Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, Относительные поперечники классов дифференцируемых функций в метрике L^2 , *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm432>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 10:14:20

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКЕ L^2

Ю. Н. СУББОТИН, С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ

Понятие относительного поперечника введено В.Н. Коноваловым [1]. Пусть W и V — центрально-симметричные множества банахова пространства X . Тогда n -мерным поперечником множества W относительно множества V в пространстве X называется величина

$$K_n(W, V, X) := \inf_{l_n} \sup_{f \in W} \inf_{g \in V \cap l_n} \|f - g\|_X,$$

где нижняя грань берется по всем n -мерным подпространствам l_n пространства X .

При $V = X$ относительный поперечник $K_n(W, X, X)$ совпадает с n -мерным колмогоровским поперечником множества W в пространстве X , который будем обозначать $d_n(W, X)$. Понятно, что для любого множества V справедливо неравенство

$$K_n(W, V, X) \geq d_n(W, X). \quad (1)$$

Сейчас нас будет интересовать вопрос, когда в (1) имеет место знак равенства.

Пусть MW_C^r , $r = 1, 2, \dots$, — класс 2π -периодических функций, у которых производная порядка $r - 1$ удовлетворяет условию Липшица $|f^{(r-1)}(x') - f^{(r-1)}(x'')| \leq M|x' - x''|$, а MW_L^r , $r = 1, 2, \dots$, — класс 2π -периодических функций, у которых вариация производной порядка $r - 1$ на периоде не превосходит числа M . При $M = 1$ пишем W_C^r и W_L^r соответственно.

В [2] приведен обзор основных результатов об относительных поперечниках

$$K_n(W_C^r, MW_C^r, C) \text{ и } K_n(W_L^r, MW_L^r, L),$$

который мы не будем здесь повторять. Отметим только, что из результатов В.Н. Коновалова и В.Ф. Бабенко следует, что при $M = 1$ и $r \geq 3$ указанные относительные поперечники при $n \rightarrow \infty$ имеют порядок n^{-2} , а при фиксированном $M > 1$ они для всех r имеют тот же порядок, что и соответствующие колмогоровские поперечники.

В [2] найдены условия на M , достаточные, для того чтобы имели место равенства

$$K_n(W_C^r, MW_C^r, C) = d_n(W_C^r, C) \text{ и } K_n(W_L^r, MW_L^r, L) = d_n(W_L^r, L).$$

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для относительных поперечников $K_n(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2)$, где $MW_{L^2}^r$, $r = 1, 2, \dots$, — класс функций периода 2π , для L^2 -нормы производной порядка r которых выполняется оценка

$$\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq M.$$

Заметим, что при $M = 0$ класс $MW_{L^2}^r$ представляет собой одномерное пространство констант.

В частности, будет установлено, что для $W_{L^2}^r$ в отличие от соответствующих результатов для классов W_C^r и W_L^r наименьшее значение M , при котором указанные относительные поперечники совпадают с колмогоровскими, меньше 1.

Известно (см. [3; §10.3]), что

$$d_{2m-1}(W_{L^2}^r, L^2) = d_{2m}(W_{L^2}^r, L^2) = m^{-r}, \quad m = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА. Пусть m и r — натуральные числа. Наименьшее число $M = M(m, r)$, при котором справедливы равенства

$$K_{2m-1}(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2) = K_{2m}(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2) = m^{-r},$$

равно

$$1 - m^{-r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $\cos x$ принадлежит классу $W_{L^2}^r$, то для произвольного числа M имеем

$$K_{2m}(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2) \geq \inf_{g \in MW_{L^2}^r} \|\cos x - g(x)\|_{L^2}. \quad (2)$$

Если $M < 1$, то в силу ортогональности тригонометрической системы

$$\inf_{g \in MW_{L^2}^r} \|\cos x - g(x)\|_{L^2} = 1 - M.$$

Поэтому из (2) вытекает оценка

$$K_{2m}(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2) \geq 1 - M.$$

Значит, для того чтобы выполнялось равенство

$$K_{2m}(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2) = m^{-r},$$

необходимо следующее условие на M

$$1 - M \leq m^{-r},$$

т.е. условие

$$M \geq 1 - m^{-r}.$$

Покажем теперь, что при $M = 1 - m^{-r}$ справедлива оценка

$$K_{2m-1}(W_{L^2}^r, MW_{L^2}^r, L^2) \leq m^{-r}. \quad (3)$$

Пусть функция $f(x) \in W_{L^2}^r$ и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ее ряд Фурье. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) \leq 1. \quad (4)$$

Рассмотрим полином

$$T_{m-1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} (1 - m^{-r}) (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Так как

$$\|T_{m-1}^{(r)}\|_{L^2}^2 = (1 - m^{-r})^2 \sum_{k=1}^{m-1} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2),$$

то из (4) следует, что

$$T_{m-1} \in (1 - m^{-r}) W_{L^2}^r.$$

Оценим приближение функции f полиномом T_{m-1} :

$$\|f - T_{m-1}\|_{L^2}^2 = m^{-2r} \sum_{k=1}^{m-1} (a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=m}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq m^{-2r} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} (a_k^2 + b_k^2) \leq m^{-2r}.$$

Итак, каждая функция из $W_{L^2}^r$ может быть приближена по норме пространства L^2 с погрешностью m^{-r} тригонометрическими полиномами порядка $m - 1$, принадлежащими классу $(1 - m^{-r}) W_{L^2}^r$. А это означает справедливость неравенства (3) при $M = 1 - m^{-r}$.

Таким образом, теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Коновалов // Матем. заметки. 1984. Т. 35. С. 369–380. [2] Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский // Матем. заметки. 1999. Т. 65. С. 871–879. [3] Н. П. Корнейчук. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.

Институт математики и механики УрО РАН;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Принято редколлегией
21.06.2001