(i_1, j_1) \succ (i_2, j_2) \succ \dots \succ (i_k, j_k) \succ \dots$ назовем разрешенным, если выполнено следующее: для любого целого k набор чисел

$$n_{(i_l, j_l)} = \begin{cases} k - l, & \text{если } k \geq l, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

является планарным разбиением (соответствующего целого числа). В частности, первым узлом (i_1, j_1) в любом разрешенном упорядочении должен быть узел $(1, 1)$. Выберем в качестве $\succ$ любое разрешенное упорядочение; в дальнейшем оно будет фиксированным.

Пусть теперь S – некоторый небоскреб. Используя упорядочение $\succ$, можно определить другое, $\succ_S$, следующим образом:

$$(i', j') \succ_S (i'', j'') \iff \begin{cases} n_{i'j'} > n_{i''j''}, & \text{или} \\ n_{i'j'} = n_{i''j''}, & \text{но } (i', j') \succ (i'', j''). \end{cases}$$

Ясно, что различные небоскребы S' и S'' могут давать одно и то же упорядочение $(\succ_{S'}) = (\succ_{S''})$. В этом случае мы называем их эквивалентными, $S' \sim S''$.

Обозначим через $\mathcal{O}$ множество всех упорядочений, которые задаются небоскребами: $\mathcal{O} = \{\succ_S, S \in \mathcal{S}\}$.

Небоскреб $\mathfrak{P}$ назовем *пьедесталом*, если любой небоскреб $S \sim \mathfrak{P}$ выше, чем $\mathfrak{P}$. Это означает, что если $S = \{n_{ij}\}$, а $\mathfrak{P} = \{\tilde{n}_{ij}\}$, то $n_{ij} \geq \tilde{n}_{ij}$ для любой точки (i, j) . В этом случае будем писать $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\succ_S) = \mathfrak{P}(S)$ и называть $\mathfrak{P}$ пьедесталом небоскреба S .

Более прямым определением пьедестала, из которого следует и его существование, является следующее: пусть $\succsim$ – некоторое разрешенное упорядочение, совпадающее с $\succ$ на бесконечности; другими словами, $\succsim \in \mathcal{O}$. Пьедестал $\mathfrak{P}(\succsim) = \{\tilde{n}_{ij}\}$ определяется следующим образом:

- i) для любых двух узлов $(i', j') \succsim (i'', j'') \in \mathbb{Z}_+^2$ таких, что пара (i', j') непосредственно предшествует паре (i'', j'') в упорядочении $\succsim$, имеем

$$\tilde{n}_{i'j'} = \begin{cases} \tilde{n}_{i''j''}, & \text{если } (i', j') \succ (i'', j''), \\ \tilde{n}_{i''j''} + 1, & \text{если } (i', j') \prec (i'', j''); \end{cases}$$

- ii) небоскреб $\mathfrak{P}(\succsim)$ имеет нулевую высоту на бесконечности.

Другими словами, высота небоскреба $\mathfrak{P}(\succsim)$ в узле (i, j) равна тому, сколько раз упорядочение $\succsim$ будет отличаться от $\succ$, если идти от (i, j) на бесконечность в порядке $\succsim$. (По определению, это число конечно.)

Множество всевозможных пьедесталов $\mathfrak{P}$ обозначим через $\mathcal{P}$. Заметим, что отображение $\mathfrak{P} \rightsquigarrow \succ \mathfrak{P}$ по построению устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{O}$.

Теперь мы можем определить биективное отображение

$$b_{\text{St}}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{Y}. \quad (46)$$

А именно, небоскребу S поставим в соответствие пару $(\mathfrak{P}, Y)$, где $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(S)$ – пьедестал небоскреба S , а

$$Y = p(S - \mathfrak{P}(S)),$$

см. (45). Здесь S и $\mathfrak{P}(S)$ рассматриваются как функции с действительными значениями и $S - \mathfrak{P}(S)$ – это просто их разность. По определению $S - \mathfrak{P}(S)$ снова является небоскребом, поэтому выписывая его элементы в порядке убывания, получаем диаграмму Юнга Y .

