Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Гауссовы меры на пространствах свободных петель, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 5, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:17:54

ГАУССОВЫ МЕРЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ СВОБОДНЫХ ПЕТЕЛЬ

С. В. ЛЮДКОВСКИЙ

Пространства свободных петель важны в дифференциальной геометрии, алгебраической топологии и теоретической физике. Данная работа посвящена построению квазиинвариантных гауссовых мер на пространствах $Y^\xi(M, s_0; N, y_0)$ свободных петель $f: M \rightarrow N$ с $f(s_0) = y_0$ для многообразий M и N , где $s_0 \in M$, $y_0 \in N$ – отмеченные точки.

1. Определения и обозначения. Каноническое замкнутое подмножество Q в $X = \mathbb{R}^n$ или в $X = l_2$ над $\mathbb{R}$ называется квадрантом, если $Q := \{x \in X : q_j(x) \geq 0, j \in \Lambda_Q\}$, где $q_j \in X^*$, $\Lambda_Q \subset \mathbb{N}$. Тогда аналогично [1] задаются M и N – сепарабельные римановы ориентированные метризуемые связные многообразия с углами, (U_l, u_l, Q_l) и (V_i, ψ_i, S_i) – карты атласов M и N , где $u_l: U_l \rightarrow u_l(U_l) \subset Q_l$, $i \in \Lambda_N \subset \mathbb{N}$, причем пусть (i) M является объединением двух канонических замкнутых подмногообразий A_1 и A_2 с углами, $A_1 \cap A_2 = \partial A_1 \cap \partial A_2 =: A_3$ и $\text{codim } A_3 = 1$; (ii) $s_0 \in A_3$; (iii) A_1 и A_2 являются $C^0([0, 1] \times A_j, A_j)$ -стягиваемыми в s_0 , где $j \in \{1, 2\}$; (iv) если M бесконечномерно, то имеется последовательность вложенных подмногообразий $\eta_m^{m+1}: M_m \hookrightarrow M_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих (i)–(iii), а $s_{0,m}$ в M_m соответствует $s_{0,m+1} = \eta_m^{m+1}(s_{0,m})$ в M_{m+1} , $\dim M_m = n(m)$, $0 < n(m) < n(m+1)$, $\bigcup_m M_m$ плотно в M , $u_i \circ u_j^{-1}|_{u_j(U_i \cap U_j)} \rightarrow l_2$ имеют вид: $u_i \circ u_j^{-1}((x^l : l \in \mathbb{N})) = (\alpha_{i,j,m}(x^1, \dots, x^{n(m)}), \gamma_{i,j,m}(x^l : l > n(m)))$, когда $\partial M = \emptyset$, а для любой компоненты границы M_0 в M и $U_j \cap M_0 \neq \emptyset$ имеем отображение $\varphi_j: U_j \cap M_0 \rightarrow H_{l,Q}$, причем $\partial M_m \subset \partial M \quad \forall m$, где $H_{l,Q} := \{x \in Q_j : x^l \geq 0\}$, $x = (x^j \in \mathbb{R} : j \in \mathbb{N}) \in l_2$.

Если M компактно, то рассмотрим разбиения Z_k с помощью подмногообразий с углами M'_k коразмерности 1 в M такие, что $M = \bigcup_{j \in \Xi_k} M_{j,k}$, где $M_{j,k}$ – подмногообразия, $\partial M_{j,k} \subset M'_k$, $M_{i,k} \cap M_{j,k} \subset M'_k \quad \forall i \neq j$, $\lim_k \sup_j \text{diam}(M_{j,k}) = 0$, $\Xi_k \subset \mathbb{N}$. Пусть $H^\gamma(M, X; Z_k)$ – пространства непрерывных кусочно-соболевских H^γ -функций [1] с нормой $\rho_{k,\gamma}(y) := [\sum_{i \in \Xi_k} \|y|_{M_{i,k}}\|_{H^\gamma(M_{i,k}, X)}^2]^{1/2}$ при $y \in H^\gamma(M, X; Z_k)$ и $\rho_{k,\gamma}(y) = +\infty$ в противном случае, где $\infty > t \geq \gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq [m/2] + 1$, $m = \dim M$. Пусть $Y^\gamma(M, X)$ – это пополнение $\text{str-ind}_j H^\gamma(M, X; Z_j)$ по норме $\|y\|'_\gamma := \inf_k \rho_{k,\gamma}(y)$, а для ограниченной области W в $\mathbb{R}^n$ с кусочно C^∞ -границей пусть $Y^{\Upsilon,a}(W, X)$ – подпространство тех $f \in Y^\infty(W, X)$, для которых $\|f\|_{\Upsilon,a} := (\sum_{j=0}^\infty (\|f\|_j^*)^2 / (j!)^a)^{1/2} < \infty$, где $(\|f\|_j^*)^2 := (\|f\|_j')^2 - (\|f\|_{j-1}')^2$ при $j \geq 1$ и $\|f\|_0^* = \|f\|_0'$, $0 < a < \infty$. Если W – это ограниченная область в l_2 с кусочно C^∞ -границей, а H_m – подпространства, $H_m \subset H_{m+1}$ и $\dim H_m = n(m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$, $\text{cl}(\bigcup_m H_m) = l_2$, то зададим $P_{\Upsilon,a}^\infty(W, X) := \text{str-ind}_m Y^{\Upsilon,a}(W_m, X)$, где $W_m = W \cap H_m$, а $Y^\xi(W, X)$ определим пополнением $P_{\Upsilon,a}^\infty(W, X)$ по норме $\|f\|_\xi := [\sum_{m=1}^\infty \|f|_{W_m}\|_{Y^{\Upsilon,a}(W_m, X)}^2 / (n(m)!)^{1+c}]^{1/2}$, где $0 < c < \infty$ и $\xi = (\Upsilon, a, c)$. Пусть M и N являются $Y^{\Upsilon,a',c'}$ -многообразиями с $0 < a' < a$ и $0 < c' < c$. С помощью атласов M и N определим пространства $Y^\xi(M, N)$ и $Y^\xi(M, s_0; N, y_0)$, где $\xi = (\Upsilon, a, c)$.

