Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, К. Томсен, Отображение Конна–Хигсона является изоморфизмом, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:04:24

ОТОБРАЖЕНИЕ КОННА–ХИГСОНА ЯВЛЯЕТСЯ ИЗОМОРФИЗМОМ

В. М. Мануйлов, К. Томсен

Все основные гомотопические функторы на категории C^* -алгебр так или иначе связаны с расширениями [1], [2]. Связь между асимптотическими гомоморфизмами и расширениями осуществляется с помощью конструкции Конна–Хигсона. В настоящей заметке мы утверждаем, что эта конструкция осуществляет изоморфизм между E -теорией и классами эквивалентности расширений.

Пусть G – локально компактная группа, A и B – сепарабельные G -алгебры, т.е. C^* -алгебры с поточечно непрерывным действием группы G . Мы предполагаем, что B слабо стабильна, т.е. эквивариантно изоморфна алгебре $B \otimes \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ – алгебра компактных операторов с тривиальным действием G . Пусть $M(B)$ – алгебра мультипликаторов алгебры B , $Q(B) = M(B)/B$ – соответствующая факторалгебра, а $q_B: M(B) \rightarrow Q(B)$ – гомоморфизм факторизации. Назовем G -расширение $\varphi: A \rightarrow Q(B)$ (мы отождествляем расширения алгебры A идеалом B с гомоморфизмами $A \rightarrow Q(B)$ с помощью инварианта Басби) *асимптотически расщепимым*, если существует такой асимптотический гомоморфизм $\pi = \{\pi_t\}_{t \in [1, \infty)}: A \rightarrow M(B)$, что $q_B \circ \pi_t = \varphi$ для всех t (все асимптотические гомоморфизмы предполагаются также асимптотически эквивариантными). Назовем G -расширение $\varphi: A \rightarrow Q(B)$ *полуобратимым*, если существует такое G -расширение $\psi \in \text{Hom}_G(A, Q(B))$, что расширение $\varphi \oplus \psi: A \rightarrow Q(B)$ асимптотически расщепимо. Два полуобратимых расширения называются *стабильно унитарно эквивалентными*, если их прямые суммы с некоторым асимптотически расщепимым расширением унитарно эквивалентны. Множество классов эквивалентности полуобратимых расширений образует абелеву группу $\text{Ext}^{-1/2}(A, B)$. Как обычно, через $SA = C_0(0, 1) \otimes A$ мы обозначаем надстройку над алгеброй A .

ТЕОРЕМА 1. *Любое G -расширение $\varphi: SA \rightarrow Q(B)$ полуобратимо.*

Теорема 1 позволяет опустить индекс $-1/2$ и в случае надстройки писать $\text{Ext}(SA, B)$ вместо $\text{Ext}^{-1/2}(SA, B)$.

Пусть $IB = C[0, 1] \otimes B$. Обозначим через $e_t: IB \rightarrow B$ гомоморфизм вычисления в точке $t \in [0, 1]$. Отметим, что e_t определяет эквивариантные гомоморфизмы $M(IB) \rightarrow M(B)$ и $Q(IB) \rightarrow Q(B)$, также обозначаемые через e_t . Два G -расширения $\varphi, \psi \in \text{Hom}_G(A, Q(B))$ *гомотопны*, если существует такое G -расширение $\Phi \in \text{Hom}_G(A, Q(IB))$, что $e_0 \circ \Phi = \varphi$, $e_1 \circ \Phi = \psi$. Множество гомотопических классов G -расширений мы обозначаем через $\text{Ext}(A, B)_h$. В общем случае это абелева полугруппа, но $\text{Ext}(SA, B)_h$ является группой. Через $[[SA, B]]$ обозначим абелеву группу гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов из SA в B [3], [4]. Конструкция Конна–Хигсона [3] очевидным образом определяет гомоморфизм $CH: \text{Ext}(A, B)_h \rightarrow [[SA, B]]$. Поскольку существует канонический эпиморфизм $\text{Ext}(SA, B) \rightarrow \text{Ext}(SA, B)_h$, эта конструкция может рассматриваться как гомоморфизм $CH: \text{Ext}(SA, B) \rightarrow [[S^2A, B]]$. Обозначим через $M(B)_G \subset M(B)$ множество таких элементов $x \in M(B)$, для которых отображение $G \ni g \mapsto g \cdot x$ непрерывно. Аналогично определим $Q(B)_G \subset Q(B)$. Это – G -алгебры, и последовательность $0 \rightarrow B \rightarrow M(B)_G \rightarrow Q(B)_G \rightarrow 0$ точна [5]. Построим отображение $\alpha: [[SA, Q(B)_G \otimes \mathcal{K}]] \rightarrow \text{Ext}(SA, B \otimes \mathcal{K})_h$. Пусть b – строго положительный элемент алгебры $B \otimes \mathcal{K}$, $0 \leq b \leq 1$. Рассмотрим равномерно непрерывный асимптотический гомоморфизм $\varphi = (\varphi_t)_{t \in [1, \infty)}: A \rightarrow Q(B)_G \otimes \mathcal{K}$. Пусть $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \dots$ – последовательность конечных множеств, объединение которых плотно в A , а $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$ – такая последовательность компактных подмножеств в G , что $\bigcup_n K_n = G$.

ЛЕММА 2. *Существует последовательность непрерывных функций $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,*

Работа первого автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01201).