Обратное отображение $(b_{\text{St}})^{-1}: \mathcal{P} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}$ устроено следующим образом. Любому упорядочению $\succsim \in \mathcal{O}$ и любому разбиению $p = \{n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq \dots\}$ вначале поставим в соответствие вспомогательный небоскреб $S(\succsim, p)$, *расставляя p вдоль $\succsim$* . Точнее, определим $S(\succsim, p)$ как планарное разбиение, равное n_k в узле $(i, j) \in \mathbb{Z}_+^2$, идущем k -м в соответствии с упорядочением $\succsim$. Теперь определим

$$(b_{\text{St}})^{-1}(\mathfrak{P}, p) = \mathfrak{P} + S(\succ \mathfrak{P}, p).$$

Биекция (46) и ее дальнейшее обобщение (51) на самом деле очень близки к биекции Стенли [30], что объясняет наше обозначение.

Заметим, что если $b_{\text{St}}(S) = (\mathfrak{P}, Y)$, то по построению $\text{vol}(S) = \text{vol}(\mathfrak{P}) + \text{vol}(Y)$. Поэтому производящая функция $\mathfrak{g}_3(x)$ для небоскребов есть произведение:

$$\mathfrak{g}_3(x) = \mathfrak{g}_2(x) \times \mathfrak{g}_{\mathcal{P}}(x). \quad (47)$$

Здесь $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ – производящая функция для пьедесталов: число a_k равняется числу пьедесталов объема k .

Отметим, что все сказанное выше о множестве $\mathcal{S}$ небоскребов, построенных на $\mathbb{Z}_+^2$, можно дословно повторить и для подсемейства $\mathcal{S}^B$ небоскребов с дополнительным ограничением, что их носители принадлежат некоторому фиксированному конечному множеству $B \subset \mathbb{Z}_+^2$. (Единственное место, где нужна осторожность, – это выбор упорядочения $\succ$: требуется, чтобы в соответствии с ним каждая точка множества B предшествовала каждой точке из $\mathbb{Z}_+^2 \setminus B$. Это накладывает ограничение на форму множества B : оно должно иметь форму диаграммы Юнга.) Их производящие функции будем обозначать $\mathfrak{g}_3^B(x)$. Соответствующее множество всех упорядочений $\mathcal{O}^B$ будет являться подмножеством множества $\mathcal{O}$, а множество соответствующих пьедесталов $\mathcal{P}^B$ будет удовлетворять соотношению $\mathcal{P}^B = \mathcal{P} \cap \mathcal{S}^B$. Наконец, обобщением биекции b_{St} будет

$$b_{\text{St}}^B: \mathcal{S}^B \rightarrow \mathcal{P}^B \times \mathcal{Y}^{|B|}, \quad (48)$$

где $\mathcal{Y}^{|B|}$ – множество всех разбиений, имеющих не более $|B|$ ненулевых элементов. Обозначив через $\mathfrak{g}_2^{|B|}(x)$ производящую функцию множества разбиений из $\mathcal{Y}^{|B|}$, имеем

$$\mathfrak{g}_2^{|B|}(x) = \prod_{l=1}^{|B|} \frac{1}{1-x^l}. \quad (49)$$

Соотношение (47) принимает вид

$$\mathfrak{g}_3^B(x) = \mathfrak{g}_2^{|B|}(x) \times \mathfrak{g}_{\mathcal{P}^B}(x). \quad (50)$$

Заметим, что для конечного B множество пьедесталов $\mathcal{P}^B$ тоже конечно, поэтому функция $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}^B}(x)$ – это многочлен.

Следующее обобщение, которое нам понадобится, – это небоскребы $\phi_S(y_1, y_2)$, определенные не всюду на $\mathbb{Z}_+^2$. Это означает, что мы фиксируем конечное подмножество $A \subset \mathbb{Z}_+^2$ и рассматриваем функции $\phi_S(y_1, y_2)$ на $\mathbb{Z}_+^2 \setminus A$, обладающие всеми свойствами функций небоскребов. В этом новом контексте также можно определить все объекты из предыдущего абзаца. (Снова от упорядочения $\succ$ требуется, чтобы в соответствии с ним каждая точка из A предшествовала каждой точке из $\mathbb{Z}_+^2 \setminus A$. Отсюда A с необходимостью должно иметь форму диаграммы Юнга.)

