Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Абсава, О предельном распределении квадратического уклонения широкого класса оценок функциональных характеристик закона распределения наблюдений, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 5, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:51:51

**О ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ КВАДРАТИЧЕСКОГО
УКЛОНЕНИЯ ШИРОКОГО КЛАССА ОЦЕНОК ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ**

Р. М. АБСАВА

Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения в $\mathbb{R}^p$, с общей функцией распределения $F(x)$ и плотностью распределения $f(x)$. Допустим, что $g(x), x \in \mathbb{R}^p$, – некоторая функциональная характеристика распределения случайной величины X , относительно которой предположим, что она принадлежит достаточно широкому множеству функций. По наблюдениям $X_1, \dots, X_n$ требуется построить последовательность случайных функций $g_n(x) = g_n(x, X_1, \dots, X_n)$, которые могут быть приближением $g(x)$.

Приведем некоторые специальные примеры оцениваемых функциональных характеристик:

D – плотность распределения: $g(x) = f(x)$,

H – функция риска: $g(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$,

R – функция регрессии: $g(x) = m(x) = E(Y | \bar{X} = x)$,

$$\bar{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(p)}), \quad X = (\bar{X}, Y).$$

Рассмотрим непараметрические оценки кривых общего вида:

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^n \delta_{0\lambda}(x, X_i) \Big/ \sum_{i=1}^n \delta_{1\lambda}(x, X_i), \quad (1)$$

где $\delta_{i\lambda}(x, y), i = 0, 1$, – измеримые по Борелю функции в $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, а $\lambda = \lambda(n)$ – последовательность положительных чисел, сходящихся к бесконечности, но удовлетворяющих условию $\lambda(n) = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Цель работы – изучить предельное распределение квадратического уклонения оценки (1).

Введем обозначения ($r(x)$ – некоторая весовая функция):

$$\delta_\lambda(x, X_i) = \delta_{0\lambda}(x, X_i) - \delta_{1\lambda}(x, X_i)g(x), \quad \hat{g}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_\lambda(x, X_i),$$

$$V_n = n \int (\hat{g}_n(x) - E\hat{g}_n(x))^2 r(x) dx, \quad \Delta_n = EV_n, \quad \alpha_\lambda(x, y) = \delta_\lambda(x, y) - E\delta_\lambda(x, X_1),$$

$$\delta_{ij}(u, v, \lambda) = \int \delta_{i\lambda}(x, u) \delta_{j\lambda}(x, v) g^{i+j}(x) r(x) dx, \quad i, j = 0, 1,$$

$$\sigma_n^2 = 2 \iint (E\alpha_\lambda(u_1, X_1) \alpha_\lambda(u_2, X_2))^2 r(u_1) r(u_2) du_1 du_2,$$

$$L_n = E \left[\iint \alpha_\lambda(u_1, X_1) \alpha_\lambda(u_2, X_2) E\alpha_\lambda(u_1, X_1) \alpha_\lambda(u_2, X_2) r(u_1) r(u_2) du_1 du_2 \right]^2.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия:

$$1^\circ \ E \left(\int \delta_{0\lambda}^2(x, X_1) r(x) dx \right)^\gamma \leq c_1 \lambda^{\alpha\gamma}, \quad E \left(\int \delta_{1\lambda}^2(x, X_1) g^2(x) r(x) dx \right)^\gamma \leq c_2 \lambda^{\gamma\alpha},$$

$$\alpha > 0, \gamma = 1, 2,$$

$$2^\circ \ E(\delta_{ij}^{s,j}(X_1, X_2, \lambda)) \leq c_3 \lambda^{(s-\beta)\alpha}, \quad s = 2, 4, \alpha > 0, 0 < \beta \leq 1, i, j = 0, 1,$$

$$3^\circ \ \sigma_n \rightarrow \infty \text{ и } L_n = o(\sigma_n^4) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$$4^\circ \ n^{-1} \sigma_n^{-4} \lambda^{(4-\beta)\alpha} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\sigma_n^{-1}(V_n - \Delta_n) \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

где d обозначает сходимость по распределению, а $N(0, 1)$ – случайную величину, имеющую нормальное распределение со средним 0 и дисперсией 1.

