Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Об аналитических свойствах эллипса, связанных с особенностями его волнового фронта, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 5, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:27:45

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЭЛЛИПСА, СВЯЗАННЫХ С ОСОБЕННОСТЯМИ ЕГО ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

Рассмотрим эллипс, заданный в прямоугольных координатах x, y уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где $0 < a < b$. Пусть $d > 0$. Волновым фронтом Π_d , находящимся на расстоянии d от эллипса, называется объединение всех точек плоскости x, y , каждая из которых отстоит на расстоянии d от некоторой точки эллипса в направлении внутренней нормали к эллипсу в этой точке. В этой работе мы рассматриваем также продолжение эллипса в комплексную область, разрешая вещественной переменной x принимать значения, удовлетворяющие условию $|x| > a$. При этом переменная y принимает чисто мнимые значения, а фронт Π_d допускает комплексное продолжение Π_d^* . Со времен Гюйгенса известна следующая геометрическая картина. Если число d не превосходит некоторое критическое значение $d_* > 0$, то фронт Π_d — гладкая несамопересекающаяся кривая. Если же $d_* < d < a$, то фронт Π_d пересекает сам себя в двух точках и на нем возникают четыре особые точки, в каждой из которых наблюдается излом кривой. Утверждается также, что в малой окрестности каждой из этих точек кривая Π_d дифференцируемо эквивалентна полукубической параболе, заданной уравнением $v^2 = u^3$ в окрестности точки $u = 0, v = 0$, так как это справедливо для кривых общего вида. Однако в литературе отсутствуют доказательства этих фактов и явное указание всех особенностей и асимптотического поведения кривых Π_d и Π_d^* в их достаточно малой окрестности. В настоящей работе содержатся вместе с доказательствами явные выражения для всех этих объектов. Как следствие асимптотических выражений, найденных здесь, если $a^2/b < d < b^2/a$, то кривая Π_d имеет в малой окрестности особой точки дифференцируемый тип полукубической параболы (утверждение 2) теоремы 2). Однако, если $b < 1$, то всегда существует единственное число $d > b^2/a$ такое, что кривая Π_d^* в малой окрестности своей особой точки не эквивалентна полукубической параболе (утверждение 3) теоремы 2). Это контрастирует с противоположным выводом, который можно сделать, исходя из многих публикаций на эту тему.

ТЕОРЕМА 1. Если $0 < d \leq a^2/b$, то Π_d — гладкая кривая без самопересечений, а если $a^2/b < d < a$, то фронт Π_d пересекает сам себя в двух точках $x = 0, y = \pm \sqrt{(a^2 - d^2)(b^2 - a^2)}/a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P = (x, y)$ — точка эллипса, у которой координата $y \geq 0$. Тогда точка $(x', y') \in \Pi_d$, отстоящая от P на расстояние d вдоль внутренней нормали к эллипсу, проходящей через P , имеет координаты

$$x' = x - \frac{dbx}{\kappa}, \quad y' = y - \frac{da\sqrt{a^2 - x^2}}{\kappa}, \quad (1)$$

где

$$\kappa = \kappa(x) = \sqrt{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что если $d \leq a^2/b$ и $x > 0$, то $x' > 0$, а если $a > d > a^2/b$ и $x > 0$, то $x' = 0$ для точки эллипса с координатами $x = \sqrt{(d^2b^2 - a^4)/(b^2 - a^2)}$, $y = b^2a^{-1}\sqrt{(a^2 - d^2)/(b^2 - a^2)}$ и при этом $y' = a^{-1}\sqrt{(a^2 - d^2)(b^2 - a^2)}$. Так как точка $(0, y')$ находится на одинаковом расстоянии от двух точек эллипса (x, y) и $(-x, y)$, то при $a > d > a^2/b$ фронт Π_d пересекает сам себя в этой точке, и для доказательства теоремы 1 достаточно доказать, что при $d \leq a^2/b$ фронт Π_d — гладкая кривая без самопересечений. Предположим противное, т.е. существует точка $(x', y') \in \Pi_d$, находящаяся на одинаковом расстоянии от точек эллипса (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Пусть $x_1 < x_2$. Тогда в силу (1), (2) имеем:

$$1 = \frac{db}{\kappa(x_1)} + \frac{dbx_2}{x_1 - x_2} \left(\frac{1}{\kappa(x_1)} - \frac{1}{\kappa(x_2)} \right) = \frac{db}{\kappa(x_1)} + dbx_2 \left(\frac{1}{\kappa(x)} \right)' (\xi), \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01063).

