Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Болибрух, Регулярные особые точки как изомонодромные слияния фуксовых, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 135–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm420>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:02:37

РЕГУЛЯРНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ КАК ИЗОМОНОДРОМНЫЕ СЛИЯНИЯ ФУКСОВЫХ

А. А. Болибрух

Рассмотрим изомонодромное семейство фуксовых систем p линейных уравнений

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i} \right) y \quad (1)$$

на сфере Римана $\mathbb{P}^1$, где матрицы $B_i(a)$ аналитически зависят от положения набора особых точек $a = (a_1, \dots, a_n)$. Изомонодромность семейства (1) означает существование такой фундаментальной матрицы $Y(z, a)$ семейства, которая аналитична по аргументам z, a и которая при любом фиксированном значении a имеет одну и ту же монодромию (см. подробнее [1]). (Естественная область определения семейства (1) – универсальная накрывающая сферы Римана с выколотыми особыми точками, но поскольку нас будут интересовать лишь малые перемещения особых точек по отношению к некоторому их начальному положению, то можно считать, что все происходит на одном листе накрытия.)

Будем говорить, что система уравнений

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \quad (2)$$

с особыми точками $b_1, \dots, b_k$ является результатом изомонодромного слияния особых точек семейства (1), если матрица $\sum_{i=1}^n \frac{B_i(a)}{z - a_i}$ стремится к $B(z)$, когда для любого i точки $a_{i_1}, \dots, a_{i_{m_i}}$ стремятся к точке b_i , оставаясь каждая в своем секторе с вершиной в этой точке.

Будем называть такое слияние *нормализованным*, если при этом слиянии изомонодромная матрица семейства (1) стремится к некоторой фундаментальной матрице итоговой системы (2).

В работе [1] доказано, что нормализованное изомонодромное слияние фуксовых особых точек приводит к появлению лишь регулярных особых точек, т.е. таких точек, в которых решения итоговой системы (2) имеют не более чем степенной рост. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Любая система (2) линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками на сфере Римана является результатом нормализованного изомонодромного слияния особых точек семейства фуксовых систем уравнений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорему достаточно доказать для случая, когда все особые точки системы (2) фуксовы за исключением одной. Можно считать, что эта точка расположена в нуле и что матрица коэффициентов системы имеет в окрестности этой точки следующий вид: $B(z) = \frac{B_0(z)}{z^{r+1}}$, где $B_0(z)$ голоморфна в нуле и не зануляется там, а целое число r , называемое рангом Пуанкаре системы (2), положительно.

Для фундаментальной матрицы $Y(z)$ системы (2), построенной по специальному, так называемому Левелевскому, базису пространства решений в окрестности точки нуль, имеет место следующее тождество (см. [2]): $Y(z) = U(z)z^A z^E$, где A – целочисленная диагональная матрица нормирований базиса, E – постоянная матрица и матричная функция $U(z)$ голоморфна в нуле.

Покажем, что матрицу $U(z)$ можно представить в следующем виде:

$$U(z) = \Gamma(z)V(z), \quad \Gamma(z) = \Gamma_0 z^{L_1} \Gamma_1 z^{-L_1} \dots z^{L_s} \Gamma_s z^{-L_s} z^K, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00157).

где все Γ_i – постоянные матрицы, $L_j = K_1 + \dots + K_j$, все матрицы K_i , K и матрица $K - L_s$ являются диагональными целочисленными матрицами с неотрицательными элементами, $V(z)$ голоморфно обратима в нуле и при всех j матричные функции $z^{L_j} \Gamma_j z^{-L_j}$ голоморфны в точке бесконечность.

Умножив $U(z)$ слева на неособую постоянную матрицу S , переставим ее строки так, чтобы первые l строк матрицы $U(0)$, имеющей ранг l , были линейно независимыми. Обозначим матрицу SU вновь через U . Найдется такая невырожденная матрица T , первые l строк которой совпадают с единичной матрицей, что у матрицы $TU(0)$ последние $p - l$ строк нулевые. Поэтому $TU(z) = z^{L_1} U'(z)$ с голоморфной матричной функцией $U'(z)$. Обозначим $\Gamma_0 = S^{-1} T^{-1}$.

Будем считать, что диагональные элементы матрицы L_1 образуют невозрастающую последовательность (доказательство в общем случае легкой модификацией сводится к рассматриваемому). Пусть первые m строк матрицы $U'(0)$ линейно независимы, а $(m + 1)$ -я строка является их линейной комбинацией. Найдется такая невырожденная матрица Q , первые m строк которой совпадают с единичной матрицей, что у матрицы $QU'(0)$ строка с номером $(m + 1)$ – нулевая. Тогда $QU'(z) = z^{K_2} U''(z)$ с голоморфной матрицей $U''(z)$. Обозначим $\Gamma_1 = Q^{-1}$. По построению матрица $z^{L_1} \Gamma_1 z^{-L_1}$ голоморфна в бесконечности и $U(z) = \Gamma_0 z^{L_1} \Gamma_1 z^{-L_1} z^{L_1 + K_2} U''(z)$.

Обозначим матрицу $L_1 + K_2$ через L_2 . В предположении, что элементы матрицы L_2 образуют невозрастающую последовательность, рассмотрим первые k линейно независимых строк матрицы $U''(0)$ и т. д. После конечного числа шагов получим тождество (3).

Рассмотрим матричную функцию $H(z, a) = \Gamma_0 H_1(z, a) \cdots H_s(z, a) G(z, a)$, где $H_i(z, a) = F_i \Gamma_i D_i$ и где, в свою очередь, $F_i = \prod_{j=1}^{l_i} (z - a_j^i)^{N_j^i}$, $D_i = \prod_{j=1}^{l_i} (z - c_j^i)^{-N_j^i}$, $G(z, a) = \prod_{j=1}^l (z - a_j^{s+1})^{N_j^{s+1}}$, все элементы матриц N_j^i равны нулю кроме одного диагонального элемента, равного единице, $l_i = \text{tr } L_i$, $\sum_{j=1}^{l_i} N_j^i = L_i$, $\sum_{j=1}^l N_j^{s+1} = K$ и все точки a_j^i, c_j^i, b_l различны.

Из построения следует, что функция $H(z, a)(\Gamma(z))^{-1}$ голоморфна в бесконечности, семейство систем уравнений с фундаментальной матрицей $Y(z, a) = H(z, a)(\Gamma(z))^{-1} Y(z)$ изомонодромно, фуксово при всех a_j^i, c_j^i, b_l и матричная функция $Y(z, a)$ стремится к $Y(z)$, когда все точки a_j^i, c_j^i стремятся к нулю.

Заметим, что у построенного семейства фуксовых уравнений все особые точки a_j^i, c_j^i являются ложными, т.е. решения в этих точках не ветвятся. Из работы [3] следует, что $\text{tr } K \leq rp(p - 1)/2$, поэтому число таких точек оценивается сверху числом $2\text{tr } L_1 + \dots + 2\text{tr } L_s + \text{tr } K$, которое не превосходит числа $(rp(p - 1)/2)^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Болибрух // Труды МИАН. 1998. Т. 221. С. 127–142. [2] А. А. Болибрух // Труды МИАН. 1994. Т. 206. [3] E. Corel // C. R. Acad. Sci. Paris. 1999. V. 328. P. 983–986.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bolibr@mi.ras.ru

Принято редколлегией
03.08.2001