Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Голубков, Первичный радикал присоединенной группы Шевалле над ассоциативным кольцом, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm424>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:40:50

ПЕРВИЧНЫЙ РАДИКАЛ ПРИСОЕДИНЕННОЙ ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ НАД АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ

А. Ю. ГОЛУБКОВ

1. Введение. В настоящей работе получена характеристика первичного радикала для расширений элементарной группы Шевалле, построенной при помощи присоединенного представления конечномерной простой алгебры Ли над ассоциативным кольцом с единицей. Доказанная формула служит естественным обобщением теоремы о первичном радикале для аффинной схемы Шевалле–Демажюра над коммутативным кольцом из работы [1].

2. Основные результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Нормальная подгруппа A группы G называется *первичной*, если в факторгруппе G/A централизатор каждой неединичной нормальной подгруппы тривиален. Пересечение $\text{rad}(G)$ всех первичных нормальных подгрупп группы G называется *первичным радикалом* группы G . Будем говорить, что группа G обладает *разрешимым* радикалом, если в G существует максимальная нормальная разрешимая подгруппа.

Пусть R – ассоциативное кольцо с 1 и первичным радикалом $\text{Rad}(R)$, $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ – конечномерная полупростая алгебра Ли с базисом Шевалле

$$\{X_{\alpha}, H_i\}_{\alpha \in \Sigma, 1 \leq i \leq l},$$

где Σ – система корней алгебры $\mathfrak{G}$, $\text{rk}(\Sigma) = l$, π – точное представление алгебры $\mathfrak{G}$ на конечномерном векторном пространстве V , $M = V_{\mathbb{Z}}$ – решетка векторов в V , инвариантная относительно действия всех $\pi(X_{\alpha})^m/m!$, $\alpha \in \Sigma$, $m \geq 0$. В частности, для присоединенного представления $\pi = \text{ad}$ в качестве M можно взять $\mathbb{Z}$ -решетку, порожденную базисом Шевалле алгебры $\mathfrak{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для каждого $r \in R$ и $\alpha \in \Sigma$ определим автоморфизм $x_{\alpha}(r)$ абелевой группы $R \otimes_{\mathbb{Z}} M$, полагая

$$x_{\alpha}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \pi(X_{\alpha}^n/n!) = \exp(r\pi(X_{\alpha})),$$

где

$$r^n \pi(X_{\alpha}^n/n!): t \otimes v \mapsto (tr^n) \otimes \pi(X_{\alpha}^n/n!)(v) = (tr^n) \otimes v\pi(X_{\alpha}^n/n!)$$

для любых $t \in R$, $v \in M$, $n \geq 0$. Группа $E_{\pi}(\Sigma, R)$, порожденная всеми $x_{\alpha}(r)$, $\alpha \in \Sigma$, $r \in R$, называется *элементарной группой Шевалле* типа Σ над кольцом R (см. [2], [3]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – ассоциативное кольцо с 1, $1/2$ и $1/3$, $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ – простая алгебра Ли, $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{G}$, Σ – система корней алгебры $\mathfrak{G}$, A – подгруппа $Gl_n(R)$ такая, что $E_{\text{ad}}(\Sigma, R) \subseteq A$. Предположим, что $1/(l+1) \in R$ для $A_{l \geq 4}$ и $1/5 \in R$ для G_2 . Тогда

$$\text{rad}(A) = A \cap C_n(R, \text{Rad}(R)) = \{a \in A \mid ab - ba \in M_n(\text{Rad}(R)), b \in M_n(R)\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть R – кольцо с полиномиальным тождеством, $1, 1/2$ и $1/3$, $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ – простая алгебра Ли типа G_2 . Тогда

$$\text{rad}(E_{\text{ad}}(G_2, R)) = E_{\text{ad}}(G_2, R) \cap C_{14}(R, \text{Rad}(R)).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть R – ассоциативная алгебра с 1 над полем рациональных чисел, $\mathfrak{G}_{\mathbb{C}}$ – простая алгебра Ли, $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{G}$, Σ – система корней алгебры $\mathfrak{G}$. Тогда группа A такая, что $E_{\text{ad}}(\Sigma, R) \subseteq A \subseteq Gl_n(R)$, обладает разрешимым радикалом в том и только том случае, когда первичный радикал $\text{Rad}(R)$ алгебры R нильпотентен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Ю. Голубков // УМН. 2000. Т. 55. № 3. С. 173–174. [2] С. Chevalley // Séminaire Bourbaki (1960/61). V. 13. Exp. 219. Paris, 1961. [3] Р. Стейнберг. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `golubkov@mccme.ru`

Принято редколлегией
01.06.2001