Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Миллионщиков, Когомологии нильмногообразий и теорема Гончаровой,
УМН, 2001, том 56, выпуск 4, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:43:07

КОГОМОЛОГИИ НИЛЬМНОГООБРАЗИЙ И ТЕОРЕМА ГОНЧАРОВОЙ

Д. В. Миллионщиков

Для построения контрпримера к гипотезе Лаптона–Опри (всякое односвязное симплектическое многообразие является формальным в смысле Сулливана [1]) И. К. Бабенко и И. А. Тайманов рассмотрели в [2] одно очень интересное семейство нильмногообразий M_n . Впервые это семейство появилось в [3] в связи с изучением алгебр Ландвебера–Новикова.

Определим нильпотентную алгебру Ли $\mathcal{V}_n$ базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и коммутационными соотношениями

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & i+j \leq n; \\ 0, & i+j > n. \end{cases}$$

По теореме А. И. Мальцева [4] у соответствующей ей односвязной нильпотентной группы Ли G_n существует равномерная решетка Γ_n . Нильмногообразие G_n/Γ_n обозначим как M_n . В работах В. М. Бухштабера [3], [5] группа G_n и ее равномерные решетки красиво определяются при помощи полиномиальных преобразований вещественной прямой.

Когомологии $H^*(M_n, \mathbb{R})$ изоморфны когомологиям $H^*(\mathcal{V}_n)$ согласно теореме Номидзу [6]. Важным наблюдением в [2] было

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. M_{2k} является симплектическим многообразием с левоинвариантной симплектической формой

$$\Omega_{2k+1} = \sum_{i+j=2k+1, i < j} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j = (2k-1)\omega_1 \wedge \omega_{2k} + (2k-3)\omega_2 \wedge \omega_{2k-1} + \dots + \omega_k \wedge \omega_{k+1},$$

где $\omega_1, \dots, \omega_{2k}$ – двойственный к $e_1, e_2, \dots, e_{2k}$ базис левоинвариантных 1-форм.

В результате симплектического раздутия вдоль симплектического вложения $M_{2k} \rightarrow \mathbb{C}P^{2k+1}$ получается уже односвязное симплектическое многообразие $\widetilde{M}_{2k}$, у которого в когомологиях сохраняется нетривиальное тройное произведение Масси, соответствующее $\langle [\omega_2], [\omega_1], [\omega_2] \rangle$ в $H^*(\mathcal{V}_{2k})$. Это и доказывает неформальность $\widetilde{M}_{2k}$. Вопрос о вычислении $H^*(M_n, \mathbb{R}) = H^*(\mathcal{V}_n)$ оставался открытым.

Первые же шаги в вычислении $H^*(\mathcal{V}_n)$ приводят к известной теореме Гончаровой из теории бесконечномерных алгебр Ли.

Определим алгебру L_k как алгебру Ли полиномиальных векторных полей на $\mathbb{R}^1$, имеющих $x = 0$ нулем кратности $k+1$. Она может быть задана своим базисом

$$e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad i \geq k; \quad [e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}.$$

Таким образом, алгебра $\mathcal{V}_n$ является фактор-алгеброй $\mathcal{V}_n = L_1/L_{n+1}$.

Используя вторую градуировку p комплекса $C^*(L_k) = \oplus_p C_p^*(L_k)$, где $p(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_q}) = i_1 + \dots + i_q$ и вычисляя биградуированные когомологии $H_p^q(L_k)$, Л. В. Гончарова в [7] доказала следующие формулы (гипотеза Гельфанда–Фукса) для чисел Бетти алгебр L_k :

$$\dim H^q(L_k) = \binom{q+k-1}{k-1} + \binom{q+k-2}{k-1}. \quad (1)$$

Для вычисления $H^*(L_1/L_{n+1})$ рассмотрим спектральную последовательность Серра–Хохшильда $\{E_r^{i,j}, d_r\}$ пары (L_1, L_{n+1}) , сходящуюся к $H^*(L_1)$. Полное вычисление всех ее дифференциалов d_r приводит к значительным техническим трудностям комбинаторного плана, но можно отметить следующие факты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00090).

