Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Вязилов, Эмпирические процессы в GARCH(1,1)-модели и робастное оценивание параметров, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 5, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm442>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:29:18

ЭМПИРИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В GARCH(1,1)-МОДЕЛИ И РОБАСТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ

А. Е. Вязилов

1. Модель GARCH(1,1) (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) задается соотношениями

$$y_k = \sigma_k \varepsilon_k, \quad \sigma_k^2 = \alpha + \beta y_{k-1}^2 + \gamma \sigma_{k-1}^2, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\{\varepsilon_k\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(x)$, $E\varepsilon_1^2 = 1$; $\mathbf{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ – вектор неизвестных параметров, $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\beta + \gamma < 1$. Тогда существует единственное строго стационарное и эргодическое решение $\{y_k\}$.

Одна из основных задач статистического анализа модели (1) – оценивание неизвестных параметров. Если функция $G(x)$ известна, несложно построить оценки максимального правдоподобия (ОМП) или им асимптотически эквивалентные, см. [1]. Более того, $n^{1/2}$ -асимптотически нормальные оценки можно построить и в непараметрической ситуации, см. там же. Однако, описанные в литературе оценки неустойчивы к грубым выбросам.

В данной работе строится класс $n^{1/2}$ -асимптотически нормальных оценок с конечной чувствительностью в схеме засорения данных одиночными выбросами (необходимые определения см. в [2]). Решение этой задачи нетривиально даже в параметрической ситуации, которую мы и рассмотрим. Наш подход основан на использовании остаточных эмпирических процессов и примыкает к [3], где строятся робастные непараметрические оценки в модели ARCH.

2. Пусть $y_0, \dots, y_n$ – наблюдения из стационарного решения уравнений (1). Положим

$$\sigma_k^2(\mathbf{t}) := t_1 + t_2 y_{k-1}^2 + t_3 \sigma_{k-1}^2(\mathbf{t}), \quad \varepsilon_k(\mathbf{t}) := \begin{cases} \frac{y_k}{\sigma_k(\mathbf{t})}, & \text{если } \sigma_k^2(\mathbf{t}) > 0, \\ 1, & \text{если } \sigma_k^2(\mathbf{t}) \leq 0, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,$$

где $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, $\sigma_0 \equiv 0$. Введем для $x \in \mathbb{R}$ *остаточные эмпирические процессы*

$$U_n(x, \mathbf{t}) := n^{-1/2} \sum_{k=1}^n f(\widehat{\mathbf{y}}_{k-1}; \mathbf{t}) I\{\varepsilon_k(\mathbf{t}) \leq x\}, \quad U_n(x) := n^{-1/2} \sum_{k=1}^n f(\mathbf{y}_{k-1}; \mathbf{a}) I\{\varepsilon_k \leq x\},$$

где $\mathbf{y}_k = (\dots, y_{k-1}, y_k)$, $\widehat{\mathbf{y}}_k = (\dots, 0, y_0, \dots, y_k)$. Нам потребуются условия:

- (i) $G(x)$ – строго монотонна на множестве $\{x \in \mathbb{R} : 0 < G(x) < 1\}$;
- (ii) существует дифференцируемая плотность $g(x) = G'(x)$ и $\sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 |g'(x)| < \infty$;
- (iii) $E|f(\mathbf{y}_1; \mathbf{a})|^4 < \infty$, $n^{-1/2} \sum_{k=1}^n |f(\mathbf{y}_k; \mathbf{a}) - f(\widehat{\mathbf{y}}_k; \mathbf{a})| = o_p(1)$;
- (iv) существуют $\dot{f}^i = \partial f / \partial t_i$ и $E\|\dot{f}(\mathbf{y}_1; \mathbf{a})\|^2 < \infty$, $n^{-1} \sum_{k=1}^n \|\dot{f}(\mathbf{y}_k; \mathbf{a}) - \dot{f}(\widehat{\mathbf{y}}_k; \mathbf{a})\| = o_p(1)$, $\|\dot{f}(\mathbf{y}; \mathbf{t}) - \dot{f}(\mathbf{y}; \mathbf{a})\| \leq H(\mathbf{y}, \mathbf{a}) \|\mathbf{t} - \mathbf{a}\|$ при $\mathbf{t}$ из некоторой окрестности точки $\mathbf{a}$, $EH(\mathbf{y}_1, \mathbf{a}) < \infty$, $\sup_{k \in \mathbb{N}} EH(\widehat{\mathbf{y}}_k, \mathbf{a}) < \infty$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Пусть $Y(\mathbf{y}_k; \gamma) := \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m y_{k-m}^2$, $\sigma^2(\mathbf{y}_k; \mathbf{a}) := \alpha / (1 - \gamma) + \beta Y(\mathbf{y}_k; \gamma)$, $Z(\mathbf{y}_k; \mathbf{a}) := \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^m \sigma^2(\mathbf{y}_{k-m-1}; \mathbf{a})$, все ряды сходятся в $\mathbf{L}_1$. Введем векторную функцию

$$\mathbf{e}(\mathbf{y}; \mathbf{a}) := \left(\frac{1}{(1 - \gamma)\sigma^2(\mathbf{y}; \mathbf{a})}, \frac{Y(\mathbf{y}, \gamma)}{\sigma^2(\mathbf{y}; \mathbf{a})}, \frac{Z(\mathbf{y}, \mathbf{a})}{\sigma^2(\mathbf{y}; \mathbf{a})} \right).$$

Сформулируем результат об *асимптотической равномерной линейности* остаточного эмпирического процесса. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение.

