Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Шакин, О некоторых обобщениях комбинаторной теоремы Маколея на случай фактор-колец, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 4, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:11:43

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРЕМЫ МАКОЛЕЯ НА СЛУЧАЙ ФАКТОР-КОЛЕЦ

Д. А. ШАКИН

1. Введение. Пусть $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от n переменных над полем k со стандартной градуировкой, т.е. $\forall i: \deg x_i = 1$. Пусть J – однородный идеал и $H(J, d) = \dim_k J_d$ – его функция Гильберта. В 1927 г. Маколеем [1] была доказана теорема, из которой следовало, что функции Гильберта однородных идеалов $J \subseteq A$ исчерпываются функциями Гильберта лекс-сегментных идеалов, т.е. мономиальных идеалов, состоящих в каждой степени из старших по лексикографическому порядку мономов:

ТЕОРЕМА 1.1 (Маколей). *Для любого однородного идеала J существует лекс-сегментный идеал L такой, что $H(J, d) = H(L, d) \quad \forall d \geq 1$.*

Пусть $\mathfrak{A}$ – множество всех однородных идеалов в A , $\mathfrak{B}$ – некоторое его подмножество. В настоящей статье рассматривается следующая задача: найти описание функций Гильберта идеалов $J \in \mathfrak{B}$, аналогичное полученному Маколеем, если в качестве $\mathfrak{B}$ рассмотреть множество всех идеалов из $\mathfrak{A}$, содержащих некоторый мономиальный идеал I . Более конкретно: каким условиям должен удовлетворять идеал I для того, чтобы было возможно свести изучение функций Гильберта идеалов, принадлежащих всему $\mathfrak{B}(I)$, к изучению функций Гильберта идеалов, принадлежащих некоторому его подмножеству $\mathfrak{B}_0(I)$. В качестве $\mathfrak{B}_0(I) \subseteq \mathfrak{B}(I)$ естественно взять множество идеалов из $\mathfrak{B}(I)$, содержащих, кроме мономов из I , старшие мономы в каждой степени. В частности, теорема 1.1 утверждает, что при $I = 0$ ($\mathfrak{B}(I) = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0(I)$ – множество всех лекс-сегментных идеалов) подобное описание возможно. Авторы работы [2] обобщили результат Маколея на случай, когда $I = (x_1^{d_1}, x_2^{d_2}, \dots, x_n^{d_n})$, причем $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n \leq \infty$.

Везде далее в статье: $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от n переменных, I – некоторый мономиальный идеал в A , $R = A/I$ – фактор-кольцо, A_i, R_i, I_i – множества мономов степени i в A, R, I соответственно. Введем на мономах в A лексикографический порядок: $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} > x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$, если $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_l = b_l, a_{l+1} > b_{l+1}$. Так как I – мономиальный идеал, то на мономах в R индуцируется аналогичный порядок.

Так как функция Гильберта однородного идеала совпадает с функцией Гильберта его идеала старших членов относительно введенного выше лексикографического порядка, то, не ограничивая общности, можно рассматривать только мономиальные идеалы $J \in \mathfrak{B}(I)$.

Теорему Маколея можно сформулировать в терминах фактор-кольца R : требование $J \in \mathfrak{B}(I)$ означает, что рассматриваются образы однородных идеалов из $\mathfrak{A}$ в фактор-кольце $R = A/I$, а $\mathfrak{B}_0(I)$ – множество мономиальных идеалов в R , содержащих старшие мономы в каждом R_i . Удобно переформулировать теорему Маколея в комбинаторных терминах. Пусть $M \subseteq R_i$, обозначим через $D^R M$ множество, состоящее из старших мономов в R_i , $|D^R M| = |M|$, а через $C^R M$ – множество, состоящее из меньших мономов в R_i , $|C^R M| = |M|$ (верхний индекс R указывает в каком кольце действуют операторы C, D). Если $a = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \in R_i$, то обозначим

$$\Gamma^R(a) = \{x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} \dots x_n^{a_n}, \dots, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n-1}\} \cap R_{i-1},$$

$$\Gamma^R(M) = \bigcup_{a \in M} \Gamma^R(a),$$

$$\Delta^R(a) = \{x_1^{a_1+1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, x_1^{a_1} x_2^{a_2+1} \dots x_n^{a_n}, \dots, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n+1}\} \cap R_{i+1},$$

$$\Delta^R(M) = \bigcup_{a \in M} \Delta^R(a).$$

Используя эти обозначения, можно переформулировать теорему 1.1 следующим образом:

$$\forall i \geq 1, \forall M \subseteq A_i: |\Delta^A(D^A M)| \leq |\Delta^A(M)|.$$

Будем говорить, что в фактор-кольце R выполняется теорема Маколея, если

$$\forall i \geq 1, \forall M \subseteq R_i: |\Delta^R(D^R M)| \leq |\Delta^R(M)|, \quad (1)$$

легко видеть, что (1) эквивалентно формулировке теоремы Маколея, приведенной выше.