Наконец, сведем обе конструкции воедино, рассматривая пару диаграмм Юнга $A \subset B \subset \mathbb{Z}_+^2$ и соответствующее множество $\mathcal{S}^{AB}$ небоскребов, определенных на $\mathbb{Z}_+^2 \setminus A$ и равных нулю вне B . Упорядочение $\succ$ должно быть таким, чтобы каждая точка из A предшествовала каждой точке из $B \setminus A$, а каждая точка из B предшествовала каждой точке из $\mathbb{Z}_+^2 \setminus B$. Обозначим производящую функцию для $\mathcal{S}^{AB}$ через $\mathfrak{g}_3^{AB}(x)$; мы также имеем упорядочения $\mathcal{O}^{AB}$, пьедесталы $\mathcal{P}^{AB}$ и биекцию

$$b_{\text{St}}^{AB}: \mathcal{S}^{AB} \rightarrow \mathcal{P}^{AB} \times \mathcal{Y}^{|B \setminus A|}. \quad (51)$$

Дальнейшим обобщением формулы (47), таким образом, будет

$$\mathfrak{g}_3^{AB}(x) = \mathfrak{g}_{\mathcal{P}^{AB}}(x) \prod_{l=1}^{|B \setminus A|} \frac{1}{1-x^l}, \quad (52)$$

где производящая функция $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}^{AB}}(x)$ – снова многочлен.

Для функции $\mathfrak{g}_3^{AB}(x)$ есть другое замечательное выражение, но *только в случае*, когда диаграмма B – прямоугольник, $B = m \times n$. Если $A = \emptyset$, то это знаменитая формула Мак-Магона:

$$\mathfrak{g}_3^{m \times n}(x) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \frac{1}{1-x^{i+j-1}}, \quad (53)$$

которая верна и для $B = \mathbb{Z}_+^2$:

$$\mathfrak{g}_3(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{i+j-1}}. \quad (54)$$

Для общей диаграммы $A \subset B$ формула (53) обобщается следующим образом:

$$\mathfrak{g}_3^{AB}(x) = \prod_{b \in B \setminus A} \frac{1}{1 - x^{h(b)}}. \quad (55)$$

Здесь произведение берется по всем $|B \setminus A|$ клеткам диаграммы $B \setminus A$, а $h(b)$ – длина крюка для клетки b , т.е. число клеток диаграммы $B \setminus A$, находящихся под b в том же столбце, плюс число клеток слева от b в том же ряду, плюс 1. Соотношение (55) можно найти в [16].

Сравнивая выражения (55) и (52), мы видим, что имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Многочлен $\mathfrak{g}_{\mathcal{P}AB}(x)$ удовлетворяет равенству*

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{P}AB}(x) = \frac{\prod_{l=1}^{|B \setminus A|} (1 - x^l)}{\prod_{b \in B \setminus A} (1 - x^{h(b)})}. \quad (56)$$

В частности, для прямоугольника имеем

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{P}^{m \times n}}(x) = \frac{\prod_{l=1}^{mn} (1 - x^l)}{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (1 - x^{i+j-1})}. \quad (57)$$

То, что в формулах (56) и (57) все сокращается и рациональные функции в правых частях на самом деле являются многочленами, выглядит довольно удивительным!

В пределе при $x \rightarrow 1$ получаем

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{P}AB}(1) = \frac{(|B \setminus A|)!}{\prod_{b \in B \setminus A} h(b)}.$$

Это знаменитая формула крюков для размерности неприводимого представления симметрической группы из $|B \setminus A|$ элементов, соответствующего диаграмме $B \setminus A$. Соотношение (56) – ее q -аналог. Оно доказано в [21], [22], хотя было известно и ранее. Наше доказательство, использующее (52) и (55), видимо, самое простое из известных.

