Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, Формальный ряд для τ -функции, реализующей теорему Римана об областях комплексной плоскости, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:15:40

ФОРМАЛЬНЫЙ РЯД ДЛЯ τ -ФУНКЦИИ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ ТЕОРЕМУ РИМАНА ОБ ОБЛАСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

С. М. НАТАНЗОН

1. Пусть D_+ – содержащая 0 связная область с аналитической границей на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда согласно теореме Римана существует аналитическая функция $w(z) = \frac{1}{r}z + \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^{-j}$, переводящая $D_- = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_+$ во внешность единичного круга $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$. Согласно [1] эта функция задается равенством

$$\log w = \log z - \partial_{t_0} \left(\frac{1}{2} \partial_{t_0} + \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \partial_{t_k} \right) v,$$

где $v = v(t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, \dots)$ – функция от бесконечного числа переменных

$$t_0 = \frac{1}{\pi} \int_{D_+} d^2 z, \quad t_k = \frac{1}{\pi k} \int_{D_-} z^{-k} d^2 z,$$

удовлетворяющая бездисперсионному пределу иерархии двумерной цепочки Toda:

$$(z - \xi) e^{D(z)D(\xi)v} = z e^{-\partial_{t_0} D(z)v} - \xi e^{-\partial_{t_0} D(\xi)v}, \quad (1)$$

$$(\bar{z} - \bar{\xi}) e^{\overline{D}(\bar{z})\overline{D}(\bar{\xi})v} = \bar{z} e^{-\partial_{t_0} \overline{D}(\bar{z})v} - \bar{\xi} e^{-\partial_{t_0} \overline{D}(\bar{\xi})v}, \quad (2)$$

$$1 - e^{-D(z)\overline{D}(\bar{\xi})v} = \frac{1}{z\bar{\xi}} e^{\partial_{t_0}(\partial_{t_0} + D(z) + \overline{D}(\bar{\xi}))v} \quad (3)$$

и

$$D(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \partial_{t_k}, \quad \overline{D}(\bar{z}) = \sum_{k \geq 1} \frac{\bar{z}^{-k}}{k} \partial_{\bar{t}_k}.$$

Таким образом, для построения функции $w(z)$ достаточно найти представление функции v в виде ряда Тейлора

$$v = \sum N(i|i_1, \dots, i_k | \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k) t_0^i t_{i_1} \dots t_{i_k} \bar{t}_{\bar{i}_1} \dots \bar{t}_{\bar{i}_k}.$$

Для $i_\alpha, \bar{i}_\beta \leq 2$ числа $N(i|i_1, \dots, i_k | \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k)$ найдены в [1]. В настоящей работе получены рекуррентные соотношения, позволяющие найти все коэффициенты $N(i|i_1, \dots, i_k | \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k)$.

2. Положим $\partial_i = \partial_{t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i}$ и $\bar{\partial}_i = \partial_{\bar{t}_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}$.

Пусть $P_{ij}(s_1 - 1, \dots, s_m - 1)$ – число разложений вида $\{i = i_1 + \dots + i_m \mid 1 \leq i_k \leq s_k - 1, k = 1, \dots, m\}$ числа i .

Положим $T_{ij}(p_1 \dots p_m) = \sum_{n_1 + \dots + n_k = m} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \frac{1}{n_1! \dots n_k!} P_{ij}(p_1 + \dots + p_{q_1} - 1, \dots, p_{q_{k-1}} + 1 + \dots + p_{q_k} - 1)$, где $q_j = \sum_{i=1}^j n_i$. Определим величины

$$T_{i_1 \dots i_k} \left(\begin{matrix} s_1 \dots s_m \\ \ell_1 \dots \ell_m \end{matrix} \right)$$

рекуррентными формулами

$$T_{i_1 i_2} \left(\begin{smallmatrix} s_1 \dots s_m \\ 1 \dots 1 \end{smallmatrix} \right) = T_{i_1 i_2}(s_1 \dots s_m),$$

$$T_{i_1 \dots i_k} \left(\begin{smallmatrix} s_1 \dots s_m \\ \ell_1 \dots \ell_m \end{smallmatrix} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ s, \ell > 0}} T_{i_1 \dots i_{k-1}} \left(\begin{smallmatrix} s_1 \dots s_{i-1} s s_{j+1} \dots s_m \\ \ell_1 \dots \ell_{i-1} \ell \ell_{j+1} \dots \ell_m \end{smallmatrix} \right) \\ \times T_{s i_k}(s_i, s_{i+1}, \dots, s_j) \frac{\ell!}{(\ell_i - 1)! \dots (\ell_j - 1)!},$$

где $s = s_i + s_{i+1} + \dots + s_j - i_k$, $\ell = (\ell_i - 1) + \dots + (\ell_j - 1)$.

