Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Гапеев, Баевская задача обнаружения разладки с информационным критерием запаздывания, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 139–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:47:35

БАЕВСКАЯ ЗАДАЧА ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ С ИНФОРМАЦИОННЫМ КРИТЕРИЕМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

П. В. ГАПЕЕВ

В работах [1; гл. IV], [2]–[4] рассматривались задачи обнаружения разладки для последовательности независимых случайных величин винеровского и пуассоновского процессов с *линейной функцией стоимости запаздывания*. В первом пункте данной работы дается байесовская постановка задачи обнаружения разладки с *информационным критерием запаздывания* для некоторых процессов с непрерывным временем. Во втором пункте на основании идей, предложенных в работах [5] и [6], проводятся дополнительные построения, несколько изменяющие данную постановку. В третьем пункте дается решение задачи в полученной постановке для *процессов диффузионного типа*.

1. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P_\pi)$, $P_\pi = \pi P^0 + (1 - \pi) \int_0^\infty P^s dF(s)$, $\pi \in [0, 1]$, где $0 \leq F(t) < 1$, $t \geq 0$, — некоторая непрерывная функция распределения, заданы *càdlàg*-процессы $X^i = (X_t^i)_{t \geq 0}$, $i = 0, \infty$, и $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина $\theta \geq 0$ с распределением $P_\pi[\theta = 0] = \pi$, $P_\pi[\theta \leq t \mid \theta > 0] = F(t)$, $t \geq 0$, $\pi \in [0, 1]$, являющаяся *моментом разладки* для наблюдаемого процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$, $X_t = X_{t \wedge \theta}^0 + (X_t^0 - X_{t \wedge \theta}^0)$, $X_0^\infty = X_0^0 = X_0 = 0$. В данном пункте будем предполагать, что θ является взаимно независимой с X^i , $i = 0, \infty$, относительно меры P_π и $P_\pi[X \in \cdot \mid \theta = s] = P^s[X \in \cdot]$ совпадает с распределением процесса X при $\theta = s$, $s \in [0, \infty]$.

Пусть $\tau = \tau(\omega) \geq 0$ — момент остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\} \subseteq \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, является *моментом подачи сигнала “тревоги”* о наступлении разладки наблюдаемого процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$. С каждым моментом остановки τ свяжем потери, вызванные *ложной тревогой*, $bP_\pi[\tau < \theta]$, $b > 0$, и потери, связанные с *запаздыванием*, для определения которых приведем следующие рассуждения.

Пусть $\zeta_t = \ln[d(P^0 | \mathcal{F}_t^X)/d(P^s | \mathcal{F}_t^X)]$, $t \geq 0$, $\zeta_0 = 1$ и τ — произвольный $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ -момент остановки с $E^0|\ln \zeta_\tau| < \infty$. *Процессом Кульбака–Лейблера* мер P^0 и P^∞ , $P^0 \stackrel{\text{loc}}{\sim} P^\infty$, на $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ (см. [7], [8]) будем называть предсказуемый возрастающий процесс $k = (k_t, \mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ из следующего разложения Дуба–Мейера по мере P^0 : $\ln \zeta_{t \wedge \tau} = k_{t \wedge \tau} + m_{t \wedge \tau}$, $\ln \zeta_0 = k_0 = 0$, где процесс $(m_{t \wedge \tau}, \mathcal{F}_t^X, P^0)_{t \geq 0}$ является равномерно интегрируемым мартингалом с $m_0 = 0$.