Теперь обсудим многомерный случай. Рассмотрим функцию $\mathfrak{g}_4^{m \times n \times k}(x)$, являющуюся производящей функцией для пространственных разбиений, т.е. трехмерных массивов с очевидными ограничениями на убывание. Мак-Магон одно время предполагал, что аналогично (49), (57) имеет место равенство

$$\mathfrak{g}_4^{m \times n \times k}(x) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n \prod_{l=1}^k \frac{1}{1 - x^{i+j+l-2}}.$$

В дальнейшем он начал сомневаться в этом, и в конце концов оказалось, что эта формула неверна, см. [3]. Однако многомерные аналоги биекций (46), (51), а также разложения (50) всегда верны. Например, для параллелепипедов $2 \times 2 \times 2$ и $2 \times 2 \times 3$ имеем

$$\mathfrak{g}_4^{2 \times 2 \times 2}(x) = \frac{\mathfrak{g}_{\mathcal{P}^{2 \times 2 \times 2}}(x)}{\prod_{l=1}^8 (1 - x^l)} \quad (58)$$

и

$$\mathfrak{g}_4^{2 \times 2 \times 3}(x) = \frac{\mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 3}}(x)}{\prod_{l=1}^{12} (1 - x^l)}, \quad (59)$$

где многочлены $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 2}}(x)$ и $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 3}}(x)$ таковы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 2}}(x) &= 1 + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 4x^7 + 8x^8 \\ &\quad + 4x^9 + 5x^{10} + 3x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + 2x^{14} + x^{16}, \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 3}}(x) &= 1 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 12x^6 + 14x^7 \\ &\quad + 25x^8 + 29x^9 + 41x^{10} + 46x^{11} + 60x^{12} + 68x^{13} + 86x^{14} \\ &\quad + 96x^{15} + 117x^{16} + 123x^{17} + 141x^{18} + 137x^{19} + 144x^{20} \\ &\quad + 140x^{21} + 144x^{22} + 137x^{23} + 141x^{24} + 123x^{25} + 117x^{26} \\ &\quad + 96x^{27} + 86x^{28} + 68x^{29} + 60x^{30} + 46x^{31} + 41x^{32} + 29x^{33} \\ &\quad + 25x^{34} + 14x^{35} + 12x^{36} + 6x^{37} + 5x^{38} + 3x^{39} + 2x^{40} + x^{42}, \end{aligned}$$

что можно подсчитать непосредственно. (На самом деле, многочлены $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 2}}(x)$ и $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 3}}(x)$ были вычислены совместно с Олегом Огиевецким с использованием пакета МАТНЕМАТИСА.)

Теперь можно убедиться, что многочлен $\prod_{l=1}^8 (1 - x^l)$ не делится на $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 2}}(x)$, а многочлен $\prod_{l=1}^{12} (1 - x^l)$ на $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}^{2 \times 2 \times 3}}(x)$. Это показывает, что в некотором смысле многомерных аналогов формулы Мак-Магона не существует. Однако используя (58), (59), мы тем не менее можем выписать соответствующие производящие функции. Так, например,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_4^{2 \times 2 \times 2}(x) &= 1 + x + 4x^2 + 7x^3 + 14x^4 + 23x^5 \\ &\quad + 41x^6 + 63x^7 + 104x^8 + 152x^9 + 230x^{10} + \dots, \\ \mathfrak{g}_4^{2 \times 2 \times 3}(x) &= 1 + x + 4x^2 + 8x^3 + 17x^4 + 30x^5 + 58x^6 + 97x^7 \\ &\quad + 171x^8 + 276x^9 + 450x^{10} + \dots. \end{aligned}$$

4.5. Представление в независимых величинах для небоскребов. Теперь, используя формулу Мак-Магона

$$\mathfrak{g}_3(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{i+j-1}},$$

можно попытаться получить представление в независимых величинах для небоскребов. Следуя подходу п. 4.3, введем ансамбль невзаимодействующих частиц $\zeta_{ij} = 0, 1, 2, \dots$, занумерованных парами $i, j \geq 1$. Как и ранее, частицы ζ_{ij} не одинаковы; статистический вес частицы в узле (i, j) , находящейся в состоянии k , равен $(x^{i+j-1})^k$. Объем $v(\zeta_{ij})$, связанный с частицей ζ_{ij} , находящейся в состоянии k , равен $(i + j - 1)k$. Вес конфигурации ζ частиц ζ_{ij} дается той же формулой (44).

