Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Плахов, А. М. Степин, Рассеяние и группы Кокстера, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm43>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 05:03:37

РАССЕЯНИЕ И ГРУППЫ КОКСТЕРА

А. Ю. ПЛАХОВ, А. М. СТЕПИН

Рассматриваются гамильтоновы системы в области $\{x_1 < \dots < x_d\} \subset \mathbb{R}^d$ с гамильтонианом вида

$$(1) \quad H = \sum_{i=1}^d \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{ij}(x_j - x_i)$$

и бильярдные системы в некомпактных областях, обладающие рассеянием.

Будем говорить, что движение $p(t), x(t), a$ системы с гамильтонианом (1) или б) бильярдной системы, имеет асимптотический импульс вперед p^+ (соответственно назад p^-), если существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = p^+$ (соответственно $\lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = p^-$). Асимптотический импульс (p^+ или p^-) можно рассматривать как функцию на подмножестве фазового пространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть M^+ – множество асимптотических импульсов вперед тех траекторий, для которых существует и асимптотический импульс назад. Если

$$(2) \quad u_{ij} \in C^2(\mathbb{R}^+), \quad \int_0^\infty |u'_{ij}(x)| dx < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} u_{ij}(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{u'_{ij}(x)}{u_{ij}(x)} = -\infty,$$

то M^+ обладает следующим свойством:

для любого вектора $v = (v_1, \dots, v_d)$, $v_1 < \dots < v_d$, существует $t_0 \in \mathbb{R}^+$ такое, что $tv \in M^+$ для каждого $t > t_0$.

Аналогичное утверждение имеет место и для множества M^- , которое получается из M^+ обращением времени.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассеяние для гамильтоновых систем назовем простым, если

1. для любого вектора $v = (v_1, \dots, v_d)$, $v_1 > \dots > v_d$, достаточно большой длины (зависящей от направления v) существует такое движение, что для него $p^- = v$ и существует p^+ ;
2. на M^- существует функция f такая, что $p^+ = f(p^-)$.

Для бильярда в области V простое рассеяние определяется аналогично со следующим изменением пункта 1: для любого $v \in \mathbb{R}^d$ такого, что полупрямая tv , $t > 0$, пересекает V по лучу, существует движение, для которого $p^- = v$ и существует p^+ .

Системе с гамильтонианом (1) сопоставим бильярдную систему с обобщенным гамильтонианом

$$(3) \quad H = \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 + \sum_{i < j} \delta(\sqrt{m_i} x_i - \sqrt{m_j} x_j).$$

Связные компоненты конфигурационного пространства этой системы суть многогранные конусы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если система с гамильтонианом (1) и условиями на потенциальные функции (2) имеет простое рассеяние, то соответствующая бильярдная система (3) также имеет простое рассеяние.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это предложение есть частный случай общего утверждения о предельном поведении отображения рассеяния, когда постоянная энергии стремится к бесконечности.

Бильярды в многогранных конусах с простым рассеянием описывает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Бильярд в выпуклом коническом многограннике V имеет простое рассеяние, если и только если V – камера некоторой группы Кокстера.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть V – конус с кусочно-гладкой границей и выпуклыми внутрь конуса гладкими компонентами границы. Тогда из простоты рассеяния бильярда в V следует, что V – камера некоторой группы Кокстера.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-00043 и № 96-01-00713).

Скажем, что выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^d$, содержащий некоторый конус с непустой внутренностью, ассоциирован с группой Кокстера W , если линейные части отражений относительно его граней порождают W и некоторый параллельный сдвиг многогранника содержится в камере группы W .

ТЕОРЕМА 1'. *Бильярд в выпуклом многограннике V с конечным числом граней имеет простое рассеяние, если и только если V ассоциирован с некоторой группой Кокстера.*

Из предложения 2 и теоремы 1 выводится

ТЕОРЕМА 2. *Если система с гамильтонианом (1) удовлетворяет условиям (2) и имеет простое рассеяние, то набор масс $\{m_i\}$ принадлежит следующему списку (с точностью до перестановки индексов $i \rightarrow n+1-i$):*

$$(A_{d-1}) \quad m_i = \frac{c}{(i-1+k)(i+k)}, \quad i = 1, \dots, d, \quad k > 0;$$

в пределе $k \rightarrow \infty$, $\lim(c/k^2) = m$, получаем случай одинаковых масс $m_i = m$;

$$(B_{d-1}) \quad m_i = \frac{c}{(i-1+k)(i+k)}, \quad i = 1, \dots, d-1, \quad m_d = \frac{c}{d-1+k}, \quad k > 0;$$

$$(F_4) \quad d = 5, \quad m_1 = \frac{c}{k-1}, \quad m_2 = \frac{c}{k+1}, \quad m_3 = \frac{c}{(k+1)(2k^{-1}+1)}, \\ m_4 = \frac{c}{2k^{-1}+1}, \quad m_5 = \frac{c}{2k^{-1}-1}, \quad 1 < k < 2;$$

$$(H_3) \quad d = 4, \quad m_1 = \frac{c}{(k-3)(k-2)}, \quad m_2 = \frac{c}{(k-2)(k-1)}, \\ m_3 = \frac{c}{(k-1)k}, \quad m_4 = \frac{c}{k+(2-\sqrt{5})k^2}, \quad 3 < k < 2+\sqrt{5};$$

$$(H_4) \quad d = 5, \quad m_1 = \frac{c}{(k-4)(k-3)}, \quad m_2 = \frac{c}{(k-3)(k-2)}, \quad m_3 = \frac{c}{(k-2)(k-1)}, \\ m_4 = \frac{c}{(k-1)k}, \quad m_5 = \frac{c}{k+(2-\sqrt{5})k^2}, \quad 4 < k < 2+\sqrt{5};$$

$$(I_2(n)) \quad d = 3, \quad \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}, \quad n \geq 5 \quad - \text{целое.}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично (с использованием теоремы 1') устанавливается, что для системы с гамильтонианом $H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j} u_{ij}(x_j - x_i - c_{ij})$, удовлетворяющей условию (2) и имеющей простое рассеяние, набор масс принадлежит приведенному списку.

Для областей с криволинейной границей имеют место следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $V \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклая область с гладкой границей, содержащая некоторый конус с непустой внутренностью. Тогда бильярд в V имеет простое рассеяние, если и только если V – полупространство.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть V – выпуклая область в $\mathbb{R}^d$ с кусочно-гладкой границей и трансверсальным пересечением гладких компонент границы. Предположим, что число отражений бильярдной траектории от границы равномерно ограничено. Тогда бильярд в V имеет простое рассеяние в том и только том случае, если V – многогранник, ассоциированный с некоторой группой Кокстера.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть $V \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклая область, содержащая некоторый угол. Тогда бильярд в V имеет простое рассеяние в том и только том случае, если V – многоугольник, ассоциированный с группой Кокстера $I_2(n)$, действующей на плоскости.*