Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Силаев, О ленточной размерности кольца формальных степенных рядов,
УМН, 2001, том 56, выпуск 4, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:21:13

О ЛЕНТОЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ КОЛЬЦА ФОРМАЛЬНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В. Н. СИЛАЕВ

В 1991 г. Гудерл, Менал и Монкази доказали [1], что любая алгебра A с 1 над полем F может быть вложена в алгебру $B(F)$ всех $(\omega \times \omega)$ -матриц над полем F , в каждой строке и каждом столбце которых содержится лишь конечное число отличных от нуля элементов. В [2] О'Мира и Ханнах ввели понятие кривой роста, определенное для любой матрицы из $B(F)$. Используя результат Гудерла, Менала и Монкази, описанный выше, они получили функцию ленточной размерности. Там же ими был сформулирован список открытых проблем по теории ленточной размерности. Одним из подходов к решению некоторых из них было изучение возможности вложения кольца формальных степенных рядов $F[[x]]$ в кольцо матриц $O(1)$ -роста, что и исследуется в данной работе. Напомним основные определения.

Для любого элемента x из алгебры $B(F)$ функция $g(n)$, определенная на множестве натуральных чисел, называется *кривой роста* матрицы x , если для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ $x(i, n) = x(n, i) = 0$ для всех номеров i таких, что $i > n + g(n)$. Говорят, что матрица $x \in B(F)$ имеет *порядок роста* $g(n)$ (или что x имеет $O(g(n))$ -рост), где $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что функция $cg(n)$ является кривой роста для матрицы x .

Если A — подалгебра в $B(F)$ и каждый элемент из A имеет $O(\Phi(n))$ -рост, то говорят, что сама алгебра A имеет $O(\Phi(n))$ -рост. Матрицы с кривой роста вида $f(n) = cn^\alpha$, где α — произвольное фиксированное значение, $\alpha \in [0, 1]$, образуют подалгебру в $B(F)$, обозначаемую $G(\alpha)$. Введем также обозначение $W_\alpha(c) = \{x \in B(F) \mid x \text{ имеет кривую роста } cn^\alpha\}$, $W_\alpha(c)$ является подпространством $B(F)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Ленточной размерностью* (bw. dim) алгебры A называется величина $\inf\{\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0 \mid A \text{ вкладывается в } G(\alpha)\}$.

Функция ленточной размерности принимает значения в промежутке $[0, 1]$, причем все значения из $[0, 1]$, на множестве алгебр с 1 над полем F , как показано в [2].

ТЕОРЕМА 1. *Для любого поля F $\text{bw. dim } F[[x]] = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что $F[[x]] \subset G(r)$ для любого $r > 0$. Тогда так как $r \in [0, 1]$, то $0 \leq \inf\{r \in \mathbb{R}, r \geq 0 \mid F[[x]] \text{ вкладывается в } G(r)\} \leq 0$, откуда $\text{bw. dim } F[[x]] = 0$, что и требуется доказать.

ЛЕММА 1. *Пусть $|F| = L < \infty$, $A \in B(F)$; $\{A, A^2, \dots, A^n, \dots\} \subset W_k(0)$. Тогда найдется многочлен $P(x) \neq 0$, $\deg P(x) \leq L(2k+2)(2k+1)$ такой, что $P(A) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим A как оператор на счетномерном пространстве V с фиксированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$. Тогда для любого i справедливо $\{e_i, Ae_i, A^2e_i, \dots\} \subset \langle e_{i-k}, \dots, e_i, \dots, e_{i+k} \rangle$. Отсюда следует, что найдется многочлен $P_i(x) \neq 0$, $\deg P_i(x) \leq 2k+1$, такой, что $P_i(A)e_i = 0$. Количество различных ненулевых многочленов степени не больше $2k+1$ над полем, состоящим из L элементов, не превосходит $(2k+2)L$. Взяв их произведение, получим многочлен, обладающий искомыми свойствами, степени не больше $(2k+2)(2k+1)L$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. $F[[x]] \not\subset G(0) = \{x \in B(F) \mid x \text{ имеет кривую роста } C = C(x) - \text{константа, зависящая от } x\}$. Другими словами, не существует вложения $F[[x]]$ в кольцо DFM счетномерных матриц с конечным числом ненулевых над- и поддиагоналей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Предположим, что существует такое вложение $\varphi: F[[x]] \rightarrow G(0)$. Обозначим через A матрицу $\varphi(x)$. Матрицы из $G(0)$ можно рассматривать как операторы в счетномерном пространстве V , если там фиксировать базис. Теперь для любого $v \neq 0$ рассмотрим ряд векторов $v, Av, A^2v, A^3v, \dots$. Для него есть две возможности: а) $v, Av, A^2v, A^3v, \dots, A^nv, \dots$ — линейно независимая система векторов; б) $v, Av, A^2v, A^3v, \dots, A^nv, \dots$ — линейно зависящая система векторов. Тогда существует многочлен $P(x) \neq 0$ такой, что $P(A)v = 0$. Выберем многочлен наименьшей степени с единичным старшим коэффициентом. Он существует и единственен для

каждого v ; обозначим его $P_v(x)$. Далее, $P_v(x) = x^n(a_0 + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k) = x^n P'_v(x)$, где $a_0 \neq 0$, $P'_v(x)$ — обратим в $F[[x]]$. Тогда имеем $\varphi(P'_v(x))\varphi(P_v(x)x^n)v = \varphi(x^n)v = A^n v = 0$. Отсюда так как степень многочлена выбирали наименьшей, то $P_v(x) = x^n$, $A^n v = 0$, $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$ — линейно независимая система. Таким образом, для любого $v \neq 0$ возможны два случая: а) $\{v, Av, \dots\}$ — линейно независимая система; б) $A^n v = 0$, $\{v, \dots, A^{n-1}v\}$ — линейно независимая система.