Продолжая аналогию с п. 4.3, с каждой конфигурацией ζ следует связать набор пространственных крюков: если частица ζ_{ij} находится в состоянии k , надо взять k крюков объема $(i + j - 1)$. Каждый такой крюк составлен из $(i + j - 1)$ единичных

кубиков; можно представлять себе, что крюк имеет вершину в узле (i, j) и идет вниз и влево до пересечения с координатными осями. Теперь соблазнительно попробовать построить из каждого такого набора крюков небоскреб, так чтобы разные наборы крюков превращались в разные небоскребы. Похоже, однако, что это невозможно. Но более сложная конструкция осуществима. А именно, перед тем как строить небоскреб из данного набора крюков, нужно распилить каждый крюк на две части вдоль его биссекторной плоскости. Таким образом, мы получим вдвое больше блоков (полуполого объема), чем было крюков. Оказывается, что эти блоки можно расположить в пространстве, используя только сдвиги, таким образом, что в результате получится небоскреб, и полученное соответствие будет взаимно однозначным. Это построение — специальный случай соответствия Робинсона–Шенстеда–Кнута, см. [23] или [4]. Это построение далеко не очевидное, и здесь мы не будем его воспроизводить.

5. Заключение

В этой работе мы описали явную геометрическую конструкцию, которая предсказывает асимптотическую форму некоторых стат-механических и комбинаторных объектов. Следует отметить, что представленный метод должен работать в комбинаторике всегда, когда соответствующая вероятностная мера имеет свойство локальности. Это означает, что удаленные части рассматриваемого комбинаторного объекта слабо зависимы. Свойство локальности является на самом деле ключевой особенностью, стоящей за результатами, полученными в цитируемых работах. Оно имеет место и в соответствующих задачах статистической механики, таких как обоснование конструкции Вульфа, и также является в них решающим.

Хочу поблагодарить коллег, с которыми я обсуждал различные задачи, вошедшие в этот обзор, в частности, А. Дембо, Р. Кеньона, Р. Котецкого, О. Огиевского, Г. Олшанского, А. Вершика и О. Зейтуни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Alexander. Stability of the Wulff minimum and fluctuations in shape for large clusters in two-dimensional percolation // *Probab. Theory Related Fields*. 1992. V. 91. P. 507–532.
- [2] K. Alexander, J. L. Chayes, L. Chayes. The Wulff construction and the asymptotic of the finite cluster distribution for the two-dimensional Bernoulli percolation // *Comm. Math. Phys.* 1990. V. 131. P. 1–50.
- [3] G. E. Andrews. *The Theory of Partitions*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1976. (Encyclopedia Math. Appl. V. 2.)
- [4] E. A. Bender, D. E. Knuth. Enumeration of plane partitions // *J. Combin. Theory Ser. A*. 1972. V. 13. P. 40–54.
- [5] V. Blinovskiy. Large deviations problem for the shape of a random Young diagram with restrictions // *Numbers, Information and Complexity* / ed. I. Althoefer et al. Dordrecht: Kluwer, 2000. P. 473–488.
- [6] T. Bodineau. The Wulff construction in three and more dimensions // *Comm. Math. Phys.* 1999. V. 207. № 1. P. 197–229.
- [7] T. Bodineau, D. Ioffe, Y. Velenik. Rigorous probabilistic analysis of equilibrium crystal shapes // *J. Math. Phys.* 2000. V. 41. P. 1033–1098.
- [8] J. Bricmont, A. El Mellouki, J. Frohlich. Random surfaces in statistical mechanics: roughening, rounding, wetting, ... // *J. Statist. Phys.* 1986. V. 42. № 5–6. P. 743–798.