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия (i)–(iv), то при $0 \leq T < \infty$ и $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, \|\mathbf{t}\| \leq T} |U_n(x, \mathbf{a} + n^{-1/2} \mathbf{t}) - U_n(x) - 2^{-1} x g(x) \langle E[f(\mathbf{y}_1; \mathbf{a}) \mathbf{e}(\mathbf{y}_1; \mathbf{a})], \mathbf{t} \rangle - G(x) \langle E\dot{f}(\mathbf{y}_1; \mathbf{a}), \mathbf{t} \rangle| = o_p(1).$$

Заметим, что при $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ утверждение теоремы 1 совпадает с теоремой 3.1 из [3] об остаточном эмпирическом процессе в ARCH-модели, а при $f(\mathbf{y}; \mathbf{t}) \equiv 1$ получаем теорему из [4] об остаточной эмпирической функции распределения.

3. Зная функцию $G(x)$, можно получить асимптотически эквивалентную ОМП оценку вектора $\mathbf{a}$ из системы уравнений $\sum_{k=1}^n \mathbf{e}(\hat{\mathbf{y}}_{k-1}; \mathbf{t}) L_g(\varepsilon_k(\mathbf{t})) = 0$, где $L_g(x) = 1 + x \frac{g'(x)}{g(x)}$. Поэтому естественно рассмотреть оценки, определяемые системой уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{f}(\hat{\mathbf{y}}_{k-1}; \mathbf{t}) \psi(\varepsilon_k(\mathbf{t})) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, а f_i и ψ заданы априорно.

Определим матрицы $\mathbf{A}_{\mathbf{f}} = (a_{i,j})$, $\mathbf{R}_{\mathbf{f}} = (r_{i,j})$, где

$$a_{i,j} = E[e_i(\mathbf{y}_1; \mathbf{a}) f_j(\mathbf{y}_1; \mathbf{a})], \quad r_{i,j} = E[f_i(\mathbf{y}_1; \mathbf{a}) f_j(\mathbf{y}_1; \mathbf{a})],$$

при этом $e_i(\mathbf{y}; \mathbf{a})$ – компоненты вектора $\mathbf{e}(\mathbf{y}; \mathbf{a})$. Теорема 1 влечет существование $n^{1/2}$ -состоятельного решения (2) при обычных предположениях относительно ψ , см. [3]:

$$(v) \quad \psi \text{ — непрерывная функция, } \text{var} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi] < \infty, E\psi(\varepsilon_1) = 0, J_{\psi} := 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) d\psi(x) \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (i), (ii), функции f_i удовлетворяют условиям (iii), (iv), а ψ — условию (v), $\mathbf{A}_{\mathbf{f}}$, $\mathbf{R}_{\mathbf{f}}$ — невырожденные матрицы. Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, существует $n^{1/2}$ -состоятельное решение (2), и для любого такого решения $\hat{\mathbf{a}}_n$

$$n^{1/2}(\hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{a}) \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{D}_{\mathbf{f}, \psi}), \quad \text{где } \mathbf{D}_{\mathbf{f}, \psi} = J_{\psi}^{-2} E[\psi^2(\varepsilon_1)] (\mathbf{A}_{\mathbf{f}}^{-1})^T \mathbf{R}_{\mathbf{f}} \mathbf{A}_{\mathbf{f}}^{-1}.$$

К сожалению, функцию ψ , удовлетворяющую условию (v), удастся построить только при известной $G(x)$. Поэтому, в действительности, теорема 2 описывает параметрическую ситуацию.

Можно показать существование функций $\mathbf{f}$ и ψ , удовлетворяющих условиям теоремы 2, таких, что соответствующие оценки имеют конечную чувствительность к грубым выбросам.

Автор выражает признательность М. В. Болдину за постановку задачи и ее обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. W. Lee, B. E. Hansen // *Econometric Theory*. 1994. V. 10. P. 29–52. [2] R. D. Martin, V. J. Yohai // *Ann. Statist.* 1986. V. 14. P. 781–818. [3] М. В. Болдин // *Math. Methods Statist.* 2000. V. 9. № 1. P. 65–89. [4] А. Е. Вязилов // *УМН*. 1999. Т. 54. № 4. С. 163–164.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
22.08.2001