Если M_m компактно и $f_{n,m} \in Y^\xi(M_m, N)$ имеет ранг $\text{rang}(f_{n,m}(x)) = \dim T_x M_m \quad \forall x \in M_m$, то $f_{n,m}(M_m)$ является Y^ξ -подмногообразием в N и на $f_{n,m}(M_m)$ зададим связность Леви-Чивита и риманов элемент объема $\nu_{n,m}$ такой, что $\nu_{n,m}(f_{n,m}(M_m)) = 1$. Это индуцирует локальные нормальные координаты в $f_{n,m}(M_m)$. В случае $M_m = S^1$ получим параметр, соответствующий длине дуги на кривой. Если для $f \in Y^\xi(M, N)$ имеется последовательность $f_{n,m(n)}|_{M_m} \in Y^\xi(M_m, N)$, сходящаяся к f , то получим $\psi_f \in Y^\xi(B, N)$ и $h_f \in Y^\xi(f(M), N)$ с $h_f \circ \psi_f = f$, где B – это квадрант в $\mathbb{R}^m$ или l_2 . В силу (i)–(iv) имеется вложение $\xi^*: Y^\xi(M \vee M, N) \hookrightarrow Y^\xi(M, N)$ [1], [2]. В сочетании с выбором натуральных координат получаем непрерывную композицию $g \circ f$ в $G := Y^\xi(M, s_0; N, y_0)$ такую, что

$g \circ w_0 = g$, где $w_0(M) = \{y_0\}$. Возьмем плотный подгруппоид $G' := Y^{\xi'}(M, s_0; N', y_0)$ с $\xi' = (\Upsilon, a'', c'')$, где $0 < b' < a' < a'' < a < \infty$ и $0 < d'' < c' < c'' < c < \infty$, N' – это $Y^{\Upsilon, b', d''}$ -подмногообразие, плотное в N .

2. ТЕОРЕМА. *На группоиде G существует квазиинвариантная бесконечно дифференцируемая мера μ относительно подгруппоида G' .*

Для доказательства рассмотрим $\varkappa \in Y^{\xi'}(Q, M)$ так, что $\varkappa: \text{Int}(Q \setminus S) \rightarrow M \setminus (A_3 \cup \partial M)$ – гомеоморфизм, где S – подмногообразие с углами коразмерности 1 в Q , Q – квадрант в X .

Для M_m существует отображение $K(F, w)(v) := \int_0^{\zeta^1} \cdots \int_0^{\zeta^m} (F^* w) \quad \forall 0 < a \leq a'' < \infty$,

где $B^k N = \bigoplus_{j=0}^k \Lambda^j N$, $\Lambda^j N$ – пространство дифференциальных j -форм w на N , $v = \varkappa(\zeta)$, $Q = [0, 1]^m$, $N^s = N_1 \times \cdots \times N_s$ с $N_j = N \quad \forall j = 1, \dots, s$, причем $s \geq \dim M_m / \dim N$. Для последовательности гильбертовых пространств P_q над $\mathbb{R}$ с $q \in J \subset \mathbb{N}$ пусть $l_{2, \delta}(\{P_q : q \in J\}) := \{x = (x^q : x^q \in P_q, q \in J) : \|x\|_{l_{2, \delta}(\{P_q : q \in J\})} := (\sum_{q \in J} \|q^\delta x^q\|_{P_q}^2)^{1/2} < \infty\}$, где $\infty > \delta \geq 0$. Возьмем $P_q = T_{w_0}(Y^\xi B^k M) \times \mathbb{R}^{ld} \quad \forall q$, где $J = \mathbb{N}$ при $\dim N = \infty$, $J = \{1\}$ при $\dim N < \infty$. Пусть $e_q \in l_2(\{P_q : q \in J\}) \quad \forall q \in J$ такие, что $\pi_q: P_q \hookrightarrow l_2(\{P_q : q \in J\})$ – вложения с $e_q \in \pi_q(P_q)$ и $\|e_q\|_{l_2(\{P_q : q \in J\})} = 1$.