- [9] R. Cerf. Large Deviations for Three Dimensional Supercritical Percolation. Paris: Société Mathématique de France, 2000. (Astérisque. V. 267.)
- [10] R. Cerf, R. Kenyon. The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model // *Comm. Math. Phys.* (to appear).
- [11] R. Cerf, A. Pizstora. On the Wulff crystal in the Ising model // Preprint, 1999.
- [12] H. Cohn, R. Kenyon, J. Propp. A variational principle for domino tilings // Preprint, 1998; <http://arxiv.org/#math.CO/0008220>; (to appear).
- [13] A. Dembo, A. Vershik, O. Zeitouni. Large deviations for integer partitions // *Markov Process. Related Fields.* 2000. V. 6. P. 147–179.
- [14] R. L. Dobrushin, S. Shlosman. Thermodynamic inequalities for the surface tension and the geometry of the Wulff construction // *Ideas and Methods in Quantum and Statistical Physics* / ed. S. Albeverio et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. P. 461–483.
- [15] R. L. Dobrushin, R. Kotecky, S. B. Shlosman. Wulff Construction: A Global Shape from Local Interaction. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992. (Amer. Math. Soc. Transl. V. 104.)
- [16] A. P. Hillman, R. M. Grassl. Reverse plane partitions and tableau hook numbers // *J. Combin. Theory Ser. A.* 1976. V. 21. P. 216–221.
- [17] D. Ioffe. Large deviations for the 2D Ising model: a lower bound without cluster expansions // *J. Statist. Phys.* 1994. V. 74. P. 411–432.
- [18] D. Ioffe. Exact deviation bounds up to T_c for the Ising model in two dimensions // *Probab. Theory Related Fields.* 1995. V. 102. P. 313–330.
- [19] D. Ioffe, R. Schonmann. Dobrushin–Kotecky–Shlosman theory up to the critical temperature // *Comm. Math. Phys.* 1998. V. 199. P. 117–167.
- [20] R. Kenyon. The planar dimer model with boundary: a survey // *Directions in Mathematical Quasicrystals* / ed. M. Baake et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. P. 307–328.
- [21] S. Kerov. A q -analog of the hook walk algorithm for random Young tableaux // *J. Algebraic Combin.* 1993. V. 2. P. 383–396.
- [22] C. Krattenthaler. Bijective proofs of the hook formulas for the number of standard Young tableaux, ordinary and shifted // *Electron. J. Combin.* 1995. V. 2. № R13.
- [23] D. E. Knuth. Permutations, matrices and generalized Young tableaux // *Pacific J. Math.* 1970. V. 34. P. 709–727.
- [24] A. Messenger, S. Miracle-Sole, J. Ruiz. Convexity properties of the surface tension and equilibrium crystals // *J. Statist. Phys.* 1992. V. 67. № 3–4. P. 449–470.
- [25] S. Miracle-Sole. Surface tension, step free energy and facets in the equilibrium crystal // *J. Statist. Phys.* 1995. V. 79. P. 183–214.
- [26] A. Okounkov. Infinite wedge and random partitions // *arXiv.org e-Print archive*, <http://xxx.lanl.gov/math.RT/9907127>.
- [27] R. H. Schonmann, S. Shlosman. Wulff droplets and the metastable relaxation of the kinetic Ising models // *Comm. Math. Phys.* 1998. V. 194. P. 389–462.
- [28] S. Shlosman. The droplet in the tube: a case of phase transition in the canonical ensemble // *Comm. Math. Phys.* 1989. V. 125. P. 81–90.
- [29] S. Shlosman. Geometric variational problems of statistical mechanics and of combinatorics // *J. Math. Phys.* 2000. V. 41. P. 1364–1370.
- [30] R. P. Stanley. Ordered Structures and Partitions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1972. (Mem. Amer. Math. Soc. V. 119.)
- [31] J. E. Taylor. Unique structure of solutions to a class of nonelliptic variational problems // *Proc. Sympos. Pure Math.* 1975. V. 27. P. 419–427.
- [32] J. E. Taylor. Some crystalline variational techniques and results // *Astérisque.* 1988. V. 154–155. P. 307–320.
- [33] А. М. Вершик. Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации // *Функц. анализ и его прил.* 1996. Т. 30. № 2. С. 19–39.
- [34] А. М. Вершик. Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел // *УМН.* 1997. Т. 52. № 2. С. 139–146.

- [35] А. М. Вершик, С. Керов. Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19. № 1. С. 25–36.
- [36] E. M. Wright. Asymptotic partition formulae. I. Plane partitions // Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2). 1931. P. 177–189.
- [37] G. Wulff. Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Kristallflächen // Z. Kristallogr. 1901. V. 34. P. 449–530.

Centre de Physique Théorique, Marseille, France;
ИППИ РАН, Москва, Россия
E-mail: shlosman@cpt.univ-mrs.fr

Поступила в редакцию
26.01.2001