Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гриненко, О послойных перестройках расслоений на поверхности дель
Пеццо степени 2, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:43:43

О ПОСЛОЙНЫХ ПЕРЕСТРОЙКАХ РАССЛОЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ДЕЛЬ ПЕЦЦО СТЕПЕНИ 2

М. М. Гриненко

Всюду предполагается, что основное поле алгебраически замкнуто и имеет характеристику 0. Встречающиеся определения и понятия (бirationальная жесткость, Мори-расслоение и т. п.) читатель может найти в [1] и [2].

Пусть S – гладкая алгебраическая кривая (не обязательно полная) с отмеченной точкой O , X и V – гладкие трехмерные многообразия, обладающие сюръективными проективными морфизмами $\pi: X \rightarrow S$ и $\pi': V \rightarrow S$, все слои которых – поверхности дель Пеццо степени 2. Центральные слои (т.е. слои над точкой O) обозначим X_0 и V_0 соответственно. Предположим, что задана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \xrightarrow{\cong} & S \end{array},$$

где ϕ – бирациональное отображение, являющееся изоморфизмом вне центральных слоев.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. ϕ продолжается до изоморфизма X и V .

Важным следствием этого предложения является утверждение о единственности гладкой модели, усиливающее результаты работы [1]:

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $V \rightarrow \mathbb{P}^1$ – Мори-расслоение на поверхности дель Пеццо степени 2. Тогда класс Мори-расслоений, бирациональных над базой указанному $V/\mathbb{P}^1$, содержит не более одного гладкого элемента. В частности, если $V/\mathbb{P}^1$ бирационально жестко и неособо, то это единственное неособое Мори-расслоение в своем классе бирациональной эквивалентности.

Аналогичное утверждение для степени 1 доказано в [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Предположим противное, т.е. что ϕ не изоморфизм. Мы можем полагать, что $S = \text{Spec } \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ – локальное кольцо с параметром t (т.е. $t\mathcal{O}$ есть максимальный идеал, уравнение $t = 0$ задает точку O на S). Через K обозначим поле частных кольца $\mathcal{O}$, через η – общую схемную точку S . В дальнейшем индекс η в обозначении многообразий означает локализацию в общей схемной точке S .

По условиям предложения, все слои – горенштейновы поверхности дель Пеццо степени 2, а значит, обладают теми же свойствами проективного вложения, что и неособая поверхность дель Пеццо степени 2 [3], [4]. Таким образом, все они вкладываются во взвешенное проективное пространство $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ как поверхности степени 4. Обозначая через P_1 и P_2 два экземпляра пространства $\mathbb{P}_S(1, 1, 1, 2)$ над S , мы видим, что X и V могут рассматриваться как гиперповерхности в P_1 и P_2 соответственно, причем не пересекающие множества особых точек этих пространств ввиду условия неособости.

Очевидно, ϕ индуцирует изоморфизм X_η и V_η , а значит, и изоморфизм между P_{1_η} и P_{2_η} . Из элементарных линейно-алгебраических рассуждений следует, что мы можем выбрать координаты $[x, y, z, w]$ и $[p, q, r, s]$ с весами $(1, 1, 1, 2)$ в P_{1_η} и P_{2_η} соответственно так, что ϕ и ϕ^{-1} могут быть записаны в виде

$$\phi = \begin{Bmatrix} p = t^a x \\ q = t^b y \\ r = t^c z \\ s = t^d w \end{Bmatrix}, \quad \phi^{-1} = \begin{Bmatrix} x = t^\alpha p \\ y = t^\beta q \\ z = t^\gamma r \\ w = t^\delta s \end{Bmatrix},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-01132, 00-15-96085), грантов NWO-RFBR 047-008-005 и INTAS 97/2072.

причем каждый из наборов целых чисел (a, b, c, d) и $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ содержит хотя бы один 0 и, более того, существует такое целое $m > 0$, что

$$m = a + \alpha = b + \beta = c + \gamma = \frac{1}{2}(d + \delta).$$

Для определенности мы будем полагать, что $\gamma = 0$ (а значит, $c = m$) и $d \leq m/2$.

Кроме того, координаты могут быть выбраны так, что X и V задаются уравнениями $w^2 + f_4(x, y, z) = 0$ и $s^2 + g_4(p, q, r) = 0$ соответственно, где f_4 и g_4 — однородные полиномы степени 4 с коэффициентами в $\mathcal{O}$. Заметим, что коэффициенты при w^2 и s^2 могут быть выбраны равными 1 ввиду неособости многообразий.

Если мы теперь выразим координаты в уравнении для V при помощи ϕ , то после деления на коэффициент при w^2 (т.е. t^{2a}) получим уравнение для X

$$w^2 + \sum_{\substack{i+j_k=4 \\ k \leq 2}} a_{ijk} x^i y^j z^k + t^{3m-2a} \sum_{i+j=1} b_{ij} x^i y^j z^3 + ct^{4m-2a} z^4 = 0,$$

причем все коэффициенты (т.е. a_{ijk} , b_{ji} и c) лежат в кольце $\mathcal{O}$. Элементарная проверка показывает, что точка $(0 : 0 : 1 : 0)$ должна быть особой. Полученное противоречие доказывает предложение.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что в заданной ситуации любое бирациональное над базой отображение “откручивается” при помощи бирациональных автоморфизмов X (инволюции Бертини) до бирационального отображения, индуцирующего изоморфизм слоев над общими точками ([5; теорема 2.6]), и применить доказанное предложение.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат, сформулированный в предложении, доказан в работе [6] при более сильных ограничениях (именно, когда центральный слой неособый) при степени слоя не выше 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Гриненко // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 17–38. [2] М. М. Гриненко // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 4. С. 550–565. [3] F. Hidaka, K.-I. Watanabe // Tokyo J. Math. 1981. V. 4. № 2. P. 319–330. [4] M. Reid // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1994. V. 30. № 5. P. 695–727. [5] В. А. Исковских // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 3–72. [6] J. Park. Birational maps of del Pezzo fibrations // math.AG/9912076.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: grin@mi.ras.ru

Принято редколлегией
01.06.2001