Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нгуен Мань Хунг, О гладкости решения задачи Дирихле для гиперболических систем в областях с негладкой границей, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm42>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 15:40:35

**О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ
В ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ**

НГУЕН МАНЬ ХУНГ

Эллиптические краевые задачи в областях с негладкой границей были рассмотрены в работах В. А. Кондратьева [3], [4]. Им были установлены условия нетеровости и теоремы о гладкости решения. Аналогичные вопросы для эллиптической системы рассмотрели В. Г. Мазья, Б. А. Платоновский в работах [1], [2]. Краевые задачи для нестационарных систем в областях с гладкой границей рассматривались О. А. Ладыженской в [5].

Рассмотрим следующую систему:

$$(-1)^{m-1} \left[\sum_{|p|, |q|=1}^m D^p a_{pq}(x, t) D^q u + \sum_{|p|=1}^m a_p(x, t) D^p u + a(x, t) u \right] - u_{tt} = f,$$

где $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $u_{tk} = \partial^k u / \partial t^k$, a_{pq} , a_p , a – бесконечно дифференцируемые комплексные матрицы размера $r \times r$ в $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, граница которой $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой поверхностью, состоящей из конечного числа $(n-1)$ -мерных гладких поверхностей Γ_i . Предполагается, что поверхность Γ_i может пересекаться только с поверхностями Γ_{i-1} , Γ_{i+1} вдоль гладких $(n-2)$ -мерных многообразий l_{i-1} , l_{i+1} . Мы подробно остановимся на случае, когда $\partial\Omega$ состоит из двух поверхностей Γ_1 , Γ_2 , пересекающихся вдоль многообразия l_0 . Аналогично рассматривается поведение решений около линии пересечения остальных многообразий.

Предположим, что в окрестности каждой точки из l_0 множество $\overline{\Omega}$ диффеоморфно двугранному углу. Для каждой точки $P \in l_0$ определены два касательных к Ω полупространства $T_1(P)$, $T_2(P)$ и двумерная плоскость $\pi(P)$, нормальная к l_0 . Обозначим через $\gamma(P)$ угол в плоскости $\pi(P)$ (со стороны Ω), ограниченный лучами $T_1 \cap \pi(P)$, $T_2 \cap \pi(P)$, через $\beta(P)$ – раствор этого угла. Введем в рассмотрение некоторые функциональные пространства:

$H_m(\Omega)$ – гильбертово пространство комплексных r -мерных вектор-функций, имеющих внутри Ω обобщенные производные до порядка m включительно, таких, что

$$\|u\|_{m, \Omega}^2 = \sum_{0 \leq |p| \leq m} \int_{\Omega} |D^p u|^2 dx < +\infty;$$

$\overset{\circ}{H}_m(\Omega)$ – подпространство $H_m(\Omega)$, плотным множеством в котором являются бесконечно дифференцируемые комплексные r -мерные вектор-функции с компактным носителем в Ω ;

$H_m(Q_T)$ – пространство комплексных r -мерных вектор-функций с нормой

$$\|u\|_{m, Q_T}^2 = \sum_{0 \leq |p| + k \leq m} \int_{Q_T} |D^p u_{tk}|^2 dx dt;$$

$V_m(Q_T)$ – пространство комплексных r -мерных вектор-функций с нормой

$$\|u\|_{\rho, m, Q_T}^2 = \sum_{0 \leq |p| + k \leq m} \int_{Q_T} \rho^{2(|p|-m)} |D^p u_{tk}|^2 dx dt,$$

где $\rho(x)$ – функция, бесконечно дифференцируемая и положительная всюду, кроме l_0 , и совпадающая в некоторой окрестности l_0 с $r(x, l_0)$ – расстоянием от x до l_0 .

$$L(x, t, D) = \sum_{|p|, |q|=1}^m D^p a_{pq}(x, t) D^q + \sum_{|p|=1}^m a_p(x, t) D^p + a(x, t), \quad D_\nu^j = \frac{\partial^j}{\partial \nu^j} \quad (j = 1, \dots, m-1),$$

где ν – нормаль к $S_T = \partial\Omega \times [0, T]$, направленная вне Q_T , a_{pq} удовлетворяют условию

$$(1) \quad \sum_{|p|, |q|=m} (-1)^{|p|} \int_{\Omega} a_{pq}(x, t) D^q u \overline{D^p u} dx \geq \mu_0 \|u(x, t)\|_{m, \Omega}$$

