Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, Устранимая особенность квазиконформного погружения, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 08:47:01

УСТРАНИМАЯ ОСОБЕННОСТЬ КВАЗИКОНФОРМНОГО ПОГРУЖЕНИЯ

В. А. Зорич

Мы показываем, что в размерностях $n > 2$ изолированная особенность квазиконформного погружения риманова многообразия в односвязное риманово многообразие той же размерности всегда устранима.

ТЕОРЕМА. Пусть M^n и N^n – римановы многообразия размерности n , o – точка на M^n и $\dot{M}^n := M^n \setminus \{o\}$. Пусть $f: M^n \rightarrow N^n$ – квазиконформное погружение. Если многообразие N^n односвязно, а $n \geq 3$, то отображение f инъективно в некоторой проколотой окрестности точки o ; при этом особенность либо устраняется непосредственно, либо этого можно добиться, пополняя N^n единственной точкой.

Говоря о погружении или иммерсии, мы будем иметь в виду локально инъективное (локально обратимое) отображение. Квазиконформность погружения подразумевает ограниченность его коэффициента квазиконформности. Устранение особенности предполагается в категории квазиконформных погружений.

Доказательство теоремы получается цепочкой утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если иммерсия $f: \dot{M}^n \rightarrow N^n$ не имеет в особой точке ни конечного асимптотического значения, ни бесконечного предела, то существует идущий в особую точку периодический путь.

Здесь f – произвольная, не обязательно квазиконформная иммерсия, а M^n и N^n – произвольные, не обязательно римановы многообразия размерности $n \geq 1$, которые, без ограничения общности, можно считать связными. Бесконечность предела означает, что по мере приближения точки $x \in \dot{M}^n$ к особой точке $o \in M^n$ ее образ $f(x)$ окончательно покидает любую компактную часть многообразия N^n . Наконец, периодичность пути означает, что он последовательно накрывает один и тот же цикл на N^n . Асимптотическое значение – это предел вдоль некоторого пути, идущего в особую точку.

Теперь доказательство. При указанных условиях для каждой проколотой окрестности $\dot{V}$ особой точки имеет место равенство $f(\dot{V}) = N^n$ (см. предложение 1 в [1]). Это уже дает возможность построить идущий в особую точку периодический путь.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если многообразие N^n односвязно, то иммерсия $f: \dot{M}^n \rightarrow N^n$ имеет в особой точке либо конечное асимптотическое значение, либо бесконечный предел.

Заметим, что ни наличие конечного предела, ни конечная кратность или, тем более, инъективность f в окрестности особой точки здесь не утверждаются (см., например, $z \mapsto \exp(1/z)$).

Проведя некоторые построения, мы покажем, что если N^n односвязно, то стягивание в точку цикла, накрываемого периодическим путем из утверждения 2, приводит к утверждению 3.

Пусть U – гомеоморфная стандартному n -мерному замкнутому диску (шару) окрестность точки o в M^n ; ∂U – граница U (топологическая $(n-1)$ -мерная сфера), которую мы будем также обозначать через S^{n-1} ; и пусть $\dot{U} := U \setminus \{o\}$.

Предположим, что иммерсия $f: \dot{U} \rightarrow N^n$ не имеет в особой точке ни конечного асимптотического значения, ни бесконечного предела. Тогда по утверждению 2 существует идущий в особую точку периодический путь, накрывающий некоторый одномерный цикл γ в N^n .

Допустим, что нам удалось подклеить к $\dot{U}$ вдоль $S^{n-1} = \partial U$ n -мерный диск и продолжить f до иммерсии $F: \bar{S}^n \rightarrow N^n$ проколотой в точке o сферы S^n . Тогда препятствием к накрытию гомотопии цикла γ в точку может быть только выход прообраза на точку $o \in S^n$. Но в этом случае

у f появляется конечное асимптотическое значение. Если же накрытие гомотопии не имело препятствий, то f оказывается однолистным (инъективным) в проколотой окрестности точки o . Но если однолистное отображение f не имеет конечного асимптотического значения, то, очевидно, у него есть бесконечный предел в точке o .

Осталось разобраться с подклейкой диска и продолжением иммерсии.

Если иммерсия $f: \dot{U} \rightarrow N^n$ не имеет в особой точке ни конечного асимптотического значения, ни бесконечного предела, то, как уже отмечалось, для каждой проколотой окрестности $\dot{V} \subset U$ особой точки имеет место равенство $f(\dot{V}) = N^n$. Возьмем точку $s \in (S^{n-1} = \partial U)$ и сходящуюся к o последовательность точек $s_k, k = 1, 2, \dots$, таких, что $f(s_k) = f(s)$. В каждой точке s_k , следуя параметризации $f|S^{n-1}$, построим свой экземпляр S_k^{n-1} сферы S^{n-1} над $f(S^{n-1})$.

Сферы $S_k^{n-1}, k = 1, 2, \dots$, не могут отделять S^{n-1} от точки o : иначе многообразие N^n окажется неодносвязным. Значит, они стягиваемы в пределах $\dot{U}$. Любая такая сфера ограничивает стандартный топологический n -мерный диск в $\dot{U}$. Его построение и учет ориентации обосновывают возможность использованной выше подклейки к $\dot{U}$ диска и продолжения иммерсии. Утверждение 2 доказано.

Риманова, конформная или квазиконформная структура многообразий, квазиконформность иммерсии и ограничение на размерность многообразий используются в следующем заключительном утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если иммерсия $f: \dot{M}^n \rightarrow N^n$ в односвязное многообразие N^n квазиконформна, то при $n \geq 3$ отображение f инъективно в некоторой проколотой окрестности особой точки.*

Доказывая утверждение 2, мы установили, что либо отображение f имеет конечное асимптотическое значение в особой точке, либо f инъективно в окрестности особой точки и имеет в ней бесконечный предел.

Но в силу предложения 3 из [1] наличие конечного асимптотического значения у квазиконформной иммерсии $f: \dot{M}^n \rightarrow N^n$ при $n \geq 3$ также влечет за собой инъективность f в некоторой окрестности особой точки (и устранимость такой особенности). Утверждение 3 доказано.

Теперь, когда инъективность отображения f в окрестности особой точки установлена, сформулированная выше теорема вытекает из хорошо известных фактов (верных и при $n \geq 2$), относящихся к устранению изолированной особенности однолистного квазиконформного отображения.

В связи с обсуждавшимися здесь вопросами см. обзор [2] и цитированную там литературу, а также гл. 6 в книге [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Зорич // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34. №3. С. 37–48. [2] V. A. Zorich // Lecture Notes in Math. 1992. V. 1508. P. 131–148. [3] M. Gromov (with appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes). Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Boston: Birkhäuser, 1999.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
01.06.2001