Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Бурнаев, Формула обращения для безгранично делимых распределений, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:25:54

Формула обращения для безгранично делимых распределений

Е. В. Бурнаев

В заметке получена формула обращения, позволяющая по характеристической функции безгранично делимого распределения вычислить его меру Леви. Такая формула аналогична известной формуле обращения [1], которая позволяет вычислить функцию распределения по соответствующей характеристической функции.

ТЕОРЕМА. Пусть $\phi(z) = e^{\psi(z)}$ – характеристическая функция безгранично делимого распределения с кумулянтной $\psi(z) = i\gamma z - \sigma^2 z^2/2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izxh(x)) U(dx)$, где $h(x)$ – функция урезания, а $U(dx)$ – мера Леви. Обозначим $\hat{\rho}(z) = \int_{-1}^1 \log \frac{\phi(z)}{\phi(z+\lambda)} d\lambda - \sigma^2/3$, $B = [a, b]$, где $-\infty < a < b < \infty$ и $U(\{a\} \cup \{b\}) = 0$. Тогда

$$\int_B \frac{x - \sin x}{x} U(dx) = \frac{1}{4\pi} \cdot \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(z) \left(\int_B e^{-izx} dx \right) dz. \quad (1)$$

Если при этом $\int_{|x|>1} x^2 U(dx) < \infty$, то

$$\int_B x^2 U(dx) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} (\psi''(z) + \sigma^2) \left(\int_B e^{-izx} dx \right) dz. \quad (2)$$

Если $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\rho}(z)| dz < \infty$, то мера Леви абсолютно непрерывна с плотностью $u(x)$ и

$$u(x) = \frac{x}{x - \sin x} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \hat{\rho}(z) dz. \quad (3)$$

Если $\int_{|x|>1} x^2 U(dx) < \infty$ и $\int_{\mathbb{R}} |\psi''(z) + \sigma^2| dz < \infty$, то мера Леви абсолютно непрерывна с плотностью $u(x)$ и

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} (\psi''(z) + \sigma^2) dz. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала формулы (1) и (3). Пусть $f(z) = \log \phi(z) + \sigma^2 z^2/2$. Тогда $f(z) = i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - 1 - izxh(x)) U(dx)$ и $f(z) - f(z+\lambda) = \log \frac{\phi(z)}{\phi(z+\lambda)} + \sigma^2(-\lambda^2 - 2\lambda z)/2 = -i\gamma\lambda + \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} - e^{i(z+\lambda)x} + i\lambda xh(x)) U(dx)$. Проинтегрируем по λ обе части последнего равенства по отрезку $[-1, 1]$. С одной стороны, $\hat{\rho}(z) = \int_{-1}^1 (f(z) - f(z+\lambda)) d\lambda = \int_{-1}^1 \log \frac{\phi(z)}{\phi(z+\lambda)} d\lambda - \sigma^2/3$. С другой стороны, $\hat{\rho}(z) = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{\mathbb{R}} (e^{izx}(1 - e^{i\lambda x}) + i\lambda xh(x)) U(dx) \right\} d\lambda$. Имеем: $h(x) \sim 1 + o(x)$ при $x \rightarrow 0$ и $h(x) \sim O(1/x)$ при $x \rightarrow \infty$, поэтому $e^{izx}(1 - e^{i\lambda x}) + i\lambda xh(x) \sim o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$ и $e^{izx}(1 - e^{i\lambda x}) + i\lambda xh(x) \sim O(1)$ при $x \rightarrow \infty$. Применяя теорему Фубини, из последнего равенства получаем, что $\hat{\rho}(z) = \int_{\mathbb{R}} (e^{izx} \int_{-1}^1 (1 - e^{i\lambda x}) d\lambda + ixh(x) \int_{-1}^1 \lambda d\lambda) U(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} 2(1 - (\sin x)/x) U(dx)$. Таким образом, $\hat{\rho}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx} \rho(dx)$, где $\rho(dx) = 2(1 - (\sin x)/x) U(dx)$, т.е. функция $\hat{\rho}(z)$ является преобразованием Фурье меры $\rho(dx)$. Применяя формулу обращения для характеристической функции [1], получаем формулу (1). Если $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\rho}(z)| dz < \infty$, то мера Леви абсолютно непрерывна с плотностью $u(x)$, причем $2(1 - (\sin x)/x)u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \hat{\rho}(z) dz$, т.е. $u(x) = \frac{x}{4\pi(x - \sin x)} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \hat{\rho}(z) dz$.