для любого $u \in \mathring{H}(\Omega)$ при почти всех $t \in [0, T]$, $\mu_0 = \text{const} > 0$.

$$(2) \quad (-1)^{m-1} L(x, t; D)u - u_{tt} = f,$$

$$(3) \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

$$(4) \quad D_\nu^j u|_{S_T} = 0 \quad (j = 1, \dots, m-1).$$

Пусть $t \in [0, T]$. Для $S_0 = l_0 \times [0, T]$ обозначим сечение S_0 гиперплоскостью $\{t = \text{const}\}$ через S_0^t , а через $\{U_t^\alpha\}_\alpha$ обозначим достаточно мелкое покрытие $\bar{\Omega}_t$ координатными окрестностями. Если U_t^α пересекается с S_0^t , то каждой точке $(x, t) \in U_t^\alpha$ сопоставим координаты (y, z, t) , где (z, t) – точка из S_0^t , ближайшая к точке (x, t) , а $y = (y_1, y_2)$ – координаты точки (x, t) в плоскости $\pi(z, t)$.

Запишем оператор L в точке (z, t) в виде $L(z, t; D_y, D_z)$. Обозначим через (r, ω) полярные координаты точки y , через L_0 – главную часть полинома $L(z, t; \eta, \xi)$ (по переменным η, ξ) и положим

$$L_0(z, t; D_y, 0) = r^{-2m} Q(z, t; \omega, D_\omega; r D_r) \quad (D_r = i^{-1} \partial / \partial r).$$

Обозначим через $\lambda(z, t)$ собственные числа задачи

$$(5) \quad Q(z, t; \omega, D_\omega; \lambda) v(\omega) = 0, \quad 2|\omega| < \beta(z, t),$$

$$(6) \quad D_\omega^j v(\omega) = 0, \quad 2\omega = \pm \beta(z, t) \quad (j = 0, \dots, m-1).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f_{tk} \in L_2(Q_T)$ при $k \leq 2m-1$, $f_{tk}(x, 0) \in \mathring{H}_m(\Omega) \cap H_{2m(m-1)}(\Omega)$ при $k \leq 2(m-1)$, и пусть при всех $(z, t) \in S_0$ в полосе $1-2m \leq \text{Im } \lambda \leq 1-m$ нет собственных чисел задачи (5)–(6). Тогда обобщенное решение задачи (2)–(4) принадлежит $H_{2m}(Q_T)$ и

$$\|u\|_{2m, Q_T} \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{L_2(Q_T)}, \quad C = \text{const} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем систему (1) в виде

$$(7) \quad L(x, t; D)u = (-1)^{m-1} (u_{tt} - f).$$

Из теоремы 2.2 работы [6] следует, что при почти всех $t \in [0, T]$ правая часть системы (7) принадлежит $L_2(\Omega_t)$. Утверждение теоремы получается методом индукции.

ТЕОРЕМА 2. Если $f_{tk} \in V_h(Q_T)$ при $k \leq 2m-1$, $f_{tk}(x, 0) \in \mathring{H}_m(\Omega) \cap H_{m(2m-1)}(\Omega)$ при $k \leq 2m-2$, а в полосе $1-2m-h \leq \text{Im } \lambda \leq 1-m$ нет собственных чисел задачи (5)–(6) при всех $(z, t) \in S_0$, то обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (2)–(4) принадлежит $V_{2m+h}(Q_T)$ и справедливо неравенство

$$(8) \quad \|u\|_{\rho, 2m+h, Q_T} \leq C \sum_{k=0}^{2m-1} \|f_{tk}\|_{\rho, h, Q_T}, \quad C = \text{const} > 0.$$

Выражаю глубокую благодарность профессору В. А. Кондратьеву за помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. // Труды ММО. 1978. Т. 37. С. 49–93. [2] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. // Проблемы матем. анализа, ЛГУ. 1977. № 6. С. 85–145. [3] Кондратьев В. А. // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292. [4] Кондратьев В. А. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 10. С. 1831–1843. [5] Ладыженская О. А. // Матем. сб. 1958. Т. 45 (87). № 2. С. 123–158. [6] Нгуен Мань Хунг // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 189–190.