Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, Вещественные конечнозонные решения уравнения Sine-Gordon: формула для топологического заряда, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 5, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:13:17

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ SINE-GORDON: ФОРМУЛА ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

П. Г. ГРИНЕВИЧ, С. П. НОВИКОВ

Решение уравнения SG $4(u_{tt} - u_{xx}) = u_{\eta\xi} = 4 \sin u$ называется *периодическим* по x , если величина e^{iu} периодична. *Топологическим зарядом* называется целое число $n = [u(x+T) - u(x)]/2\pi$, где T – период. *Плотность топологического заряда* определяется как отношение $\bar{n} = n/T$. Эта величина корректно определена и для квазипериодических функций. Конечнo-зонные решения SG определяются в терминах алгебраической кривой $\Gamma: \mu^2 = \prod_{k=0}^{2g} (\lambda - E_k)$, где $E_0 = 0$. Эти решения вещественны и неособы, если точки ветвления E_k либо вещественны и отрицательны, $E_j < 0$, $j = 1, \dots, 2m$, либо образуют комплексно-сопряженные пары $\bar{E}_{2m+2j-1} = E_{2m+2j}$, $j = 1, \dots, g-m$; при этом дивизор $D + \tau D$ должен быть дивизором нулей мероморфного дифференциала Ω с полюсами первого порядка только в точках $(0, \infty)$, где $\tau(\lambda, \mu) = (\bar{\lambda}, \bar{\mu})$.

ЛЕММА 1. Дифференциал Ω имеет вид

$$\Omega = (1 - \lambda P_{g-1}(\lambda) R(\lambda)^{-1/2}) d\lambda,$$

где полином $P_{g-1}(\lambda)$ – вещественный и такой, что уравнение $R(\lambda)^{-1/2} = \lambda P_{g-1}(\lambda)$ имеет точки $[(0, 0), \gamma_1, \dots, \gamma_g, \tau\gamma_1, \dots, \tau\gamma_g]$ своими решениями.

Все такие дивизоры “допустимы”, т.е. задают вещественные неособые решения уравнения SG; при заданной Γ мы имеем 2^m вещественных торов [1]. Θ -функциональное описание этих торов [2], [3] не дает ничего для топологического заряда. Поэтому в [4] был предложен другой подход. Однако в нем выявились пробелы [5]. Здесь мы развиваем метод, дающий полное доказательство формулы, предложенной в [4] для топологического заряда.

ЛЕММА 2. График полинома $P_{g-1}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, нигде не попадает внутрь овалов кривой $y = \pm R(\lambda)^{-1/2} \lambda^{-1}$. Здесь λ таковы, что $R(\lambda) \geq 0$. При $\lambda > 0$ мы имеем $|P_{g-1}(\lambda)| \leq R(\lambda)^{-1/2} \lambda^{-1}$. Все полиномы с этим свойством соответствуют допустимым дивизорам, причем один полином $P_{g-1}(\lambda)$ определяет 2^g допустимых дивизоров, которые получаем, выбирая из каждой пары $(\gamma_j, \tau\gamma_j)$ по одной точке произвольным образом.

“Топологический тип” полинома $P_{g-1}(\lambda)$ определяется как набор знаков $[s_1, \dots, s_m]$, $s_j = \pm 1$: $s_k = 1$, если график $y = P_{g-1}(\lambda)$ проходит над овалом с номером k , т.е. $P_{g-1}(\lambda) \geq R(\lambda)^{-1/2} \lambda^{-1}$; $s_k = -1$, если график $y = P_{g-1}(\lambda)$ проходит под овалом с номером k , т.е. $P_{g-1}(\lambda) \leq R(\lambda)^{-1/2} \lambda^{-1}$ для $\lambda \in [E_{2k}, E_{2k-1}]$, $k = 1, \dots, m$.

