Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Я. Виро, С. Ю. Оревков, Сравнение по модулю 8 для вещественных алгебраических кривых степени 9, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 137–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:54:34

СРАВНЕНИЕ ПО МОДУЛЮ 8 ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ СТЕПЕНИ 9

О. Я. Виро, С. Ю. ОРЕВКОВ

1. Введение и формулировка результата. Пусть A – неособая вещественная алгебраическая кривая степени m в $\mathbb{RP}^2$. Ее компоненты связности – вложенные окружности. Те из них, дополнение которых в $\mathbb{RP}^2$ несвязно, называются *овалами*. Говорят, что овал u лежит *внутри* овала v , если u содержится в ориентируемой компоненте дополнения овала v . Объединение d овалов $v_1, \dots, v_d$ таких, что v_i лежит внутри v_{i+1} , $1 \leq i < d$, называется *гнездом глубины d* . Овал называется *внешним*, если он не лежит внутри никакого другого овала; овал называется *пустым*, если внутри него нет других овалов. Овал называется *четным*, если он содержится внутри четного числа других овалов, и *нечетным* в противном случае. Обозначим через p и n число четных и нечетных овалов соответственно. Кривая A называется *M -кривой*, если она имеет максимально возможное число компонент связности, равное $M(m) = (m-1)(m-2)/2 + 1$. Если A имеет $M(m) - i$ компонент связности, то она называется *$(M-i)$ -кривой*. Пусть SA – комплексификация кривой A . Если $SA \setminus A$ несвязно, то A – кривая *типа I*; если $SA \setminus A$ связно, то A – кривая *типа II*.

У кривых четной степени $m = 2k$ в ряде случаев разность $p - n$ удовлетворяет сравнениям. Так, например,

для M -кривых имеет место сравнение Гудкова–Рохлина	$p - n \equiv k^2 \pmod{8}$,
для $(M-1)$ -кривых – сравнение Гудкова–Крахнова–Харламова	$p - n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}$,
для $(M-2)$ -кривых типа II – сравнение Харламова–Марэна	$p - n \not\equiv k^2 + 4 \pmod{8}$,
для кривых типа I – сравнение Арнольда	$p - n \equiv k^2 \pmod{4}$.

Эти формулировки не переносятся на кривые *нечетных* степеней. Так, для M -кривой любой нечетной степени $2k+1$ с $k \geq 3$ вычет $p - n \pmod{8}$ может принимать любые значения, сравнимые с $k \pmod{2}$. Следующая теорема является, насколько нам известно, первым результатом такого рода для кривых нечетных степеней.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – кривая степени $m = 2k+1 = 4d+1$, имеющая 4 попарно непересекающихся гнезда глубины d . Тогда:

если A – это M -кривая, то	$p - n \equiv -k \pmod{8}$;
если A – это $(M-1)$ -кривая, то	$p - n \equiv -k \pm 1 \pmod{8}$;
если A – это $(M-2)$ -кривая типа II, то	$p - n \not\equiv -k + 4 \pmod{8}$;
если A – это кривая типа I, то	$p - n \equiv -k \pmod{4}$.

Очевидно, сравнение (1) при $d = 2$ эквивалентно тому, что число внешних пустых овалов M -кривой степени 9 с 4 гнездами делится на 4. Этот факт был сформулирован в качестве гипотезы Корчагиным [1]. Теорема 1 выводится ниже, в п. 4, из теоремы Виро–Харламова [2], обобщающей классические сравнения на случай особых кривых четной степени.

2. Инвариант Брауна–ван дер Блия. Под *квадратичным пространством* мы понимаем тройку $(V, \circ, q)$, составленную из векторного пространства V над полем $\mathbb{Z}_2$, билинейной формы $V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $(x, y) \mapsto x \circ y$, и функции $q: V \rightarrow \mathbb{Z}_4$, квадратичной относительно $\circ$ в том смысле, что $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2x \circ y$. Квадратичное пространство определяется своей *матрицей Грама* относительно какого-либо базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства V , т.е. матрицей $Q = (q_{ij})$, где $q_{ii} = q(e_i)$ и $q_{ij} = e_i \circ e_j$ при $i \neq j$ (диагональные элементы определены $\pmod{4}$, остальные – $\pmod{2}$; заметим, что $q(x) \equiv x \circ x \pmod{2}$). Легко видеть, что элементарными заменами базиса матрицу Грама можно привести к блочно-диагональному виду $\text{diag}(d_1, \dots, d_t) \oplus Q_1 \oplus \dots \oplus Q_s$, где каждый блок Q_i – это либо $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Если все $d_i \neq 2$, будем говорить, что форма q *информативна*, и в этом случае определим ее *инвариант Брауна–ван дер Блия* $B(q) = \sum B(d_i) + \sum B(Q_i) \pmod{8}$, где $B(1) = 1$, $B(-1) = -1$, $B(0) = 0$, $B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$ и $B\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4$.

