Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Рышков, О структуре примитивного параллелоэдра и о последней проблеме Вороного, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:23:33

О СТРУКТУРЕ ПРИМИТИВНОГО ПАРАЛЛЕЛОЭДРА И О ПОСЛЕДНЕЙ ПРОБЛЕМЕ ВОРОНОГО

С. С. Рышков

В заметке дается решение двух проблем теории n -мерных параллеледров (далее “ПалЭ”), во-первых, (в п. 1⁰) изучение примитивных ПалЭ сводится к исследованию ПалЭ нового класса “коренных ПалЭ”, примеры таких ПалЭ приводятся ($2^0 - 4^0$); во-вторых, (в п. 5⁰) дается неожиданно простой ответ на вопрос, поставленный Г.Ф.Вороным в последнем параграфе его последнего, изданного уже посмертно, мемуара [1]. Этот параграф мы, несмотря на ограниченность места в заметке, рискуем привести полностью.

“§ 118. Рассмотрим две таблицы характеристик граней симплексов, определяющих второй и третий тип примитивных параллеледров, мы замечаем, что эти характеристики совпадают для обоих типов и представляются линейными формами

$$\begin{aligned} &\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3, \pm x_4, \pm(x_1 - x_3), \pm(x_1 - x_4), \pm(x_2 - x_3), \\ &\pm(x_2 - x_4), \pm(x_3 - x_4), \pm(x_1 + x_2 - x_3), \pm(x_1 + x_2 - x_4), \pm(x_1 + x_2 - x_3 - x_4). \end{aligned}$$

Замечательно, что эти линейные формы определяют множество представлений минимума совершенной формы φ_1 , определенной равенством (5).

На основании того, что было сказано выше, можно утверждать, что отмеченное совпадение выявляется при рассмотрении характеристик граней всех примитивных параллеледров 2, 3 и 4 измерений.

Было бы интересно выяснить, является ли это совпадение делом случая или же действительно существует связь между двумя проблемами, кажущимися столь различными: между проблемой однозначного разбиения пространства с помощью выпуклых конгруэнтных многогранников и проблемой разыскания совершенных положительных квадратичных форм.”

1⁰. ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие числа $1 = n_1 < n_2 = 4 < n_3 = 5 < \dots < n_k < \dots$, что в евклидовых пространствах $\mathbf{E}^{n_k}$, определены, вообще говоря, не примитивные, ПалЭ (которые мы называем коренными), удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *при каждом натуральном n для любого n -мерного примитивного ПалЭ $\mathcal{P} \subset \mathbf{E}^n$ найдется не менее чем $n(n+1)/2$ коренных ПалЭ $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_\sigma$, имеющих размерность не превосходящую n , и так расположенных в $\mathbf{E}^n$, что*

$$(*) \quad \mathcal{P} = \lambda_1 \mathcal{P}_1 \oplus \lambda_2 \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \lambda_\sigma \mathcal{P}_\sigma,$$

где через $\oplus$ обозначено векторное сложение (суммирование по Минковскому), а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma$ — положительные числа;

2) *каждый n -мерный примитивный ПалЭ $\mathcal{P}' \subset \mathbf{E}^n$ того же типа, что и $\mathcal{P}$, представим (с точностью до движения ПалЭ $\mathcal{P}'$ в пространстве $\mathbf{E}^n$ и аффинного преобразования всего пространства $\mathbf{E}^n$) в виде суммы (*), но быть может с другим набором чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma$.*

Теорема доказывается применением теорем из §§ 41, 69–76, 85 и 86 работы [1].

2⁰. В размерности 1 имеется лишь один ПалЭ — отрезок.

ПРИМЕР 1. Любой n -мерный примитивный ПалЭ первого типа [1], [2] является суммой вида (*) отрезков $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_{n(n+1)/2}$, расположенных в $\mathbf{E}^n$ на ребрах произвольного n -мерного симплекса. Каждый n -мерный не примитивный ПалЭ первого типа [1], [2] является суммой вида (*) части, расположенных указанным способом отрезков. Таким образом, каждый отрезок является коренным одномерным ПалЭ.

(Из [3] следует, что $n(n+1)/2$ — это максимальное для получения ПалЭ число отрезков, которое здесь возможно использовать.)

3⁰. В размерностях 2 и 3 есть только ПалЭ первого типа: здесь нет коренных ПалЭ. При $n = 4$, кроме ПалЭ первого типа, есть примитивные ПалЭ еще двух типов. Опишем построение этих ПалЭ по нашей теореме. Рассмотрим в $\mathbf{E}^4$ правильный 24-гранник M_4 (все его грани правильные октаэдры). Этот многогранник M_4 является ПалЭ (см. также 4⁰.)

Работа поддержана РФФИ, грант 97-01-00266.