ЛЕММА 3. Все топологические типы непусты и непрерывно варьируются вместе с точками ветвления кривой Γ . В каждом типе множество допустимых полиномов выпукло; можно выбрать представителя вида

$$P_{g-1}(\lambda) = \sqrt{-E_1 - E_{2m}} \times (-1)^{s_1} \prod_{k=2}^m (\sqrt{E_{2k-2} E_{2k-1}} - (-1)^{s_k s_{k-1}} \lambda) \prod_{k=m+1}^g (\sqrt{E_{2k-1} E_{2k}} - \lambda).$$

ЛЕММА 4. λ -проекции точек допустимого дивизора $\gamma_j = (\lambda_j, \mu_j)$ таковы, что λ_j не может лежать в сегментах $[E_1, E_0]$, $[E_3, E_2]$, $\dots$, $(-\infty, E_{2m}]$, где $0 > E_1 > E_2 > \dots$.

Рассмотрим теперь “стабильный случай”, где $m = g$. Выберем базис a -циклов, где a_j охватывает отрезок между точками ветвления E_0 и E_{2j+1} , $j = 0, \dots, g-1$. Канонический базис

дифференциалов первого рода $\oint_{a_j} \omega_k = \delta_{jk}$ имеет вид

$$\omega_k = iR(\lambda)^{-1/2} \left(\sum_{j=0}^{g-1} D_j^k \lambda^j \right) d\lambda, \quad D_j^k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, g-1. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА. Плотность топологического заряда имеет вид:

$$2\pi\bar{n} = \pi \sum_{k=0}^{g-1} (-1)^{k-1} s_k \tilde{D}^k$$

для всех конечнозонных вещественных решений уравнения SG в стабильном случае, где $\tilde{D}^k = D_{g-1}^k + \prod_{q=1}^{2g} E_q^{-1/2} D_0^k$.

Из свойств преобразования Абеля вытекает, что плотность топологического заряда имеет вид: $\bar{n} = \sum_{k=0}^{g-1} \tilde{D}^k n_k$, где n_k – аналоги топологических зарядов, отвечающие сдвигам по “временам” t_k , соответствующим базисным циклам абелева тора. Это – целые числа, которые надо вычислить.

Удалим отрезки $\{[E_1, E_0], [E_3, E_2], \dots, (-\infty, E_{2m}]\}$ из Γ . После этого $\Gamma \setminus \{\cdot\}$ распадается на два взаимно несвязанных листа G_+ и G_- . Для любого $g > 0$ мы выберем Γ и допустимые дивизоры D в каждой компоненте так, чтобы движению по времени t_k , отвечающему циклу с номером k абелева тора, соответствовало движение точки γ_k только на листе G_+ или G_- ; точки γ_j , $j \neq k$, движутся по стягиваемым циклам. Эти потоки нелокальны. Все вещественные решения неособы. В этих примерах мы получаем $n_k = (-1)^{k-1} s_k$, $n_j = 0$, $j \neq k$. Здесь используются “уравнения Дубровина” для движения дивизора D по указанным “временам”. Меняя параметры (Γ, D) вдоль кривой общего положения, мы будем встречать сингулярные дивизоры. Кривые $\gamma_s(t_k)$ неизбежно встретят места, где $\gamma_j(t_k) = \gamma_s(t_k)$. Однако симметричное выражение $e^{iu} = \text{const} \cdot \gamma_1 \cdots \gamma_g$ меняется непрерывно. Это вытекает из Θ – функциональных формул. Это и позволяет распространить формулу топологического заряда на все функциональное пространство. Использование времен t_k и проход сингулярности играют решающую роль.

В подробной работе мы приведем все детали, а также переменные действие-угол, следуя нашей схеме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. В. Чередник // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252. № 5. С. 1104–1108. [2] Б. А. Дубровин, С. М. Натанзон // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16. № 1. С. 27–43. [3] N. M. Ercolani, M. G. Forest // Comm. Math. Phys. 1985. V. 99. № 1. P. 1–49. [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267. № 6. С. 1295–1300. [5] С. П. Новиков // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1984. Т. 133. С. 177–196.

Институт теоретической Физики им. Л. Д. Ландау РАН;
University of Maryland at College Park

Принято редколлегией
12.09.2001