Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Иванов, Поведение ограниченных решений квази-
линейных эллиптических уравнений, *УМН*, 2006, том 61,
выпуск 6, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm4321>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:52:53

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Поведение ограниченных решений
квазилинейных эллиптических уравнений

А. Б. Иванов

Пусть K — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Будут изучаться ограниченные решения следующего уравнения:

$$\operatorname{div}(|\mathcal{D}u|^{p-2}\mathcal{D}u) = c(x)|u|^{p-2}u, \quad (1)$$

где $c(x) \in L_{p/(p-1), \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ — неотрицательная функция, $\mathcal{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — оператор градиента, а $p > 1$ — некоторое вещественное число.

Под решением уравнения (1) мы подразумеваем функцию $u \in W_{p, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^n \setminus K) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$-\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\mathcal{D}u|^{p-2}\mathcal{D}u\mathcal{D}\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} c(x)|u|^{p-2}u\varphi \, dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$.

Вопросы, рассматриваемые в этом сообщении, исследовались рядом авторов [1]–[5].

Договоримся о следующих обозначениях: $B_r = \{x : |x| < r\}$ и $S_r = \{x : |x| = r\}$. Для любого множества Ω обозначим $\mathbb{C}\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $\Omega_k = \Omega \cap (B_{2^{k+1}} \setminus B_{2^k})$ и $Q_k = \mathbb{C}\Omega \cap (\overline{B_{2^{k+1}}} \setminus B_{2^k})$.

Пусть A — компактное, а B — открытое подмножества $\mathbb{R}^n$ и $A \subset B$. Определим p -емкость множества A относительно B как

$$\operatorname{cap}(A, B) = \inf_{\varphi} \int_B |\mathcal{D}\varphi|^p \, dx,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi \in C_0^\infty(B)$, тождественно равным единице в некоторой окрестности A .

Открытое множество Ω называется p -массивным, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{cap}(Q_k, B_{2^{k+2}}) 2^{(p-n)k} < \infty.$$

Основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $c(x)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega_k} |x|^{p-n} c(x) \, dx \right)^{1/(p-1)} = \infty$$

для любого p -массивного множества Ω . Тогда любое ограниченное решение уравнения (1) стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $c(x) \geq f(|x|)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$, где f – монотонно невозрастающая функция такая, что

$$\int_1^\infty r^{1/(p-1)} f^{1/(p-1)}(r) dr = \infty.$$

Тогда любое ограниченное решение уравнения (1) стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Выражаю благодарность д.ф.-м.н. А. А. Конькову за постановку задачи и внимание, оказанное автору в процессе ее решения.

Список литературы

- [1] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, *Матем. сб.*, **135(177)**:3 (1988), 346–360. [2] А. А. Коньков, *Докл. РАН*, **383**:1 (2002), 15–19. [3] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964. [4] Е. М. Ландис, *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типа*, Наука, М., 1971. [5] A. Grigor'yan, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **36**:2 (1999), 135–249.

А. Б. Иванов (A. B. Ivanov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Центр новых информационных технологий
E-mail: andreii@cniit.msu.ru

Представлено А. В. Михалевым

Принято редколлегией
07.08.2006