Докажем теперь формулы (2) и (4). Поскольку $\int_{|x|>1} x^2 U(dx) < \infty$, то по теореме о монотонной сходимости существует $\psi''(z) = -\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (-x^2 e^{izx}) U(dx)$. Тогда $\int_{\mathbb{R}} e^{izx} x^2 U(dx) = -(\psi''(z) + \sigma^2)$, откуда получаем требуемое.

Проиллюстрируем применение полученных формул на типичных примерах безгранично делимых распределений.

(а) Нормальное распределение имеет характеристическую функцию $\phi(z) = e^{imz - \sigma^2 z^2/2}$. Тогда $\hat{\rho}(z) = \int_{-1}^1 (-\frac{\sigma^2}{2}(z^2 - (z + \lambda)^2) - im\lambda) d\lambda - \sigma^2/3 = 0$, поэтому по формуле (3) $u(x) = 0$.

(б) Распределение Коши имеет характеристическую функцию $\phi(z) = e^{-c|z| + i\gamma z}$, $c > 0$. В этом случае $\hat{\rho}(z) = \int_{-1}^1 (-c|z| + c|z + \lambda| - \gamma\lambda) d\lambda = -2c|z| + c \int_{-1}^1 |z + \lambda| d\lambda$, что равно $c(|z| - 1)^2$ при $z \in [-1, 1]$ и 0 при $z \notin [-1, 1]$. Тогда по формуле (3) $u(x) = \frac{cx}{4\pi(x - \sin x)} \int_{-1}^1 e^{-izx} (|z| - 1)^2 dz = \frac{cx}{4\pi(x - \sin x)} \frac{4(x - \sin x)}{x^3} = \frac{c}{\pi x^2}$.

(с) Характеристическая функция составной пуассоновской величины равна $\phi(z) = \exp\{c(\hat{\theta}(z) - 1)\}$, где c — интенсивность скачков, $\hat{\theta}(z)$ — характеристическая функция распределения величины скачков $\theta(dx)$. Поскольку распределение $\theta(dx)$ может и не иметь плотности, будем использовать формулу (1). Итак, $\hat{\rho}(z) = \int_{-1}^1 c(\hat{\theta}(z) - \hat{\theta}(z + \lambda)) d\lambda = \int_{-1}^1 c(\int_{\mathbb{R}} e^{izx} \theta(dx) - \int_{\mathbb{R}} e^{i(z+\lambda)x} \theta(dx)) d\lambda = 2c \int_{\mathbb{R}} e^{izx} \theta(dx) - c \int_{\mathbb{R}} (\int_{-1}^1 e^{i\lambda x} d\lambda) e^{izx} \theta(dx) = 2c \int_{\mathbb{R}} e^{izx} \frac{x - \sin x}{x} \theta(dx)$. Из формулы (1) получаем, что

$$\begin{aligned} \int_B \frac{x - \sin x}{x} U(dx) &= \frac{2c}{4\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} e^{izx} \frac{x - \sin x}{x} \theta(dx) \int_B e^{-izy} dy) dz \\ &= c \int_B (\int_{\mathbb{R}} \frac{x - \sin x}{x} \theta(dx) \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} e^{iz(z-y)} dz) dy \\ &= c \int_B (\int_{\mathbb{R}} \frac{x - \sin x}{x} \theta(dx) \delta(x - y)) dy = c \int_B \frac{x - \sin x}{x} \theta(dx). \end{aligned}$$

Таким образом, $\int_B \frac{x - \sin x}{x} U(dx) = \int_B \frac{x - \sin x}{x} (c \cdot \theta(dx))$. Так как $0 < \frac{x - \sin x}{x} < \infty$ при всех $x \neq 0$, то $U(dx) = c \cdot \theta(dx)$.