где $(1/\kappa(x))'_x(\xi)$ – производная функции $1/\kappa(x)$ по x в точке ξ , а число ξ удовлетворяет неравенству

$$x_1 \leq \xi \leq x_2. \quad (4)$$

Производная $(1/\kappa(x))'_x(\xi) = -\xi(b^2 - a^2)/\kappa^3$. Поэтому, если числа x_1 и x_2 имеют одинаковый знак, то $dbx_2(1/\kappa(x))'_x(\xi) < 0$ в силу (4), а так как в случае $d \leq a^2/b$ справедливо неравенство $db/\kappa(x_1) \leq 1$, то из последних двух неравенств следует, что равенство (3) не может выполняться. Если же числа x_1 и x_2 имеют разные знаки, то, соединяя точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) с точкой (x', y') отрезками, получим, что какой-либо из этих двух отрезков пересекает ось $x = 0$. Пусть этим отрезком будет отрезок с концами (x', y') и (x_2, y_2) и $x_2 > 0, y_2 \geq 0$. Тогда $x' \leq 0$, но, как указано выше, если $d \leq a^2/b$, то это невозможно. Далее, если $d \leq a^2/b$, то, применяя равенства (1), (2), получим, что кривая Π_d – гладкая. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. 1) Если $a^2/b < d < b^2/a$, то фронт Π_d содержит четыре особые точки $x' = \pm \hat{x}, y' = \pm \hat{y}$ (возможны комбинации любых знаков), в которых происходит излом кривой, такие, что

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{(dba^4)^{2/3} - a^4}{b^2 - a^2}} \left(1 - \frac{db}{(dba^4)^{1/3}} \right) = x'(x_*),$$

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{a^2b^2 - (dba^4)^{2/3}}{b^2 - a^2}} \left(\frac{b}{a} - \frac{da}{(dba^4)^{1/3}} \right) = y'(x_*),$$

где $x_* = \sqrt{(\kappa_*^2 - a^4)/(b^2 - a^2)}$, $\kappa_* = (dba^4)^{1/3}$, а $x'(x_*)$ и $y'(x_*)$ – значения функций $x'(x)$ и $y'(x)$ из (1) при $x = x_*$.

2) Если $a^2/b < d < b^2/a$, число $\varepsilon > 0$ – достаточно мало и $|x - x_*| \leq \varepsilon$, то

$$x'(x) = \hat{x} + \frac{3dba^4(b^2 - a^2)x_*}{2\kappa_*^5}(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3),$$

$$y'(x) = \hat{y} - \frac{3db^2a^3(b^2 - a^2)x_*^2}{2\kappa_*^5\sqrt{a^2 - x_*^2}}(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3)$$

и существует линейная замена координат $u = x' - \hat{x}, v = c_1(x' - \hat{x}) + c_2(y' - \hat{y})$ (c_1, c_2 – константы; $c_1 < 0, c_2 < 0$) такая, что кривая Π_d в координатах u, v имеет вид $u = k_1(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3), v = k_2(x - x_*)^3 + O(|x - x_*|^4)$, где k_1 и k_2 – положительные константы.

3) Если $b < 1, d = \hat{d} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^5}} \left(\frac{b^2 + ab - a^2 - a^3}{1 - b} \right)^{3/2}$, то в координатах u, v в малой окрестности особой точки $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Pi_d^*$ кривая Π_d^* имеет вид $u = k_1(x - x_*)^2 + O(|x - x_*|^3), v = O(|x - x_*|^4)$, где константа $k_1 > 0$, а если $d > b^2/a, d \neq \hat{d}$, то для кривой Π_d^* справедливо утверждение 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В особых точках (x', y') кривой Π_d должны быть справедливы равенства $\frac{dx'}{dx}(x) = \frac{dy'}{dx}(x) = 0$, которые в силу (1) и (2) будут выполнены только, если $\kappa(x) = \kappa(x_*) = \kappa_*$, что доказывает утверждение 1). Далее, полагая $c_1 = -x_*, c_2 = -a\sqrt{a^2 - x_*^2}$ и вычисляя в точке $x = x_*$ вторые и третьи производные функций $x'(x)$ и $y'(x)$ из (1), мы докажем утверждение 2), в котором константа $k_2 = \frac{dba^4(b^2 - a^2)x_*}{2\kappa_*^5} \left(1 + \frac{b(x_*^2 + a)}{a^2 - x_*^2} \right) > 0$, тогда как утверждение 3) следует из того факта, что при $d = \hat{d}$ будут справедливы равенства $x_* = \sqrt{\frac{a(a+b)}{1-b}}, k_2 = 0$. Теорема 2 доказана.