ЛЕММА 2. При $q \leq \frac{1}{3}(n+1)$ выполняется

$$E_3^{i,j} = E_\infty^{i,j} = 0, \quad i+j=q, \quad j \neq 0; \quad E_3^{q,0} = E_\infty^{q,0} = H^q(L_1);$$

$$E_2^{q,0} = H^q(L_1/L_{n+1}) = \text{Im } d_2(E_2^{q-2,1}) \oplus H^q(L_1),$$

$$\text{Im } d_2(E_2^{q-2,1}) = [\Omega_{n+1}]H^{q-2}(L_2) \oplus [\Omega_{n+1}]^2H^{q-4}(L_3) \oplus [\Omega_{n+1}]^3H^{q-6}(L_4) \oplus \dots,$$

где $[\Omega_{n+1}]$ – двумерный класс когомологий формы $\Omega_{n+1} = \sum_{i+j=n+1, 1 \leq i < j} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j$.

СЛЕДСТВИЕ 3. При $q \leq \frac{1}{3}(n+1)$ имеется биградуированный изоморфизм

$$H^q(L_1/L_{n+1}) = H^q(L_1) \oplus [\Omega_{n+1}]H^{q-2}(L_2) \oplus [\Omega_{n+1}]^2H^{q-4}(L_3) \oplus [\Omega_{n+1}]^3H^{q-6}(L_4) \oplus \dots$$

Теперь, используя значения (1) для $\dim H^{q-2i}(L_{i+1})$, мы можем подсчитать размерность $\dim H^q(L_1/L_{n+1})$ при $q \leq \frac{1}{3}(n+1)$:

$$\dim H^q(L_1/L_{n+1}) = \binom{q}{0} + \binom{q-1}{0} + \binom{q-1}{1} + \binom{q-2}{1} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-3}{2} + \dots$$

Последняя сумма есть не что иное, как сумма элементов двух соседних диагоналей треугольника Паскаля, а она, как известно, равняется $(q+2)$ -му числу Фибоначчи F_{q+2} . Таким образом, приходим к основной теореме:

ТЕОРЕМА 4. Число Бетти $b_q(M_n) = \dim(H^q(\mathcal{V}_n))$ стабилизируется при $n \geq 3q-1$ и равняется $(q+2)$ -му числу Фибоначчи F_{q+2} :

$$b_1(M_n) = 2, \quad b_2(M_n) = 3, \quad b_3(M_n) = 5, \quad \dots, \quad b_q(M_n) = F_{q+2}, \quad n \geq 3q-1.$$

ПРИМЕР 5. Рассмотрим первые размерности $q = 1, 2, 3$ ($n \geq 3q-1$ в каждом случае):

- 1) $H^1(\mathcal{V}_n) = \langle [\omega_1], [\omega_2] \rangle$;
- 2) $H^2(\mathcal{V}_n) = \langle [\omega_1 \wedge \omega_4], [\omega_2 \wedge \omega_5 + \frac{3}{2}\omega_1 \wedge \omega_6], [\Omega_{n+1}] \rangle$;
- 3) в $H^3(\mathcal{V}_n)$ имеется 5 образующих: g_{12}, g_{15} (образующие из $H^3(L_1)$ с второй градуировкой 12, 15 соответственно [7]) и три коцикла

$$[\omega_2] \wedge [\Omega_{n+1}], \quad [\omega_2 \wedge \Omega_{n+2} - n\omega_3 \wedge \Omega_{n+1}], \quad \left[\omega_2 \wedge \Omega_{n+3} - (n+1)\omega_3 \wedge \Omega_{n+2} + \frac{n(n+1)}{2}\omega_4 \wedge \Omega_{n+1} \right],$$

$$\text{где } \Omega_{n+2} = \sum_{i+j=n+2, 2 \leq i < j} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j, \quad \Omega_{n+3} = \sum_{i+j=n+3, 3 \leq i < j} (j-i)\omega_i \wedge \omega_j.$$

Автор выражает благодарность Л. А. Алая, И. К. Бабенко, В. М. Бухштаберу и В. Ю. Овсиенко за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Lupton, J. Oprea // J. Pure Appl. Algebra. 1994. V. 91. P. 193–207. [2] И. К. Бабенко, И. А. Тайманов // УМН. 1998. Т. 53. №5. С. 225–226. [3] В. М. Бухштабер, А. В. Шокуров // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. №3. С. 1–11. [4] А. И. Мальцев // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 3. С. 9–32. [5] В. М. Бухштабер // УМН. 1999. Т. 54. №4. С. 161. [6] К. Nomizu // Ann. of Math. 1954. V. 59. P. 531–538. [7] Л. В. Гончарова // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7. №2. С. 6–14.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: million@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
01.06.2001