Если $\dim N = \infty$, то зададим отображение $K_\infty(F, w) := \{K_m(F|_{M_m}, w|_{M_m}) : m \in \mathbb{N}\}$, где K_m определены для M_m , $\tilde{N} = N$ при $\dim N = \infty$ и $\tilde{N}$ – подмногообразие в $N^\infty := \bigotimes_{j=1}^\infty N_j$, моделируемое на $l_{2, d'}(\{S_j : j \in \mathbb{N}\})$ с $N_j = N \quad \forall j$, где $0 < t - a < (a - a'')/2$ и $0 < q - c < (c - c'')/2$, то получим отображение $K_\Sigma(F, w) := \sum_{m=1}^\infty \chi_m(K_m(F|_{M_m}, w|_{M_m}))$, где $\chi_m: Y^\xi(M_n, B^{n(m)} M_m) \hookrightarrow Y^\xi(M, B^\infty M)$ – вложения. Пусть $z = (z^m \in \mathbb{R}^{d(m)} : m \in \mathbb{N})$, где $z^m = K_m(F|_{M_m}, w|_{M_m})|_{v=\varkappa(\zeta), \zeta=(1, \dots, 1)}$, $d(m) = \dim B_{s_0, m}^{n(m)} M_m$, $z^m = (z_m^j : j = 1, \dots, d(m))$. Тогда $\|z\|_q^2 := \sum_{m=1}^\infty (\|z^m\|_m^2 / (n(m)!)^{1+q}) < \infty$, где $\|z\|_m^2 := \sum_{j=1}^{d(m)} |z_m^j|^2$; гильбертово пространство таких последовательностей обозначим $\overline{N}_q$. Тогда K_Σ и экспоненциальное отображение E многообразия $Y^\xi(M, N)$ порождают отображение $\overline{K}: W_e \times V_e \rightarrow V'_0$, где V'_0 – окрестность нуля в гильбертовом пространстве $H_{t, q} := T_{w_0} Y^{\Upsilon, t, q}(M, s_0; B^\infty M, s_0 \times 0) \times \overline{N}_q$. Пусть $\Psi_{l, M, N}(f, w) := \Psi_{1, M, M}(\Psi_{l-1, M, N}(\text{id}_M, \overline{K}(f, \langle w \rangle)))$, где $\Psi_{1, M, N}(f, w) := \overline{K}(f, w)$, $l = 2$ при $\dim M > 1$ и $l = 3$ при $\dim M = 1$. Возьмем $P_q = H_{t, q} \quad \forall q \in \mathbb{N}$. Существует семейство $\{w^{i, q, m} : i = 1, \dots, d(m); m \in \mathbb{N}; q \in \mathbb{N}\} \subset T_{w_0} Y^{\Upsilon, \beta'', \gamma''}(M, s_0; B^\infty \tilde{N}', y_0 \times 0)$ для $a' < \beta'' < a''$, $c' < \gamma'' < c''$ такое, что отображение $\Phi(f) := \sum_{q=1}^\infty \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{d(m)} \Psi_l(f, w^{i, q, m}) e_q$ инъективно, где $B^\infty \tilde{N}'$ – это $Y^{\Upsilon, b', d''}$ -подмногообразие в $\bigoplus_{j=0}^\infty \Lambda^j \tilde{N}'$, $w^{i, q, m}$ независимы от локальных координат $(x^{n(m)+1}, x^{n(m)+2}, \dots) \quad \forall i, q$ и m . Поэтому Φ – диффеоморфизм окрестности $U_0 \ni w_0 \in Y^\xi(M, s_0; N, y_0)$ на окрестность $V_0 \ni 0$ в гильбертовом подпространстве K_0 в $l_2(\{P_q : q \in J\})$. Существуют окрестности $V' \ni w_0 \subset G'$ и $U_1 \ni w_0 \subset G$ такие, что $V' \circ U_1 \subset U_0$. Пусть $S_\varphi(v) := \Phi \circ \eta \circ \Phi^{-1}(v) - v$ с $v \in V_1$, $\eta \in V'$, где $V_1 = \Phi(U_1)$. Поэтому гауссова мера на K_0 с помощью Φ индуцирует меру на G (см. также [1], [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Лютковский // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 3. С. 306–308. [2] S. V. Ludkovsky. Generalized Loop Groups of Complex Manifolds. Preprint math.RT/9910086. Los Alamos: Los Alamos Nat. Lab., 1999.