Б) Введем обозначение $V_0 = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} A^n v = 0\}$. Тогда V_0 — подпространство V , $AV_0 \subset V_0$.

ЛЕММА 2. Для любого $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \in F[[x]]$ оператор $f(A) = a_0 + a_1A + \dots + a_nA^n + \dots$ определен корректно на V_0 и $\varphi(f) = f(A)$ на V_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $v \in V_0$ $f(A)v$ определено корректно и $\varphi(f)v = f(A)v$. Таким образом, получаем, что $\varphi(F[[x]])V_0 \subset V_0$.

В) Поэтому можно рассмотреть действие $\varphi(F[[x]]) : V/V_0$. Допустим, что $V/V_0 \neq 0$. Возьмем произвольный v , $0 \neq v \in V/V_0$. Покажем, что тогда для любого $f(x) \in F[[x]]$, $f(x) \neq 0$, выполняется $\varphi(f)v \neq 0$. Действительно, $f(x) = x^m(a_m + a_{m+1}x + \dots)$, где $a_m \neq 0$; $\varphi(f)v = \varphi((a_m + a_{m+1}x + \dots))\varphi(x^m)v \neq 0$, так как $A = \varphi(x)$ — инъективен на V/V_0 и ненулевые векторы переводит в ненулевые, а оператор $\varphi((a_m + a_{m+1}x + \dots))$ обратим на V/V_0 , поскольку ряд $(a_m + a_{m+1}x + \dots)$ обратим в $F[[x]]$. Выберем континуальный базис $\{f_\nu\}$ в $F[[x]]$. Тогда $\{\varphi(f_\nu)v\}$ линейно независимы в силу $\varphi(f)v \neq 0$. Таким образом, получаем противоречие со счетномерностью V/V_0 . Отсюда следует, что $V/V_0 = 0$ и $V = V_0$.

Г) ЛЕММА 3. Пусть $A = \varphi(x)$, тогда $\{A, A^2, \dots, A^n, \dots\} \not\subset W_k(0)$ ни для какого фиксированного k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в $V = V_0$ базис $\{e_i\}_{i=1}^\infty$. Тогда для любого i выполняется $\{e_i, Ae_i, A^2e_i, \dots\} \subset L$, где $L = \langle e_{i-k}, \dots, e_i, \dots, e_{i+k} \rangle$. Отсюда следует, что найдется многочлен $P_i(x) \neq 0$, $\deg P_i(x) \leq 2k+1$, такой, что $P_i(A)e_i = 0$. Мы знаем, что минимальный аннулирующий A на e_i многочлен имеет вид x^{n_i} , откуда $A^{n_i}e_i = 0$ и для любого i $n_i \leq 2k+1$. Следовательно, $A^{2k+1}e_i = 0$ для любого i . Отсюда $A^{2k+1} = 0$ — противоречие с тем, что φ — вложение.

Д) Таким образом, (i) ненулевые матричные элементы матриц A^n удаляются от главной диагонали с ростом n ; (ii) в то же время для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $M \in \mathbb{N}$ такое, что $A^{M'}e_i = 0$ для любого i , $1 \leq i \leq N$, и для любого M' , $M' \geq M$ (поскольку $V = V_0$). Выберем, пользуясь (i) и (ii), последовательности натуральных чисел $\{n_l\}_{l=1}^\infty$, $\{k_l\}_{l=1}^\infty$, $\{i_l\}_{l=1}^\infty$, $\{j_l\}_{l=1}^\infty$ такие, что для любого l : $n_{l+1} > n_l$, $k_{l+1} > k_l$, и выполнены следующие свойства: $(A^{n_l})_{i_l j_l} \neq 0$, $|i_l - j_l| = k_l$; $A^n \in W_{k_l-1}(0)$ для любого n , $n < n_l$; для любого m , $m < l$, $(A^{n_l})_{i_m j_m} = 0$. Тогда корректно определенная по п. Б) матрица $(A^{n_1} + A^{n_2} + \dots + A^{n_l} + \dots)$ будет обладать следующими свойствами: для любого l справедливо $(A^{n_1} + A^{n_2} + \dots + A^{n_l} + \dots)_{i_l j_l} = (A^{n_l})_{i_l j_l} \neq 0$; для $f(x) = x^{n_1} + x^{n_2} + \dots + x^{n_l} + \dots \in F[[x]]$ выполнено $\varphi(f) = A^{n_1} + A^{n_2} + \dots + A^{n_l} + \dots$. Получаем, что $(\varphi(f))_{i_l j_l} \neq 0$, причем $|i_l - j_l| \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $(\varphi(f)) \notin G(0)$, что является противоречием с исходным предположением. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. R. Goodearl, P. Menal, J. Moncasi // J. Algebra. 1993. V. 156. № 2. P. 407–432.
- [2] J. Hannah, K. C. O'Meara. A new measure of growth for countable-dimensional algebras I // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347. № 1. P. 117–136.