Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Одно из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ иррационально, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:07:15

ОДНО ИЗ ЧИСЕЛ $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ ИРРАЦИОНАЛЬНО

В. В. Зудилин

В настоящей заметке мы устанавливаем следующий результат.

ТЕОРЕМА. По крайней мере одно из четырех чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ и $\zeta(11)$ иррационально.

Для доказательства мы используем обобщение конструкции линейных приближающих форм от значений дзета-функции Римана в нечетных точках, предложенной Т. Ривоалем в [1]. Именно с помощью этой аналитической конструкции в работе [1] была доказана бесконечность множества иррациональных чисел среди $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$; результат об иррациональности одного из девяти чисел $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$ был получен независимо Ривоалем [2] и автором [3]. Напомним также, что иррациональность числа $\zeta(3)$ установлена Р. Апером [4].

Зафиксируем нечетные числа q и r , $q \geq r + 4$, и набор целых положительных параметров $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q$, удовлетворяющих условиям $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \eta_q < \eta_0/2$ и

$$\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_q \leq \eta_0 \cdot \frac{q-r}{2}. \quad (1)$$

Для каждого целого $n > 0$ определим целочисленный набор

$$h_0 = \eta_0 n + 2, \quad h_j = \eta_j n + 1, \quad j = 1, \dots, q,$$

и рассмотрим рациональную функцию

$$\begin{aligned} R_n(t) := & (h_0 + 2t) \cdot \prod_{j=1}^r \frac{1}{(h_j - 1)!} \frac{\Gamma(h_j + t)}{\Gamma(1 + t)} \cdot \prod_{j=1}^r \frac{1}{(h_j - 1)!} \frac{\Gamma(h_0 + t)}{\Gamma(1 + h_0 - h_j + t)} \\ & \times \prod_{j=r+1}^q (h_0 - 2h_j)! \frac{\Gamma(h_j + t)}{\Gamma(1 + h_0 - h_j + t)}, \end{aligned}$$

а также соответствующую ей величину

$$F_n := \frac{1}{(r-1)!} \sum_{t=0}^{\infty} R_n^{(r-1)}(t) \quad (2)$$

(согласно (1) выполнено $R_n(t) = O(t^{-2})$, что обеспечивает сходимость ряда в правой части (2)).

Положим $m_j = \max\{\eta_r, \eta_0 - 2\eta_{r+1}, \eta_0 - \eta_1 - \eta_{r+j}\}$ для $j = 1, \dots, q-r$ и определим целую величину

$$\Phi_n := \prod_{\sqrt{\eta_0 n} < p \leq m_{q-r} n} p^{\varphi(n/p)},$$

где в произведении участвуют только простые числа и

$$\begin{aligned} \varphi(x) := & \min_{0 \leq y < 1} \left(\sum_{j=1}^r (\lfloor y \rfloor + \lfloor \eta_0 x - y \rfloor - \lfloor y - \eta_j x \rfloor - \lfloor (\eta_0 - \eta_j)x - y \rfloor - 2\lfloor \eta_j x \rfloor) \right. \\ & \left. + \sum_{j=r+1}^q (\lfloor (\eta_0 - 2\eta_j)x \rfloor - \lfloor y - \eta_j x \rfloor - \lfloor (\eta_0 - \eta_j)x - y \rfloor) \right) \end{aligned}$$

— целозначная неотрицательная периодическая (с периодом 1) функция. Через D_N обозначим наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, N$.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

ЛЕММА 1. Величина (2) является линейной формой от $1, \zeta(r+2), \zeta(r+4), \dots, \zeta(q-2)$ с рациональными коэффициентами; более того, справедливо включение

$$D_{m_1 n}^r D_{m_2 n} \cdots D_{m_{q-r} n} \cdot \Phi_n^{-1} \cdot F_n \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\zeta(r+2) + \mathbb{Z}\zeta(r+4) + \cdots + \mathbb{Z}\zeta(q-2). \quad (3)$$

Асимптотика величины Φ_n при $n \rightarrow \infty$ вычисляется с помощью арифметического метода Чудновского–Рухадзе–Хаты (см. вычитаемое в определении постоянной C_1 из формулировки леммы 3 далее). Кроме того, согласно закону распределения простых чисел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log D_{m_j n}}{n} = m_j, \quad j = 1, \dots, q-r.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} f_0(\tau) = & r\eta_0 \log(\eta_0 - \tau) + \sum_{j=1}^q (\eta_j \log(\tau - \eta_j) - (\eta_0 - \eta_j) \log(\tau - \eta_0 + \eta_j)) \\ & - 2 \sum_{j=1}^r \eta_j \log \eta_j + \sum_{j=r+1}^q (\eta_0 - 2\eta_j) \log(\eta_0 - 2\eta_j), \end{aligned}$$

определенную в τ -плоскости с разрезами $(-\infty, \eta_0 - \eta_1]$ и $[\eta_0, +\infty)$. Следующее утверждение, характеризующее рост линейных форм F_n в случае $r = 3$, доказывается с помощью представления величины (2) в виде комплексного интеграла по прямой $\operatorname{Re} t = \text{const}$ с последующим применением к нему асимптотики гамма-функции и метода перевала.

ЛЕММА 2. Пусть $r = 3$ и τ_0 — нуль многочлена

$$(\tau - \eta_0)^r (\tau - \eta_1) \cdots (\tau - \eta_q) - \tau^r (\tau - \eta_0 + \eta_1) \cdots (\tau - \eta_0 + \eta_q)$$

с $\operatorname{Im} \tau_0 > 0$ и максимально возможным значением $\operatorname{Re} \tau_0$. Предположим, что выполнено $\operatorname{Re} \tau_0 < \eta_0$ и $\operatorname{Im} f_0(\tau_0) \notin \pi\mathbb{Z}$. Тогда

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |F_n|}{n} = \operatorname{Re} f_0(\tau_0).$$

Если последовательность линейных форм в левой части (3) с ростом n принимает ненулевые сколь угодно малые значения, то в случае $r = 3$ среди чисел

$$\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(q-4), \zeta(q-2) \quad (4)$$

имеется иррациональное. Поэтому справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $r = 3$ и в приведенных выше обозначениях $C_0 = -\operatorname{Re} f_0(\tau_0)$,

$$C_1 = r m_1 + m_2 + \cdots + m_{q-r} - \left(\int_0^1 \varphi(x) d\psi(x) - \int_0^{1/m_{q-r}} \varphi(x) \frac{dx}{x^2} \right),$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции. Тогда в случае $C_0 > C_1$ по крайней мере одно из чисел (4) иррационально.

Для доказательства теоремы положим $r = 3, q = 13$,

$$\eta_0 = 91, \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 27, \quad \eta_4 = 29, \quad \eta_5 = 30, \quad \eta_6 = 31, \quad \dots, \quad \eta_{12} = 37, \quad \eta_{13} = 38.$$

Тогда $C_0 = 227.58019641 \dots, C_1 = 226.24944266 \dots$, и согласно лемме 3 среди чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ имеется иррациональное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Rivoal // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 2000. V. 331. № 4. P. 267–270. [2] T. Rivoal. Propriétés diophantines des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs. Thèse de Doctorat. Caen: Univ. de Caen, 2001. [3] В. В. Зудилин // УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 215–216. [4] R. Apéry // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Принято редколлегией
18.07.2001