ЛЕММА 1. Пусть распределения P^s , $s \in [0, \infty]$, локально эквивалентны на $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ и обладают свойством $d(P^0 | \mathcal{F}_t^X)/d(P^s | \mathcal{F}_t^X) = d(P^0 | \mathcal{F}_{t \wedge s}^X)/d(P^s | \mathcal{F}_{t \wedge s}^X)$, $t, s \geq 0$. Пусть $\mathcal{M} = \{\tau : E^s \ln[d(P^s | \mathcal{F}_\tau^X)/d(P^\infty | \mathcal{F}_\tau^X)]^+ < \infty, s \geq 0\}$ — класс $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ -моментов остановки. Тогда в условиях данного пункта для $\tau \in \mathcal{M}$ функционал

$$K_\pi(\tau, \theta) = \pi E^0 \ln[d(P^0 | \mathcal{F}_\tau^X)/d(P^\infty | \mathcal{F}_\tau^X)] + (1 - \pi) \int_0^\infty E^s \ln[d(P^s | \mathcal{F}_\tau^X)/d(P^\infty | \mathcal{F}_\tau^X)] dF(s)$$

определен и имеет представление $K_\pi(\tau, \theta) = E_\pi[k_\tau - k_\theta]^+$. Функционал $K_\pi(\tau, \theta)$ будем называть *информационным количеством Кульбака–Лейблера “лишних наблюдений”*.

В качестве байесовской задачи наискорейшего обнаружения изменения характеристик распределения (разладки) наблюдаемого процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$ с информационным критерием запаздывания будем рассматривать задачу о нахождении функции байесовского риска $\rho(\pi) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}} \{b P_\pi[\tau < \theta] + E_\pi[k_\tau - k_\theta]^+\}$, $\pi \in [0, 1]$, и оптимального π -байесовского момента остановки τ^* в множестве $\mathcal{M}$, при котором этот инфимум достигается.

2. Изменим некоторым образом постановку задачи предыдущего пункта, а именно, опустим предположения об $\mathcal{F}_0$ -измеримости случайной величины θ и ее независимости от процессов X^i , $i = 0, \infty$, и предположим, что на данном стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P_\pi)$ существует $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина ξ , взаимно независимая с процессами X^i , $i = 0, \infty$, относительно меры P_π и имеющая распределение $P_\pi[\xi = 0] = \pi$, $P_\pi[\xi > t \mid \xi > 0] = e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$, $t \geq 0$,

$\pi \in [0, 1]$. В данном случае будем предполагать, что $P^s, s \in [0, \infty]$, являются распределениями процессов $X^s = (X_t^s)_{t \geq 0}, X_t^s = X_{t \wedge s}^\infty + (X_t^0 - X_{t \wedge s}^0)$.

Предположим, что процесс $k = (k_t)_{t \geq 0}$ является непрерывным, рассмотрим случайные величины $\theta(u) = \inf\{t \geq 0 : k_t = u\}, u \geq 0$, и положим $\theta := \theta(\xi)$. Заметим, что в этом случае имеет место свойство $\{\theta > t\} = \{k_t < \xi\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$, следовательно, θ является $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -моментом остановки, $P_\pi[\theta = 0] = \pi, P_\pi[\theta > t \mid \theta > 0] = E_\pi e^{-\lambda k_t}, \lambda > 0, t \geq 0, \pi \in [0, 1]$, и в силу непрерывности процесса k заключаем, что $\xi = k_\theta$. Таким образом, в данном случае можно сказать, что величина θ имеет “условное экспоненциальное распределение” относительно “количества поступающей информации”. Такого рода конструкция использовалась в работе [6] и для модели с дискретным временем – в [5].

ТЕОРЕМА. Пусть $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}, \pi_t = P_\pi[\theta \leq t \mid \mathcal{F}_t^X]$ – процесс апостериорной вероятности и меры $P^s, s \in [0, \infty]$, локально эквивалентны на $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$. Тогда в предположениях данного пункта $\rho(\pi) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}} E_\pi[b(1 - \pi_\tau) + \int_0^\tau \pi_t dk_t], \pi \in [0, 1]$, и если выполняется свойство $d(P^0 \mid \mathcal{F}_t^X)/d(P^s \mid \mathcal{F}_t^X) = d(P^0 \mid \mathcal{F}_{t \wedge s}^X)/d(P^\infty \mid \mathcal{F}_{t \wedge s}^X), t, s \geq 0$, то при $\pi \in [0, 1)$ процесс $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ имеет представление $\pi_t = \varphi_t/(1 + \varphi_t), d\varphi_t = \lambda(1 + \varphi_t)dk_t + \varphi_t dN_t, \varphi_0 = \pi/(1 - \pi)$, где $dN_t = d\zeta_t/\zeta_t, t \geq 0$.