При $\sum_{j=1}^k i_j \neq i$ или $\sum_{j=1}^{\bar{k}} \bar{i}_j \neq i$ положим $N_i(i_1 \dots i_k \mid \bar{i}_1 \dots \bar{i}_{\bar{k}}) = 0$. В противном случае, положим

$$N_i(i_1 \dots i_k \mid \bar{i}_1 \dots \bar{i}_{\bar{k}}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{s_1 + \dots + s_m = i_1 + \dots + i_k \\ \ell_1 + \dots + \ell_m = m + k - 2 \\ s_j, \ell_j \geq 1}} i_1 \dots i_k \bar{i}_1 \dots \bar{i}_{\bar{k}} \right. \\ \left. \times \frac{(s_1 - 1)! \dots (s_m - 1)!}{(s_1 - k + 1)! \dots (s_m - k + 1)!} \cdot T_{i_1 \dots i_k} \left(\begin{smallmatrix} s_1 \dots s_m \\ \ell_1 \dots \ell_m \end{smallmatrix} \right) S_{i_1 \dots i_k}(s_1, \dots, s_m) \right),$$

где $S_{i_1 \dots i_k}(s_1, \dots, s_m)$ — число разбиений множества $\{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{\bar{k}}\}$ на группы $\{j_1^p, \dots, j_{n_p}^p\}$ ($p = 1, \dots, m$) такие, что $\sum_{\alpha=1}^{n_p} j_{\alpha}^p = s_p$.

ТЕОРЕМА.

$$v = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ \bar{i}_1 < \dots < \bar{i}_{\bar{k}}}} \sum_{n_j, \bar{n}_j=1}^{\infty} \frac{1}{n_1! \dots n_k! \bar{n}_1! \dots \bar{n}_{\bar{k}}!} N_i \left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_k \\ n_1 \dots n_k \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} \bar{i}_1 \dots \bar{i}_{\bar{k}} \\ \bar{n}_1 \dots \bar{n}_{\bar{k}} \end{smallmatrix} \right) \\ \times t_0^{i-(k+\bar{k})+2} t_{i_1}^{n_1} \dots t_{i_k}^{n_k} \bar{t}_{\bar{i}_1}^{\bar{n}_1} \dots \bar{t}_{\bar{i}_{\bar{k}}}^{\bar{n}_{\bar{k}}},$$

где

$$N_i \left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_k \\ n_1 \dots n_k \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} \bar{i}_1 \dots \bar{i}_{\bar{k}} \\ \bar{n}_1 \dots \bar{n}_{\bar{k}} \end{smallmatrix} \right) = 0,$$

если $i \neq \sum_{j=1}^k n_j i_j$ или $i \neq \sum_{j=1}^{\bar{k}} \bar{n}_j \bar{i}_j$. В противном случае

$$N_i \left(\begin{smallmatrix} i_1 \dots i_k \\ n_1 \dots n_k \end{smallmatrix} \mid \begin{smallmatrix} \bar{i}_1 \dots \bar{i}_{\bar{k}} \\ \bar{n}_1 \dots \bar{n}_{\bar{k}} \end{smallmatrix} \right) = N_i(i_1 \dots i_1 i_2 \dots i_2 \dots i_k \dots i_k \mid \bar{i}_1 \dots \bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_2 \dots \bar{i}_{\bar{k}} \dots \bar{i}_{\bar{k}}),$$

где в последней скобке число i_j (соответственно, число $\bar{i}_j$) встречается n_j (соответственно $\bar{n}_j$) раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] I. K. Kostov, I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin. τ -function for analytic curves // arXiv:hep-th/0005259.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Независимый московский университет
E-mail: natanzon@mcsme.ru

Принято редколлегией
03.08.2001