равных нулю в окрестности нуля и таких, что последовательность $u_n = f_n(b)$ удовлетворяет свойствам:

- 1) $0 \leq u_n \leq 1$ и $u_{n+1}u_n = u_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n x = x$ для всех $x \in B \otimes \mathcal{K}$,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g \cdot u_n - u_n\| = 0$ для всех $g \in G$,
- 4) $\|u_n \chi(\varphi_t(a)) - \chi(\varphi_t(a))u_n\| \leq 1/n$ для всех $a \in F_n$, $t \in [1, n+1]$,
- 5) $\|(1 - u_n)(\chi(\varphi_t(ab)) - \chi(\varphi_t(a))\chi(\varphi_t(b)))\| \leq \|\varphi_t(ab) - \varphi_t(a)\varphi_t(b)\| + 1/n$ для всех $t \in [1, n+1]$, $a, b \in F_n$,
- 6) $\|(1 - u_n)(\chi(\varphi_t(a+b)) - \chi(\varphi_t(a)) - \chi(\varphi_t(b)))\| \leq \|\varphi_t(a+b) - \varphi_t(a) - \varphi_t(b)\| + 1/n$ для всех $t \in [1, n+1]$, $a, b \in F_n$,
- 7) $\|(1 - u_n)(g \cdot \chi(\varphi_t(a)) - \chi(\varphi_t(g \cdot a)))\| \leq \|g \cdot \varphi_t(a) - \varphi_t(g \cdot a)\| + 1/n$ для всех $t \in [1, n]$, $a \in F_n$, $g \in K_n$.

Пусть $\{e_{ij}\}_{i,j=0}^\infty$ — элементарные операторы, действующие в гильбертовом модуле $l_2(B \otimes \mathcal{K})$ стандартным образом. Через $\mathbf{K}(M) \subset \mathbf{L}(M)$ мы обозначаем идеал компактных операторов и алгебру операторов, допускающих сопряженный, в гильбертовом модуле M . С помощью последовательности из леммы 3 можно определить трехдиагональный проектор по аналогии с [6].

Ряд $\sqrt{u_0}e_{00} + \sum_{j=1}^\infty \sqrt{u_j - u_{j-1}}e_{0j}$ сходится в строгой топологии к частичной изометрии V в модуле $l_2(B \otimes \mathcal{K})$, удовлетворяющей равенству $VV^* = e_{00}$. Пусть $\{\varphi_{t_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ — дискретизация асимптотического гомоморфизма φ [7], удовлетворяющая условию $t_n \leq n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (идея работать с дискретизациями подсказана работами [8], [9]). Положим $P_{\mathcal{U}} = V^*V$, $\tilde{\varphi}(a) = P_{\mathcal{U}}(\sum_{j=0}^\infty \chi(\varphi_{t_{j+1}}(a))e_{jj})P_{\mathcal{U}}$. Тогда $\tilde{\varphi}: A \rightarrow \mathbf{L}(l_2(B \otimes \mathcal{K})) \cong M(B \otimes \mathcal{K})$ является эквивариантным гомоморфизмом по модулю компактных операторов $\mathbf{K}(l_2(B \otimes \mathcal{K})) \cong B \otimes \mathcal{K}$.

Класс эквивалентности $q_{B \otimes \mathcal{K}} \circ \tilde{\varphi}$ в $\text{Ext}(A, B \otimes \mathcal{K})_h$ не зависит от выбора последовательности из леммы 3 и от выбора дискретизации, а определяется только классом $[\varphi]$ асимптотического гомоморфизма φ . Таким образом, отображение $\alpha: [[A, Q(B)_G \otimes \mathcal{K}]] \rightarrow \text{Ext}(A, B \otimes \mathcal{K})_h$ построено.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место равенство $\text{Ext}(SA, B) = \text{Ext}(SA, B)_h$.*

Из слабой стабильности B следует изоморфность естественного отображения $\beta: [[S^2A, B]] \rightarrow [[S^2M_2(A), B]]$. Пусть $\xi: S^2 \rightarrow \mathcal{K}$ — асимптотический гомоморфизм, полученный из расширения Теплица с помощью конструкции Конна–Хигсона. Этот гомоморфизм определяет отображение $\xi^*: \text{Ext}(S^3M_2(A), B) \rightarrow \text{Ext}(SA, B)$. Напомним, что в [10] было построено отображение $E: [[S^2A, B]] \rightarrow \text{Ext}(S^3A, B)$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть A — сепарабельная G -алгебра, B — σ -унитальная слабо стабильная G -алгебра. Отображение $CH: \text{Ext}(SA, B) \rightarrow [[S^2A, B]]$ является изоморфизмом, обратным к которому является отображение $\chi^* \circ E \circ \beta$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. G. Brown, R. G. Douglas, P. A. Fillmore // Ann. of Math. 1977. V. 105. P. 265–324. [2] G. Kasparov // Invent. Math. 1988. V. 91. P. 513–572. [3] A. Connes, N. Higson // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1990. V. 311. P. 101–106. [4] E. Guentner, N. Higson, J. Trout // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 148. № 703. [5] K. Thomsen // K-theory. 2000. V. 19. P. 219–249. [6] D. Voiculescu // Duke Math. J. 1991. V. 62. P. 267–271. [7] V. M. Manuilov, K. Thomsen // Adv. Math. 2000. V. 154. P. 258–279. [8] A. S. Mishchenko, Noor Mohammad // Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 299–312. [9] В. М. Мануйлов, А. С. Мищенко // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 10. С. 53–74. [10] В. М. Мануйлов, К. Томсен // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 5. С. 142–157.