Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца Безу и косые многочлены, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 5, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm439>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:54:13

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

КОЛЬЦА БЕЗУ И КОСЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль называется *модулем Безу*, если каждый его конечно порожденный подмодуль циклический. Если φ — инъективный эндоморфизм кольца A , то через $A[x, \varphi]$ обозначается (правое) кольцо косых многочленов, где умножение определяется с помощью правила $ax^i = x^i\varphi^i(a)$. Для коммутативного кольца A хорошо известно, что $A[x]$ — кольцо Безу $\iff A$ регулярно (в смысле фон Неймана). Основным результатом данной статьи — теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A — кольцо, у которого все первичные фактор-кольца являются правыми или левыми кольцами Голди (это так, например, если A — PI-кольцо). Кроме того, пусть φ — такой автоморфизм кольца A , что $\varphi(B) = B$ для каждого идеала B кольца A . Тогда $A[x, \varphi]$ — правое кольцо Безу $\iff A$ — регулярное кольцо.

Пусть A — кольцо. Если φ — автоморфизм и B — такой идеал кольца A , что $\varphi(B) = B$, то φ_B обозначает автоморфизм кольца A/B , индуцированный автоморфизмом φ . Элемент a кольца A называется *регулярным справа (слева)*, если $r(a) = 0$ ($\ell(a) = 0$). Через $U(A)$ обозначается группа обратимых элементов кольца A . Кольцо называется *прямо-конечным*, если все его обратимые справа или слева элементы обратимы.

ЛЕММА 1. Пусть φ — инъективный эндоморфизм прямо-конечного кольца A и $A[x, \varphi]$ — правое кольцо Безу.

- (1) Если a — регулярный справа элемент кольца A , то $\varphi(a) \in U(A)$.
- (2) Если φ — автоморфизм, то A полупрimitивно.
- (3) Если φ — автоморфизм и A — правое или левое кольцо Голди, то A — полупростое артиново кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $R \equiv A[x, \varphi]$. В лемме 2(1) из [1] доказано следующее утверждение (*): для каждого $a \in A$ существуют такие $f_0, g_0, u_0, v_0, b, c \in A$, что: (i) $a = af_0u_0$; (ii) $af_0v_0 = 0$; (iii) $1 = \varphi(a)b + g_0v_0$; (iv) $\varphi(a)c = g_0u_0$.

(1) Из (*) и равенства $r(a) = 0$ следует существование таких $f_0, g_0, u_0, v_0, b \in A$, что $1 = f_0u_0$, $f_0v_0 = 0$, $1 = \varphi(a)b + g_0v_0$. Так как A прямо-конечно и $1 = f_0u_0$, то $f_0 \in U(A)$. Так как $f_0v_0 = 0$, то $v_0 = 0$. Поэтому из равенства $1 = \varphi(a)b + g_0v_0$ следует, что $1 = \varphi(a)b$. Так как A прямо-конечно, то $\varphi(a) \in U(A)$.

(2) Пусть $a \in J(A)$. Так как $\varphi(a) \in \varphi(J(A)) = J(A)$, то $1 - \varphi(a)b \in U(A)$. По (iii) $g_0 v_0 \in U(A)$. Тогда v_0 обратим слева. Так как A прямо-конечно, то $v_0 \in U(A)$. Поэтому из (ii) следует, что $af_0 = 0$. По (i) $a = af_0 u_0 = 0$.

(3) Так как каждый существенный правый (левый) идеал полупервичного правого (левого) кольца Голди содержит регулярный элемент, то (3) следует из (1) и (2).

ЛЕММА 2. Пусть φ – такой автоморфизм кольца A , что $\varphi(B) = B$ для каждого идеала B кольца A , $R \equiv A[x, \varphi]$.

(1) Если R – правое кольцо Безу, то все фактор-кольца кольца A полупримитивны (следовательно, $B^2 = B$ для каждого идеала B кольца A).

(2) Если $(A/B)[x, \varphi_B]$ – правое кольцо Безу для любого неразложимого фактор-кольца A/B кольца A , то R – правое кольцо Безу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как все фактор-кольца правых колец Безу – правые кольца Безу, то $(A/B)[x, \varphi_B]$ – правое кольцо Безу для любого фактор-кольца A/B кольца A . По лемме 1(2) достаточно доказать, что A прямо-конечно. Пусть $a, b \in A$ и $ab = 1$. Достаточно доказать, что $ba \in U(A)$. Положим $x \equiv 1 - ba$. Если $x \in J(A)$, то $ba = 1 - x \in U(A)$. Допустим, что $x \notin J(A)$. Тогда существует такое примитивное справа фактор-кольцо A/P , что $h(x) \neq 0$, где $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм. Так как $h(A)$ прямо-конечно и $h(a)h(b) = h(1)$, то $h(b)h(a) = h(1)$. С другой стороны, $h(b)h(a) \neq h(1)$, поскольку $h(1) - h(b)h(a) = h(x) \neq 0$. Получено противоречие.

(2) Допустим противное. Существуют такие многочлены $f, g \in R$, что правый идеал $fR + gR$ – не главный. Пусть $\mathcal{E}$ – непустое множество всех таких собственных идеалов E кольца A , что естественный образ правого идеала $fR + gR$ не является главным правым идеалом в $(A/E)[x, \varphi_E]$. Пусть $\{E_i\}_{i \in I}$ – линейно упорядоченное по включению подмножество в $\mathcal{E}$, $E \equiv \bigcup_{i \in I} E_i$. Если R/BR – правое кольцо Безу, то $(fs + gt)u - f, (fs + gt)v - g \in ER$ для некоторых $s, t, u, v \in R$, откуда $(fs + gt)u - f, (fs + gt)v - g \in E_i R$ для некоторого $i \in I$; это противоречит тому, что естественный образ правого идеала $fR + gR$ не является главным правым идеалом в $(A/E_i)[x, \varphi_{E_i}] \cong R/E_i R$. Поэтому $(A/E)[x, \varphi_E] \cong R/ER$ не является правым кольцом Безу и $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{E}$. По лемме Цорна множество $\mathcal{E}$ содержит максимальный элемент B . Тогда A/B не является правым кольцом Безу, но все собственные фактор-кольца кольца A/B – правые кольца Безу. Поэтому A/B – неразложимое кольцо. По условию $(A/B)[x, \varphi_B]$ – правое кольцо Безу; получено противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $R \equiv A[x, \varphi]$.

$\Rightarrow$ По лемме 2(1) $B^2 = B$ для каждого идеала B кольца A . Кроме того, из леммы 1(3) и из условия следует, что каждое первичное фактор-кольцо кольца A регулярно. Поэтому A регулярно [2; следствие 1.18].

$\Leftarrow$ Так как каждое регулярное правое или левое кольцо Голди артиново, то все первичные фактор-кольца кольца A – простые артиновы. Так как A регулярно и все первичные фактор-кольца кольца A артиновы, то каждое неразложимое фактор-кольцо A/B кольца A является простым артиновым кольцом [2; следствие 6.7] (следовательно, $(A/B)[x, \varphi_B]$ – правое кольцо Безу [3; теорема 3.1]). По лемме 2(2) $A[x, \varphi]$ – правое кольцо Безу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Туганбаев // УМН. 2000. Т. 55. № 5. С. 169–170. [2] K. R. Goodearl. Von Neumann Regular Rings. London: Pitman, 1979. [3] A. V. Jategaonkar. Left Principal Ideal Rings. Berlin: Springer-Verlag, 1970. (Lecture Notes in Math. V. 123.)