Вместе с каждым ребром многогранник M_4 содержит еще 7 равных и параллельных ему ребер. Выберем из каждой такой восьмерки ребер по одному ребру и обозначим полученное множество через R_1 . (Одному из таких множеств вида R_1 соответствует, например, множество взятых лишь с плюсом “характеристик” из приведенной цитаты.) С точностью до выбора ребер из восьмерки и вращения многогранника M_4 , в множестве R_1 имеется только три вида некомпланарных троек ребер и одна тройка компланарных. Обозначим через R_2 множество R_1 без той тройки некомпланарных ребер, в которой каждое ребро составляет с другим угол 60° . Обозначим через R_3 множество R_1 без тройки компланарных ребер.

ПРИМЕР 2. Каждый 4-мерный примитивный ПалЭ второго (третьего) типа $\mathcal{P}$ представим (с точностью до движения ПалЭ $\mathcal{P}$ в пространстве E^4 и аффинного преобразования всего пространства E^4) в виде суммы $(*)$, где через $\mathcal{P}_1$ обозначен многогранник M_4 , а через $\mathcal{P}_i$, где $i = 2, 3, \dots, 10$, — отрезки из множества R_2 (R_3).

Из сказанного следует, что многогранник M_4 (и любой многогранник ему аффинно эквивалентный) является коренным 4-мерным ПалЭ, причем с точностью до аффинной эквивалентности единственным.

Напомним [2], что при $n \leq 4$ все ПалЭ, а не только примитивные, суть аффинные образы областей Вороного-Дирихле решеток. Поэтому, чтобы завершить наше предъявляемое впервые полное элементарное и наглядное описание всех 4-мерных ПалЭ, см. также [4], нам осталось сделать два замечания. (1) ПалЭ под номером 19 из статьи [2] получаются как суммы вида $(*)$ всех отрезков множества R_3 . (2) Все остальные, не упомянутые в 2^0 и 3^0 , 4-мерные ПалЭ могут быть получены как суммы вида $(*)$ многогранника M_4 и части отрезков из множества R_3 .

4^0 . Рассмотрим вторую совершенную форму (V_n по Коркину и Золотареву [3], $\varphi_1^{(n)}$ по Вороному [1], или D_n по Коксетеру [5]).

Область Вороного-Дирихле M_n решетки, соответствующей форме V_n , с точностью до подобия, может быть описанной ниже следующим образом. Многогранник M_n — это n -мерный куб $Q_n \subset E^n$ с построенной над каждой его $(n-1)$ -мерной гранью равнореберной пирамидой с высотой, равной половине ребра куба. (Отметим, что такого описания многогранника M_n мы нигде не встречали.)

Многогранник M_n и при всех $n > 4$ является коренным ПалЭ (при $n = 4$ мы дали для M_4 другое описание). Часть из остальных коренных ПалЭ, способных вместе с многогранником M_n задавать примитивные ПалЭ — это $n-1$ произвольных попарно не коллинеарных ребер куба Q_n .

Этот пример позволяет также утверждать в теореме 1, что $n_k = k + 2$ при всех $k > 1$.

5^0 . Отметим, что у многогранника M_n можно выбрать $2^{n-1} + n$ попарно не коллинеарных ребер, т.е. ему соответствует $2^n + 2n$ различных характеристик — это число превосходит максимальное количество представлений арифметического минимума положительно определенной формы (или оценку контактного числа) при всех $4 < n \leq 24$ и всех достаточно больших n (см., например, [6]). Следовательно, множество этих характеристик не может быть частью множества представлений минимума никакой положительно определенной квадратичной формы от указанного числа n переменных.

Таким образом, замеченное Г.Ф.Вороным при $n \leq 4$ совпадение при больших n , вообще говоря, отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вороной Г.Ф. Исследования о примитивных параллелоэдрах // Собр. соч.. Т. 2. Киев: Изд-во АН УССР, 1952. С. 239–368 (Оригинал в J. reine und angew. Math., 1908, v. 134, P. 198–287, 1909, vol. 136, P. 67–179). [2] B. Delaunay Sur la partition régulière l'espace a 4 dimensions // Изв. АН, ОФМН 1929. № 1. С. 79–110; № 2, P. 147–164. [3] Korkine A., Zolotareff G. Sur les forme quadratiques positives // Math. Ann. 1877. V. 11. P. 242–292 (См. также Е.И.Золотарев, Полное собр. соч., вып.1, Изд-во АН. 1931, С. 375–434.). [4] С.С.Рышков, Л.В.Краснова, Н.С.Шугарова К вопросу о классификации типов четырехмерных не-примитивных параллелоэдров Дирихле // Международная конференция “Современные проблемы теории чисел”.. Россия, Тула: Тезисы докладов, 1993. [5] Coxeter, H. S. M. Extreme forms // Can. J. of Math 1951. V. 3. P. 391–441. [6] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Москва: Мир, 1990.