Основная цель статьи – найти условия на идеал I , при которых в кольце R выполняется теорема Маколея (1).

2. Основные теоремы. Рассматривая вместо Δ^R и D^R операторы Γ^R и C^R , мы получаем эквивалентную формулировку теоремы Маколея:

ТЕОРЕМА 2.1. *Для выполнения теоремы Маколея (1) в кольце R необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall i \geq 2, \quad \forall M \subseteq R_i: \quad \Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R(\Gamma^R(M)). \quad (2)$$

Иногда бывает полезно следующее необходимое условие.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть в кольце R выполняется теорема Маколея, тогда $\forall i \geq 2, \forall M \subseteq R_i$, с условием $M = C^R M$, имеем $\Gamma^R(M) = C^R(\Gamma^R(M))$.*

Простейшим примером идеала I , в фактор-кольце по которому выполняется теорема Маколея, является лекс-сегментный идеал, в частности, порожденный в одной степени d отрезком $[x_1^d, v]$ (отрезком $[u, v]$ в степени d называется множество вида $\{m \in A_d \mid u \geq m \geq v\}$). Полное описание идеалов, порожденных отрезком в степени d (такие идеалы называются лексическими), для которых в фактор-кольце выполняется теорема Маколея, дает

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть $u, v \in A_d, u \geq v, I = ([u, v])A$ – лексический идеал в A . Теорема Маколея в $R = A/I$ выполняется тогда и только тогда, когда I удовлетворяет одному из следующих условий:*

- (a) $u = x_1^d$;
- (b) $u = x_1^{d-1}x_2, v > x_1^{d-2}x_2x_n$;
- (c) $u = x_1^{d-1}x_k, k > 2, v > x_1^{d-2}x_2^2$.

Рассмотрим более подробно случай, когда $n = 2$, т.е. $A = k[x_1, x_2]$. Пусть $I_v = \{x_1^{l_1^v}x_2^{m_1^v}, x_1^{l_2^v}x_2^{m_2^v}, \dots, x_1^{l_s^v}x_2^{m_s^v}\}$, причем $l_1^v > l_2^v > \dots > l_s^v$. Составим векторы:

$$l^v = (l_0^v, l_1^v, \dots, l_{s+1}^v) = (v+1, l_1^v, l_2^v, \dots, l_s^v, -1),$$

$$\Delta l^v = (\Delta l_0^v, \Delta l_1^v, \dots, \Delta l_s^v) = (l_0^v - l_1^v - 1, l_1^v - l_2^v - 1, \dots, l_{s-1}^v - l_s^v - 1, l_s^v - l_{s+1}^v - 1),$$

$$s^v = (s_1^v, s_2^v, \dots, s_r^v),$$

где вектор s^v получается из Δl^v удалением компонент, равных 0 (s^v может быть пустым). Теорема 2.4 дает полное описание идеалов $I \subseteq k[x_1, x_2]$, в фактор-кольце по которым выполняется теорема Маколея.

ТЕОРЕМА 2.4. *Теорема Маколея в кольце $R = A/I = k[x_1, x_2]/I$ выполняется тогда и только тогда, когда идеал I удовлетворяет следующим условиям:*

- (a) *если $m \in R_v$, но $mx_1 \in I, mx_2 \in I$, то $\forall m' \in A_{v+1}, m' \geq mx_2: m' \in I$;*
- (b) $\forall v \geq 1$:
 - (1) *если $\Delta l_0^v = 0, \Delta l_s^v = 0$, то $s_i^v \leq s_{i+1}^v$ при $i = 1, 2, \dots, r-1$,*
 - (2) *если $\Delta l_0^v = 0, \Delta l_s^v > 0$, то $s_i^v \leq s_{i+1}^v$ при $i = 1, 2, \dots, r-2$,*
 - (3) *если $\Delta l_0^v > 0, \Delta l_s^v = 0$, то $r = 1, s_1^v = \Delta l_0^v = 1$,*
 - (4) *если $\Delta l_0^v > 0, \Delta l_s^v > 0$, то либо $l^v = (v+1, -1)$, либо $r = 2, s^v = (\Delta l_0^v, \Delta l_s^v)$ и $s_1^v = 1$.*

Кроме того, если рассматривать идеалы I , порожденные мономами от переменных x_1 и x_2 в кольце $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ при $n \geq 2$, то условий (a) и (b) теоремы 2.4 оказывается достаточно для выполнения теоремы Маколея:

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть I – идеал в A , порожденный мономами от переменных $x_1, x_2, R = A/I$. Если в $R' = R/(x_3, x_4, \dots, x_n)$ выполняется теорема Маколея, то в R тоже выполняется теорема Маколея.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. S. Macaulay // Proc. London Math. Soc. 1927. V. 26. P. 531–555. [2] G. F. Clements, B. Lindström // J. Combin. Theory. 1969. V. 7. P. 230–238.