Для доказательства теоремы 1 в основном используется центральная предельная теорема для семимартингалов Р. Ш. Липцера и А. Н. Ширяева [1].

Основная теорема 1 дает возможность для известных оценок D –Розенблатта–Парзена, D –Ченцова, R –Надарая–Ватсона и H –Ватсона–Лидбеттера единым образом получить предельные распределения квадратического уклонения в уточненном и обобщенном виде по сравнению с имевшимися ранее [2]–[6]. Для примера рассмотрим ядерные оценки D –Розенблатта–Парзена.

Пусть $\delta_{0\lambda}(x, X_i) = \lambda^p K(\lambda(x - X_i))$ и $\delta_{1\lambda}(x, X_i) = 1$, тогда из (1) получим оценку Розенблатта–Парзена для плотности распределения, т.е. ядерную оценку:

$$g_n(x) = \frac{\lambda^p}{n} \sum_{i=1}^n K(\lambda(x - X_i)).$$

Назовем функцию $K(x)$, $x \in \mathbb{R}^p$, функцией класса H_ν ($\nu \geq 2$), если

1. $\int K(x) dx = 1$, 2. $\sup_{x \in \mathbb{R}^p} |K(x)| < \infty$, 3. $\int x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} K(x) dx = 0$, если $\sum_{j=1}^p i_j < \nu$,
4. $\int |x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}| |K(x)| dx < \infty$, если $\sum_{j=1}^p i_j = \nu$, 5. $r(x) = r_1(x_1) \cdots r_p(x_p)$, $r_j(x_j)$, $x_j \in \mathbb{R}^1$, – кусочно-непрерывные и ограниченные функции.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K(x) \in H_\nu$ ($\nu \geq 2$) и $f(x)$ ограничена и имеет ограниченные частные производные до порядка ν включительно.

а) Если $n^{-1}\lambda^p \rightarrow 0$ и $n\lambda^{-p-2\nu} \rightarrow 0$, то

$$\lambda^{p/2} \sigma^{-1} (T_n - \theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

б) Если $n^{-1}\lambda^p \rightarrow 0$ и $n\lambda^{-p/2-2\nu} \rightarrow 0$, то $\lambda^{p/2} \sigma^{-1} (T_n - \theta_n^{(2)}) \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

в) Если к условиям, наложенным на $K(x)$, добавить $K(-x) = K(x)$ и $n^{-1}\lambda^p \rightarrow 0$, $n\lambda^{-p/2-2\nu} \rightarrow 0$, $1 \leq p \leq 3$, то

$$\lambda^{p/2} \sigma^{-1} \left(T_n - \int f(x)r(x) dx \int K^2(x) dx \right) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

$$\text{Здесь } T_n = \frac{n}{\lambda^p} \int (g_n(x) - f(x))^2 r(x) dx, \quad \theta_n^{(1)} = \frac{n}{\lambda^p} \int (E g_n(x) - f(x))^2 r(x) dx, \quad \theta_n^{(2)} = \lambda^p \iint K^2(\lambda(x-u)) f(u) r(u) du dx, \quad \sigma^2 = 2 \int f^2(x) r^2(x) dx \int K_0^2(x) dx, \quad K_0 = K * K.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25. № 4. С. 683–703. [2] Р. Bickel, М. Rosenblatt // Ann. Statist. 1973. V. 1. № 6. P. 1071–1095. [3] Э. А. Надарая // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21. № 4. С. 864–871. [4] Э. А. Надарая // Сообщ. АН ГССР. 1984. Т. 113. № 2. С. 253–256. [5] Э. А. Надарая // Сообщ. АН ГССР. 1974. Т. 74. № 1. С. 33–36. [6] Р. Holl // J. Multivariate Anal. 1974. V. 14. P. 1–16.