3. Сравнение Виро–Харламова для нодальных кривых. Пусть A – кривая в $\mathbb{RP}^2$ степени $2k$, заданная уравнением $f = 0$, и пусть каждая ее особая точка есть точка трансверсального пересечения двух гладких вещественных локальных ветвей. Говорят, что A является кривой типа I (*M-кривой*), если нормализация любой ее неприводимой компоненты является кривой типа I (имеет $g + 1$ вещественных компонент, где g – род этой нормализации). Кривая, не принадлежащая типу I, относится к типу II. Пусть $x_1, \dots, x_s$ – особые точки и Γ_A – объединение содержащих их компонент связности кривой A . Пусть $b = 0$, если множество $\mathbb{RP}_+^2 = \{f \geq 0\}$ стягиваемо в $\mathbb{RP}^2$, и $b = (-1)^k$ в противном случае.

В случае связного Γ_A определим квадратичное пространство $(V, \circ, q)$ следующим образом. Пусть $C_1, \dots, C_r$ – ориентируемые компоненты множества $\mathbb{RP}^2 \setminus \Gamma_A$, на которых $f > 0$ вблизи от Γ_A . Пусть $(V_0, \circ, q_0)$ – квадратичное пространство с ортогональным базисом $e_1, \dots, e_s$, на элементах которого q_0 равно -1 . Пусть $c_i = \sum_{j \in \alpha_i} e_j$, где $\{x_j\}_{j \in \alpha_i}$ – особые точки, через которые ∂C_i проходит ровно один раз. Если Γ_A либо стягиваемо, либо содержит ветвь (т.е. образ компоненты множества вещественных точек неособой модели кривой A), не гомологичную нулю в $\mathbb{RP}^2$, то V определяется как подпространство пространства V_0 , порожденное векторами $c_1, \dots, c_r$, а $q = q_0|_V$. В противном случае, т.е. если Γ_A не стягиваемо и не содержит такой ветви, нужно выбрать простую замкнутую кривую L в Γ_A , не стягиваемую в $\mathbb{RP}^2$, и расширить V_0 до квадратичного пространства V'_0 , добавив к базисным векторам $e_1, \dots, e_s$ вектор e_0 , на котором квадратичная форма принимает значение $(-1)^k$ и который ортогонален таким и только таким e_j , что L проходит через x_j , реализуя нуль группы $H_1(\mathbb{RP}_+^2, \mathbb{RP}_+^2 \setminus x_j; \mathbb{Z}_2)$. В этом случае V определяется как подпространство пространства V'_0 , порожденное векторами $c_1, \dots, c_r$, и $e_0 + \sum_{j \in \alpha_0} e_j$, где $\alpha_0 = \{j \mid [L] \neq 0 \in H_1(\mathbb{RP}_+^2, \mathbb{RP}_+^2 \setminus x_j; \mathbb{Z}_2)\}$.

В случае несвязного Γ_A квадратичное пространство $(V, \circ, q)$ определяется как ортогональная сумма квадратичных пространств, ассоциированных описанным выше образом с каждой компонентой множества Γ_A .

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что для каждой ветви кривой A число точек, в которых она пересекает объединение прочих ветвей, сравнимо по модулю 4 с 0, если эта ветвь гомологична нулю в $\mathbb{RP}^2$, и с $(-1)^{k+1}$ в противном случае. Тогда если A есть M -кривая, то $\chi(\mathbb{RP}_+^2) \equiv k^2 + B(q) + b \pmod{8}$. Имеют место также соответствующие аналоги сформулированных выше сравнений Гудкова–Кратнова–Харламова, Харламова–Марэна и Арнольда.*

Теорема 2 является следствием теоремы (3.В) о кривых с произвольными особенностями из статьи Харламова и Виро [2]. Она приведена здесь, поскольку в обсуждении соответствующего частного случая (4.1), (4.2) теоремы (3.В) в [1] форма q описана неправильно.

4. Доказательство теоремы 1. Выберем любые три попарно непересекающихся гнезда глубины d и внутри самого внутреннего овала каждого из них выберем по точке. Теорема 1 вытекает из теоремы 2, примененной к объединению кривой A и трех прямых, соединяющих выбранные точки попарно. Действительно, объединение этих прямых и нестягиваемой ветви кривой A делит $\mathbb{RP}^2$ на 4 треугольника и 3 четырехугольника (криволинейных). Выберем знак многочлена f так, чтобы он был положителен на четырехугольниках и отрицателен на треугольниках. Все овалы, не принадлежащие трем выбранным гнездам, лежат в четырехугольниках (иначе нашлась бы коника, имеющая слишком много общих точек с A). Поэтому $\chi(\mathbb{RP}_+^2) = \chi(\bigcup \overline{C}_j) - p' + n'$, где p' и n' – число четных и нечетных овалов, не принадлежащих трем выбранным гнездам. $B(q)$ несложно вычислить согласно п. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Korchagin // Lecture Notes in Math. 1991. V. 1524. P. 407–426. [2] V. М. Kharlamov, О. Ya. Viro // Lecture Notes in Math. 1988. V. 1346. P. 357–406.

ПОМИ им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург,
Уппсальский Университет, Уппсала, Швеция;
МИ им. В. А. Стеклова РАН, Москва,
Университет им. Поля Сабатье, Тулуза, Франция

Принято редколлегией
01.06.2001