(д) Характеристическая функция отрицательного биномиального распределения равна $\phi(z) = \frac{p^c}{(1 - qe^{iz})^c}$, где $c > 0$, $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$. Тогда $\hat{\rho}(z) = c \int_{-1}^1 \log(1 - qe^{i(z+\lambda)}) d\lambda - 2c \log(1 - qe^{iz})$. Известно, что $\log(1 - x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. Пусть $x = qe^{i(z+\lambda)}$, тогда $\log(1 - qe^{i(z+\lambda)}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k e^{ik(z+\lambda)}}{k}$. Интегрируя, получаем $\int_{-1}^1 \log(1 - qe^{i(z+\lambda)}) d\lambda = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k e^{ikz}}{k} \int_{-1}^1 e^{ik\lambda} d\lambda = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k e^{ikz}}{k} \frac{\sin k}{k}$. Таким образом, $\hat{\rho}(z) = 2c(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k e^{ikz}}{k} \frac{\sin k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k e^{ikz}}{k}) = 2c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k (k - \sin k)}{k^2} e^{ikz}$. Из формулы (1) получаем, что $\int_B \frac{x - \sin x}{x} U(dx) = \frac{1}{4\pi} \cdot \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} (2c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k (k - \sin k)}{k^2} e^{ikz}) (\int_B e^{-izx} dx) dz = c \int_B (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k (k - \sin k)}{k^2} \frac{1}{2\pi} \cdot \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} e^{iz(k-x)} dz) dx = c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k (k - \sin k)}{k^2} \int_B \delta(k - x) dx$. Таким образом, $\int_B \frac{x - \sin x}{x} U(dx) = \int_B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \sin k}{k} \frac{cq^k}{k} \delta(k - x) dx$, т.е. $U(\{k\}) = \frac{cq^k}{k}$.

(е) Характеристическая функция распределения гиперболического косинуса равна $\phi(z) = 1/\text{ch}(\pi z/2)$ [2]. Тогда $\phi''(z) = (\log \phi(z))'' = -(\pi^2/4)\phi^2(z)$. Плотность распределения гиперболического косинуса равна $f(x) = 1/(\pi \text{ch } x)$. Несложно подсчитать, что плотность свертки равна $f * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)f(y) dy = \frac{4}{\pi^2} e^{-x} \int_{\mathbb{R}} (1 + e^{2y - 2x})^{-1} (1 + e^{-2y})^{-1} dy = \frac{4}{\pi^2} \frac{x}{e^x - e^{-x}}$. Отсюда следует, что $\int_{\mathbb{R}} e^{izx} \frac{x}{e^x - e^{-x}} dx = \frac{\pi^2}{4} \phi^2(z)$. Из формулы (4) получаем, что $u(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} (\pi^2/4) \phi^2(z) dz = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{x(e^x - e^{-x})}$.

(ф) Характеристическая функция Γ -распределения равна $\phi(z) = (1 - i\alpha^{-1}z)^{-c}$, $c > 0$, $\alpha > 0$. Тогда $\psi(z) = \log \phi(z) = -c \log(1 - i\alpha^{-1}z)$, $\psi''(z) = \frac{c}{(i\alpha + z)^2}$. По формуле (4) получаем, что $u(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \frac{c}{(i\alpha + z)^2} dz = \frac{c}{x} e^{-\alpha x} I_{\{x > 0\}}$, так как $\int_{\mathbb{R}} e^{izx} c x e^{-\alpha x} I_{\{x > 0\}} dx = -\frac{c}{(i\alpha + z)^2}$.

Автор благодарен профессору А. Н. Шираву, который инициировал написание этой заметки.

Список литературы

- [1] Е. Лукач, *Характеристические функции*, Наука, М., 1979. [2] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, М., 1984.

Е. В. Бурнаев (E. V. Burnaev)
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: drazil@list.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
26.04.2006