3. Рассмотрим случай, когда наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ допускает представление $dX_t = [(1 - \theta_t)a_\infty(t, X) + \theta_t a_0(t, X)]dt + b(t, X)dW_t, X_0 = 0$, в котором $\theta_t = I(t \geq \theta), (W_t, \mathcal{F}_t, P_\pi)_{t \geq 0}$ – винеровский процесс, $\int_0^t [a_i(u, X) + b^2(u, X)]du < \infty, i = 0, \infty, t \geq 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $b^2(t, X) > 0, [a_i(t, X)/b(t, X)]^2 + \int_0^t [a_i(s, X)/b(s, X)]^2 ds < \infty, i = 0, \infty, t \geq 0$, и неупреждающие функционалы $a_\infty(t, x), a_0(t, x), b(t, x), t \geq 0, x \in \mathbf{C}([0, \infty))$, удовлетворяют локализованным условиям Липшица и линейного роста [9; (4.110), (4.111)]. Тогда в случае выполнения условия предыдущего пункта $\{\theta > t\} = \{k_t < \xi\}, t \geq 0$, процесс $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ имеет представление $d\pi_t = \lambda(1 - \pi_t)dk_t + \pi_t(1 - \pi_t)dM_t, \pi_0 = \pi$, в котором $M_t = \int_0^t [(a_0(s, X) - a_\infty(s, X))/b(s, X)]d\overline{W}_s, k_t = \int_0^t [(a_0(s, X) - a_\infty(s, X))/b(s, X)]^2 ds/2$, и $(\overline{W}_t, \mathcal{F}_t^X, P_\pi)_{t \geq 0}, \overline{W}_t = \int_0^t [(dX_s - [(1 - \pi_s)a_\infty(s, X) + \pi_s a_0(s, X)])/b(s, X)]ds$, является обновляющим винеровским процессом: $\mathcal{F}_t^{\overline{W}} = \mathcal{F}_t^X, t \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть в условиях леммы 2 $\int_0^\infty [(a_0(s, X) - a_\infty(s, X))/b(s, X)]^2 ds = \infty$. Тогда в случае выполнения условия предыдущего пункта $\{\theta > t\} = \{k_t < \xi\}, t \geq 0$, функция байесовского риска $\rho(\pi) = \begin{cases} b(1 - A_*) - \int_{\pi}^{A_*} \psi^*(x)dx, & \pi \in [0, A_*), \\ b(1 - \pi), & \pi \in [A_*, 1], \end{cases}$ оптимальный π -байесовский момент остановки имеет вид $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : \pi_t \geq A_*\}$, где граница A_* является единственным корнем трансцендентного уравнения $\psi^*(A_*) = -b, \psi^*(x) = -\int_0^x (\exp[\lambda(H(y) - H(x))]/[y(1 - y)^2])dy, H(y) = \ln[(1 - y)/y] + 1/y, x, y \in (0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Ширяев. Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976. [2] Л. И. Гальчук, Б. Л. Розовский // Теория вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16. № 4. С. 712–716. [3] М. Н. А. Davis // Banach Center Publ. 1976. V. 1. P. 65–72. [4] G. Peskir, A. N. Shiryaev. Solving the Poisson disorder problem // MaPhySto Research Report № 48. Aarhus: Aarhus University, 2000. [5] Y. Ritov // Ann. Statist. 1990. V. 18. № 3. P. 1464–1469. [6] M. Beibel // Ann. Statist. 1996. V. 24. № 4. P. 1804–1812. [7] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. Предельные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994. [8] Э. И. Коломиец // Теория вероятн. и ее примен. 1987. Т. 32. № 3. С. 503–522. [9] Р. Ш. Липпер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.